UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

AS APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES DE PRIMEIRO E SEGUNDO GRAU NA CINEMÁTICA

VALDERI DANTAS

MOSSORÓ
2013

VALDERI DANTAS

AS APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES DE PRIMEIRO E SEGUNDO GRAU NA CINEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Campus Mossoró, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues – UFERSA.

MOSSORÓ
2013

Ficha catalográfica preparada pelo setor de classificação e catalogação
da Biblioteca "Orlando Teixeira" da UFERSA

D192a Dantas, Valderi.

As aplicações das funções de primeiro e segundo grau na cinemática / Valderi Dantas. – Mossoró, RN : 2013.
63f. : il.

Orientador: Profº. Dr. Walter Martins Rodrigues.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural do

Semi-Árido, Mestrado em Matemática, 2013.

1. Função do primeiro grau. 2. Função do segundo grau.

3. Cinemática. I. Título.

CDD: 531.112

Bibliotecária: Marilene Santos de Araújo

CRB-5/1033

VALDERI DANTAS

AS APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES DE PRIMEIRO E SEGUNDO GRAU NA CINEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM _____/_____/_____

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. XXXXXXXXXX – UFERSA
Presidente

____

Prof. Dr. XXXXXXXXXX – UFERSA
Primeiro Membro

____

Prof. Dr. XXXXXXXXXX – UFERSA
Segundo Membro

Dedico este trabalho a meus pais Vital Bruno e Maria Das Graças, que sempre me incentivaram a continuar me qualificando. Ao meu amigo, professor e orientador Walter Martins Rodrigues pela contribuição e incentivo dado a este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus por ter me dado esta oportunidade de fazer essa graduação, me ajudado em todo o curso e preparado tudo para que eu pudesse ver este sonho concretizado.

A meus pais, Vital Bruno Dantas e Maria Das Graças Dantas, por ter me dado o de mais valioso que poderiam me proporcionar, a educação.

A minha esposa Ronaliza Cristina da Silva por ter me incentivado a continuar me dedicando a esse curso, o PROFMAT.

A meus filhos, João Victor de Oliveira Dantas, Bruno Victor de Oliveira Dantas e a André Victor Silva Dantas, a quem dedico meus esforços, e também por terem compreendidos minhas ausências nos inúmeros fins de semana.

Ao coordenador do Curso (PROFMAT – UFERSA) Ronaldo Garcia por ter nos proporcionado essa qualificação ao de trazer o PROFMAT para a cidade de Mossoró e por todo incentivo dado durante o curso.

Ao meu Orientador, Professor Walter Martins Rodrigues, pela compreensão e paciência que teve comigo e por todas as contribuições tão valiosas para a confecção deste trabalho.

Agradeço à meus amigos e companheiros de aventura desse curso, por ter acreditado em mim quando eu mesmo não acreditava. Em especial, aos colegas Kleber Araújo, Adriano Jorge, Alberton Fágno, João Paulo, Otoniel Maria e Francisco Derilson, pelos incontáveis finais de semana que me aturaram na descoberta de uma forma para resolver algum exercício complicado.

A todos os meus professores do (PROFMAT – UFERSA) que me ajudaram a crescer profissionalmente durante todo o curso.

Por fim, a todos que de uma forma ou de outra, me ajudaram na etapa da minha vida acadêmica.

“Muitas das falhas da vida acontecem quando as pessoas não percebem o quão perto estão quando desistem”.

(Thomas Edison)

RESUMO

Inicialmente vamos abordar alguns elementos que compõem as Funções na Matemática do ensino médio. O objetivo deste trabalho é criar e apresentar um planejamento para o ensino deste conteúdo, utilizando o conceito de funções numa linguagem natural, para o desenvolvimento destas funções no estudo da Cinemática no ensino médio. Após participar como professor de matemática e física em escolas públicas e privadas, da qual também obtive respostas a alguma perguntas encaminhadas com relação ao ensino e aprendizagem, abordo um pouco do que aprendi com estas experiências, bases para que eu pudesse escrever e apresentar uma sequência didática sobre gráficos de funções na Cinemática, que tem como objetivo principal a aplicação dessas funções, na construção do conhecimento de cinemática por meio da linguagem natural, inserindo-o em uma forma mais simples de estudo.

Palavras-chave: Função do primeiro grau; Função do segundo grau; Cinemática.

ABSTRACT

At first, we will discuss some elements that make up the functions in the high school mathematics. The objective of this work is to create and present a plan for teaching this content, using the concept of functions in a natural language, for the development of these functions in the study of Cinematic in high school physics. After participating as a teacher of mathematics and physics in public and private schools, which also got answers to some questions sent in relation to teaching and learning, I discuss a little of what I learned from these experiences, bases so I could write and present a sequence teaching about function graphs in cinematic, which has as its main objective the implementation of these functions in the construction of knowledge through cinematic natural language, inserting it into a simpler form of study.

Keywords: Function of the first degree; Function High School; Cinematic.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

MU: Movimento Uniforme

MRU: Movimento Retilíneo e Uniforme

MRUV: Movimento Retilíneo e Uniformemente Variado

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É indiscutível que o ensino de matemática no Brasil vem passando por uma transformação. E um dos motivos é o crescimento da educação matemática, que tem como uma de suas tendências a resolução de problemas, e um dos objetivo desse trabalho é mostrar para os alunos do ensino médio, as aplicações de funções na cinemática , que é o estudo dos movimentos. Quando a matemática é ensinada com contextualização o aluno desperta maior interesse pelo conteúdo ministrado. Sabemos que a física faz uso da matemática na sistematização e compreensão de problemas já que uma fórmula matemática resume um fenômeno físico e ajuda na compreensão desse fenômeno.

Ensinar funções polinomiais de primeiro e segundo grau tendo como exemplos problemas de cinemática, pode contribuir significativamente para abrangência e profundidade de uma prática de ensino interdisciplinar. Por exemplo, apesar de ser necessária uma longa explicação para chegarmos ao fato de que a velocidade de um corpo depende do espaço percorrido e do tempo desse deslocamento, recorremos a uma fórmula matemática.

A interdisciplinaridade é não só um meio para estabelecer relações entre conteúdos de diferentes matérias, e sim um conteúdo prioritário no ensino. Aprender a estabelecer relações entre os diferentes conteúdos, seja qual for sua procedência, é um dos meios mais valiosos para dar resposta aos inconvenientes de um saber fragmentado e de um sistema educativo historicamente submetido a algumas finalidades distanciadas das necessidades reais dos cidadãos e das cidadãs. Dessa forma, pelo enriquecimento interpretativo promovido por esse tipo de postura educativa, as capacidades explicativas de cada uma das áreas do conhecimento são certamente potencializadas. Como resultado, podemos ter uma melhoria importante na qualidade do ensino, uma vez que o aluno se sentirá mais motivado para se envolver no seu processo de ensino-aprendizagem. Por seu caráter significativo, esse tipo de abordagem poderá propiciar uma melhor compreensão da realidade que cerca o aluno, dos problemas do mundo, facilitando a elaboração de um conhecimento mais holístico e integrado.

Os Parâmetros e Diretrizes Curriculares, conseguem sintetizar os principais problemas do ensino da física e da matemática e apontam para uma abordagem que supera a simples memorização de fórmulas ou repetição automatizada de procedimentos, para se concentrar em um ensino voltado para objetivos sociais mais amplos. Conforme as orientações complementares dos PCN+, as ciências, como a física e a matemática teriam que oferecer aos alunos a oportunidade de ter acesso a conhecimentos atuais que lhes assegurassem uma visão moderna do mundo, possibilitando sua compreensão e participação, principalmente para aqueles alunos que não terão oportunidade de prosseguir nos estudos.

A competência de resolver problemas de raciocínios lógicos e lidar bem com cálculos e números, não é apenas das áreas das exatas. Quero dizer com isso que inteligência logico-matemática não necessariamente está relacionados a cálculos, mas também à resolução de problemas que envolvam raciocínio lógico. É por isso que o professor deve conhecer muitas aplicações dos conteúdos que está ministrando já que aqueles alunos poderão ser profissionais das diversas áreas do conhecimento. Ele conhecendo onde podem ser aplicados esses conhecimentos matemáticos vendo a relação com as outras disciplinas ajudará a despertar o interesse pela disciplina de matemática.

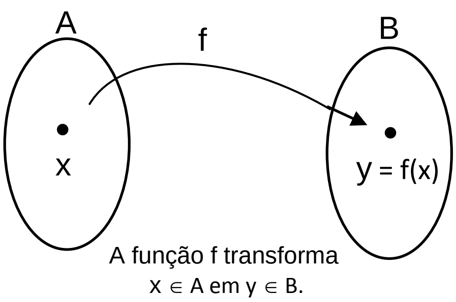
2 UM POUCO DE FUNÇÃO

Neste capitulo apresentaremos a definição formal de função, falaremos das funções de primeiro e segundo grau que é o objetivo do trabalho, mostraremos as aplicações dessas funções na cinemática através de problemas e gráficos.

Segundo IEZZI e et all, (2004) , dados dois conjuntos, *A* e *B*, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo x $\in$ A existe um só y $\in$ B tal que (x, y) $\in$ f.

As funções são relações matemáticas de dependências entre duas variáveis. Intuitivamente, uma função é uma maneira de associar a cada valor do argumento x (às vezes denominado *variável independente*) um único valor da função f(x) ou y (também conhecido como *variável dependente*). Isto pode ser feito através de uma equação, um relacionamento gráfico, diagramas representando os dois conjuntos, uma regra de associação, uma tabela de correspondência. Cada par de elementos relacionados pela função determina um ponto nesta representação.

Figura 1: Representação de função por diagrama



Fonte: Barroso, matemática (ensino médio) 2010

Assim, uma função liga um domínio (conjunto de valores de entrada) com um segundo conjunto o contradomínio ou codomínio (conjunto de valores de saída) de tal forma que a cada elemento do domínio está associado exatamente um elemento do contradomínio. O conjunto dos elementos do contradomínio que são relacionados pela f a algum x do domínio, é o conjunto imagem ou chamado simplesmente imagem.

É importante observar que:

A notação $f : A \to B$ indica que a função *f* leva *A* para *B*, ou que *f* é uma aplicação de *A* em *B*, ou ainda que *f* é uma transformação de *A* em *B.*

Se *y* está definido em função de *x*, chamamos *x* de variável independente e *y* de variável dependente. Para indicar o valor que a função *f* assume para *x*, escrevemos *f*(*x*), lemos ”*f* de *x*”, ou simplesmente *y*. As funções podem ser definidas por uma lei matemática. Por exemplo, f : IR $\to$ IR tal que $f\ (x) = 3x$. Por essa lei entendemos que um número real *x* é transformado, pela função *f*, no triplo de *x*.

Existem inúmeros tipos de funções matemáticas, entre as principais temos: função sobrejetora, função injetora, função bijetora, função trigonométrica, Função linear, função modular, função quadrática, função exponencial, função logarítmica, função polinomial, dentre inúmeras outras. Cada função é definida por leis generalizadas e propriedades específicas.

2.1 Função polinomial

É uma função dada por um polinômio p(x) definida da seguinte maneira:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

em que ***n*** é um número inteiro não negativo e os números $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são constantes, chamadas de coeficientes do polinômio.

O grau de uma função polinomial corresponde ao valor de n, ou seja, do maior expoente da variável do polinômio $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Um exemplo flagrante da falta de objetividade (que persiste até hoje em quase todos os livros didáticos brasileiros) é a definição de função como um conjunto de pares ordenados. Função é um dos conceitos fundamentais da matemática (o outro é conjunto). Os usuários da Matemática e os próprios matemáticos costumam pensar numa função de modo dinâmico, em contraste com essa concepção estática.

Para um matemático, ou um usuário da Matemática, uma função **f : X → Y** , cujo o domínio é o conjunto **X** e contradomínio o conjunto **Y**, é uma correspondência (isto é, uma regra, um critério, um algoritmo ou uma série de instruções) que estabelece, sem exceções nem ambiguidade, para cada elemento **x** em **X**, sua imagem **f(x)** em **Y**.

2.1.1 Funções polinomiais de 1º grau

Chamaremos de função quadrática, ou função polinomial do primeiro grau, a função $f : IR \to IR$; $f(x) = ax + b$ com a e b números reais e $a \neq 0$, que associa a cada $x \in IR$ o valor $(ax + b) \in IR$.

2.1.2 Função Afim

Uma função $f: IR \to IR$ chama-se função afim quando existem dois números reais **a** e **b** tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in IR$ (PAIVA, 2010)

Exemplo 3.1

i) A função $f(x) = x + 4$ é uma função afim, com $a = 1$ e $b = 4$;

ii) A função $f(x) = -3x + 1$ é uma função afim, com $a = -3$ e $b = 1$;

iii) A função $f(x) = 7x$ é uma função afim, com $a = 7$ e $b = 0$;

2.1.3 Casos particulares de função afim

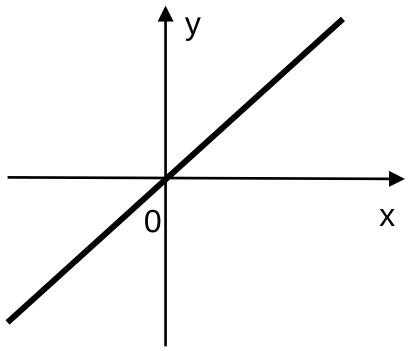
São funções específicas para as definições dos tipos de função afim.

2.1.4 Função identidade

É toda função $f : IR \to IR$ definida por $\mathbf{f(x) = x}$, para $x \in IR$ com $a = 1$ e $b = 0$. Recebe o nome de função identidade quando a cada elemento $x \in IR$ associa o próprio x.

O gráfico da função identidade é uma reta bissetriz do primeiro e terceiro quadrante (x = y), ou seja, a reta passa pela origem (0,0). Por essa mesma razão ele se parece com a função linear.

Figura 2: Uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano



Fonte: www.warlisson.com.br

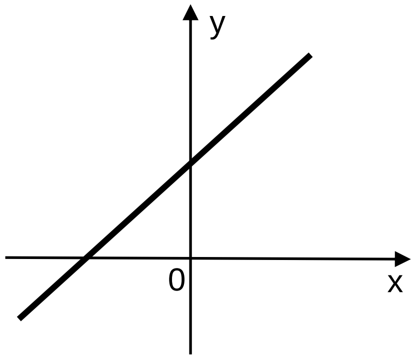
2.1.5 Função linear

É toda função f : IR $\rightarrow$ IR definida por **f(x) = ax**, para x $\in$ IR com a $\neq$ 0 e b = 0.

Essa função é o modelo matemático para a proporcionalidade. A proporcionalidade é provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios (LIMA et all, 2006).

O gráfico de uma função afim é uma reta não perpendicular ao eixo Ox.

Figura 3: Reta que representa uma função linear



Fonte: www.infoescola.com

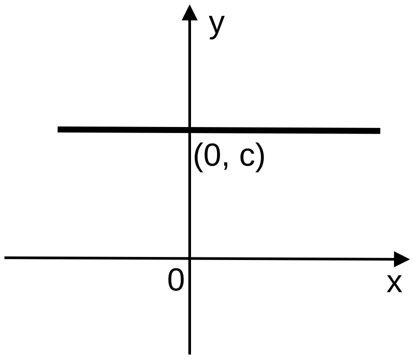
2.1.6 Função constante

É toda função f : IR $\rightarrow$ IR definida por **f(x) = b**, para x $\in$ IR com a = 0.

Recebe o nome de função constante quando a cada elemento $x \in IR$ associa sempre o mesmo elemento $c \in IR$.

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo dos x passando pelo ponto (0, c)

Figura 4: Uma reta que representa função constante



Fonte: www.alunosonline.com.br

2.2 Função quadrática

Nesse momento daremos uma definição para a função quadrática, porém é importante ressaltar que os alunos já trabalharam com alguns tipos de funções, ou seja, o conceito de função já foi definido, esperamos que de uma maneira clara e que eles não apresentem dificuldades, pois usaremos sempre que definirmos uma nova função, em nosso caso a função quadrática.

Chamaremos de função quadrática, ou função polinomial do segundo grau, a função $f : IR \to IR$; $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a; b e c números reais e $a \neq 0$, que associa a cada $x \in IR$ o valor $(ax^2 + bx + c) \in IR$.

Exemplos

i) A função $f(x) = x^2 – 3x + 7$ é uma função quadrática, com a = 1; b = – 3 e c = 7;

ii) A função $f(x) = – 9x^2 + 4x$ é uma função quadrática, com a = – 9; b = 4 e c = 0;

iii) A função $f(x) = 5x^2$ é uma função quadrática, com a = 5; b = 0 e c = 0;

iv) A função $f(x) = 2x – 17$ não é uma função quadrática, pois a = 0.

O fato do valor de a ser diferente de zero, garante que exemplos como o (iv), não sejam consideradas funções quadráticas, do contrário teríamos a função afim como um caso particular de função quadrática, o que de fato não é verdade.

2.2.1 Forma canônica da função quadrática

Escreveremos o trinômio $ax^2 + bx + c$, com a; b e c reais e $a \neq 0$, no que chamamos de forma canônica, que é uma expressão equivalente a inicial, porém que nos fornece várias informações. Para isso, utilizaremos a técnica de completar quadrado. Colocando **a** em evidência, temos

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

e completando quadrado

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Desta expressão, podemos escrever a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, de maneira equivalente:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

que é a chamada forma canônica da função quadrática.

Escrevendo a função nessa forma, podemos extrair várias informações a seu respeito, como veremos na próxima seção.

2.2.2 Estudando a forma canônica da função quadrática

Para iniciarmos um estudo analítico mais detalhado da função quadrática, transformando-a em outra forma mais conveniente.

5.2.1 Ponto de máximo e de mínimo

Com a função escrita na forma canônica, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, observamos que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre não negativo, ou seja, possui um valor mínimo que é zero, desse modo, se a é um número positivo, então, a função atinge um valor mínimo, que é $f(x) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, visto que a primeira parte terá um produto entre dois número no qual um deles é zero.

Note que a expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ só será zero quando $x = -\frac{b}{2a}$, ou seja, se a > 0 e $x = -\frac{b}{2a}$, então $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, ponto de mínimo da função.

De maneira análoga, se **a** é um número negativo, então o produto $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, é não positivo, visto que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, desse modo a função admite um valor máximo que é $f(x) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, e como já mencionamos o valor de x que torna a expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ igual a zero é $-\frac{b}{2a}$, assim $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ é o ponto de máximo da função, desde que se tenha a < 0.

Sendo assim, o par ordenado $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ é o ponto que otimiza a função, podendo ser de máximo ou de mínimo, dependendo exclusivamente do valor de ***a***.

- Se a > 0 a função admite um valor de mínimo;

- Se a < 0 a função admite um valor de máximo.

Desse modo, estando a função em sua forma canônica, determinar os ponto de máximo ou de mínimo, (dependendo do valor de a), é muito simples, vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo

Determine se a função f(x) = x^2 – 10x + 21, possui valor máximo ou mínimo, e em seguida determine as coordenadas desse ponto.

Solução

Escrevendo f(x) em sua forma canônica, temos:

$f(x) = (x - 5)^2 - 25 + 21 \Rightarrow f(x) = (x - 5)^2 - 4$, como a > 0 a função possui valor de mínimo, e o ponto de mínimo dessa função é o par ordenado (5; – 4).

Problema

Meu avô quer construir um terreno retangular dispondo de 28 m de cerca, utilizando um muro que faz divisa com seu terreno, de modo que a área seja a maior possível.

Solução

Considerando x o lado não paralelo ao muro, então o lado que é paralelo ao muro será (28 – 2x), dessa forma temos que a área (em m^2) é uma função do lado x, denotada por A(x) = x(28 – 2x), onde A(x) representa a área, em função de seu lado x. Assim, podemos escrever a expressão A(x) = x(28 – 2x), em sua forma canônica,

$$A(x) = -2x^2 + 28x \Rightarrow A(x) = -2(x - 7)^2 + 98;$$

logo sua área máxima será de 98 m^2 e será possível quando x = 7 m e o lado paralelo ao muro possuir o valor de 14 m.

Observação: Note que não faria sentido perguntar qual a menor área possível, uma vez que, a função não possui um valor de mínimo, ou seja, poderíamos diminuir a área até não existir mais um retângulo.

2.2.4 Zeros da função quadrática

Os zeros da função são os valores de x para os quais f(x) = 0. Assim determinar os zeros da função quadrática estando ela em sua forma canônica é muito simples, pois se f(x) = 0, então ficamos com a equação $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$, desenvolvendo a expressão encontramos a "famosa" fórmula[1] apresentada no ensino básico:

[1] Essa fórmula é conhecida como fórmula de Bháskara no ensino básico . . .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O termo $b^2 - 4ac$, representaremos, pela letra grega Δ (delta) será chamado de discriminante. Veremos adiante, que a partir de seu valor é possível detalhar como se comportam as raízes de uma equação quadrática.

Desse modo, a equação pode ser representada de maneira equivalente por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.:$$

Defendemos que essa fórmula não seja apresentada para os alunos, pelo menos não no primeiro momento, visto que completando quadrado, conseguimos encontrar os valores de x, tais que f(x) = 0. Então determinar os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, que dará como resultado a fórmula resolutiva, pode ser deixada como uma tarefa. Depois de habituados com a técnica de completar quadrado os alunos não apresentarão dificuldades de encontrar o resultado. Fazendo, assim, sentido a sua utilização posteriormente.

2.2.5 Analisando a influência do discriminante (Δ) nas raízes

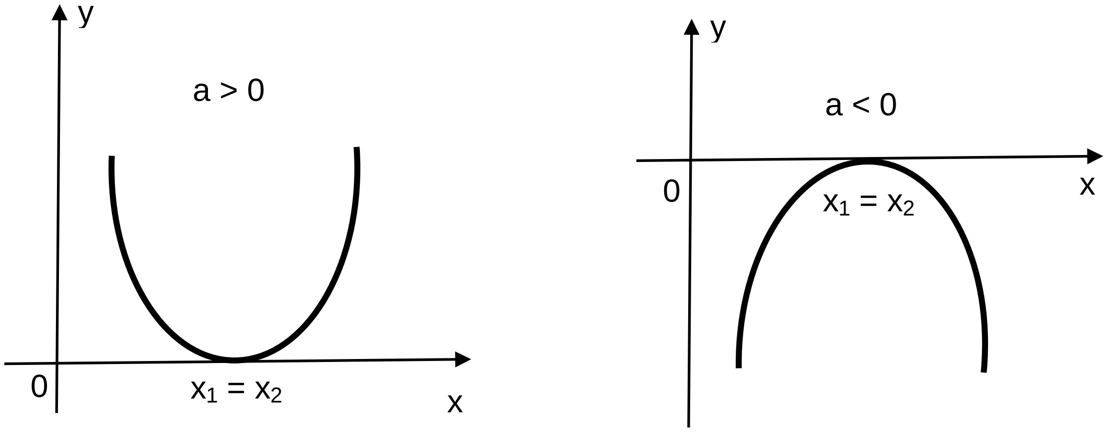
Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$, concluímos que:

- Se $\Delta \geq 0$, então a função possui zeros reais;
- Caso contrário a função não possui zeros reais.

Quando estivermos nos referindo aos valores de x que resolvem a equação $ax^2 + bx + c = 0$, diremos que esses valores são as raízes da equação. Deixaremos o termo zeros só para os valores de x tais que f(x) = 0, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Como aconselha CORDEIRO, (2009) .

Observação 1: No caso de Δ = 0, um único ponto será zero da função. De fato, se Δ = 0, então $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, portanto $x = -\frac{b}{2a}$, único valor possível para x.

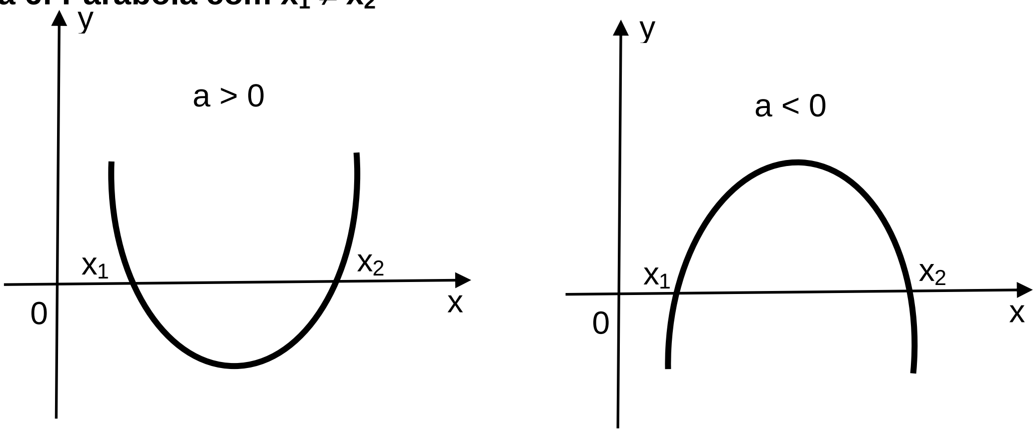
Figura 5: Parábola com $x_1 = x_2$



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

Observação 2: No caso de $\Delta > 0$, dois pontos serão zeros da função. De fato, se $\Delta > 0$, então $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$, portanto $x = \pm \frac{b}{2a}$, dois valores possíveis para x.

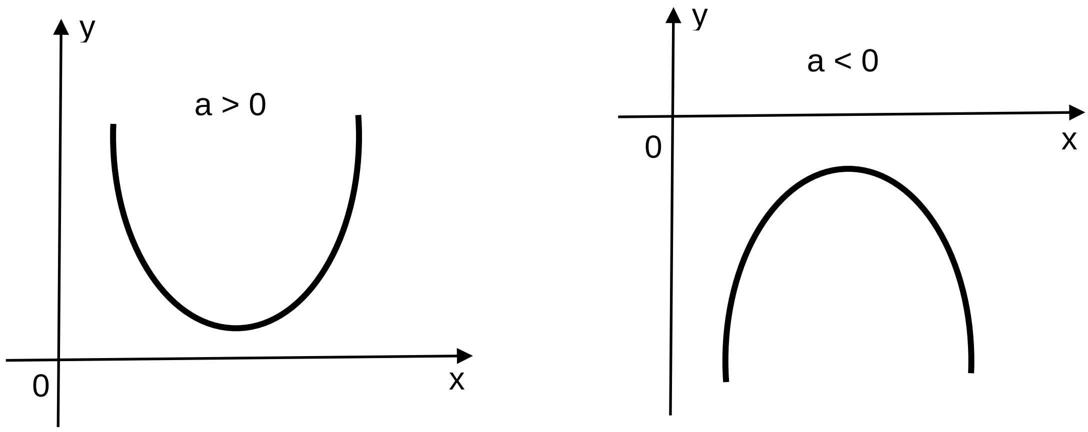
Figura 6: Parábola com $x_1 \neq x_2$



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

Observação 3: Sabemos que se o valor de Δ é negativo, então a equação do segundo grau não tem solução no conjunto dos números reais, devido a isso, alguns alunos são levados a crer que a função quadrática não existe quando Δ assume esses valores. É importante deixar claro o que realmente ocorre, ou seja, que a função apenas não possui zeros reais, consequentemente seu gráfico não toca o eixo das abscissas.

Figura 7: Parábola em que não existe x_1 e $x_2 \in$ IR



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

2.2.6 Soma e produto das raízes

De posse da fórmula resolutiva para encontrar as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, podemos determinar as expressões para a soma e o produto dessas raízes.

Com efeito, chamando as raízes da equação de x_1 e x_2, sem perca de generalidade, diremos que, $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Denominando s como a soma das raízes $x_1 + x_2$, então:

$$s = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dessa soma temos que $s = -\dfrac{2b}{2a}$, portanto:

$$s = -\frac{b}{a}$$

Para o produto das raízes, procederemos de maneira análoga. Chamaremos de p o produto das raízes $x_1 . x_2$, dessa maneira:

$$p = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Desse produto, temos

$$p = (-1)\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\cdot\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2},$$

e então

$$p = (-1)\left(\frac{-b^2+b^2-4ac}{4a^2}\right),$$

Logo

$$p = \frac{c}{a}$$

Assim, ficam determinadas as expressões que nos fornecem a soma e o produto das raízes, dependendo apenas de seus coeficientes. Observe que ao colocarmos a em evidência na equação $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$, ficamos com $a\left(x^2-sx+p\right)=0$; que mostra explicitamente os valores para a soma e o produto das raízes.

Vale salientar que existem outras maneiras de encontrar esses valores para a soma
e o produto das raízes de uma equação do segundo grau. Acreditamos que a forma como procedemos é bem natural, tendo em vista que as expressões para x_1 e x_2 estão bem determinadas, sendo necessário apenas manipula-las algebricamente para chegar o resultado que se deseja.

Infelizmente, ainda encontramos professores e livros do ensino médio que insistem em não mostrar como chegar a essas fórmulas, mesmo não apresentando tantas dificuldades, como vimos.

É comum apresentarem as expressões, sem nenhuma justificativa, e em seguida resolver alguns exemplos. Com isso buscam convencer os ouvintes e leitores que realmente funcionam.

Para os alunos, fica a sensação de que provar a veracidade do que foi afirmado é fora da realidade de seus conhecimentos, como eu pensava quando meu professor me apresentou, no entanto é um ótimo exercício para eles trabalharem, e verem que não é necessário nada além do conhecimento que já possuem, quebrando assim, esse paradigma existente e facilitando a compreensão do conteúdo.

2.3 Gráfico

No ensino de funções quadráticas é comum o professor construir uma tabela com alguns valores para x, já pré determinados pelo mesmo, e encontrar os valores correspondentes para f(x), em seguida a célebre frase “vejam esse gráfico representa uma parábola”. Note que até o devido momento os alunos ainda não tiveram contato com tal objeto, ou seja, para eles a definição que ficará de parábola será:

“Parábola é o gráfico de uma função quadrática”.

O fato de construir uma tabela com alguns valores é interessante, para os alunos observarem que o gráfico não é uma curva tão simples como uma reta, que estudaram na função afim, porém não devemos afirmar que figura é essa, visto que ainda não foi definida. Observa-se ainda que para os alunos é natural ligar os pontos como se fossem segmentos de reta, pois não têm noção de como se comporta o gráfico da função estudada.

2.3.1 Parábola

Definiremos, inicialmente, o que é uma parábola antes de mostrar que o gráfico da função quadrática é representado por essa curva.

Dada uma reta **d**, chamada de diretriz, e um ponto **F**, que não pertence a reta dada, chamada de foco. Denomina-se parábola o conjunto de pontos do plano, que equidistam do foco **F** e da diretriz **d**.

Na figura 5 podemos observar a parábola de foco **F** e diretriz **d**, e seu formato peculiar, que realmente é semelhante aos pontos plotados no gráfico de uma função quadrática qualquer, contudo não podemos afirmar, ainda, que o seu gráfico seja uma parábola.

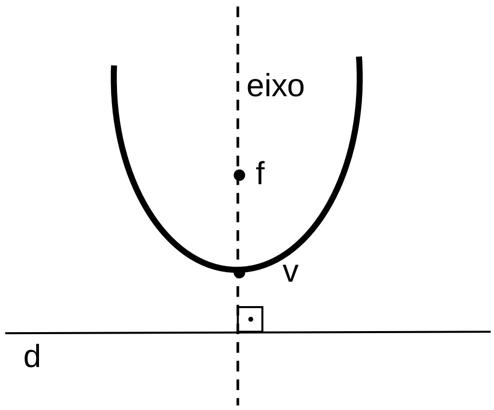
A reta perpendicular à diretriz, passando por **F**, será chamada de eixo da parábola, e o ponto **V**, que é o ponto médio do segmento com extremidades em **F** e na intersecção da diretriz com o eixo, será chamado de vértice.

Mostraremos que o gráfico de uma função polinomial do segundo grau é uma parábola.

Para isso começaremos com os casos mais simples, ou seja, quando a função for do tipo $f(x) = ax^2$.

De fato, sem perca de generalidade, considere que o vértice **V** da parábola coincide com a origem do plano cartesiano, e que o foco é o ponto F(0; p), dessa forma a diretriz **d** será a reta y = – p. Considere P(x; y) um ponto qualquer da parábola, definida pelo ponto **F** e pela diretriz **d**.

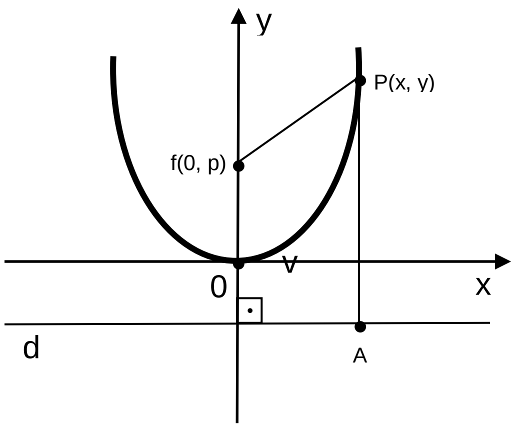
Figura 8: Parábola com foco F e diretriz d



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

Sabendo que **P** pertence a parábola, então **P** é equidistante de **F** e de **d**. Assim, $\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p$, onde o primeiro membro da equação representa a distância entre os pontos **P** e **F**, enquanto o segundo membro representa a distância entre o ponto **P** e a diretriz **d**. Conforme a figura 9

Figura 9: Representação da distância do foco F e o ponto P



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

Da expressão $\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p$, temos

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2,$$

manipulando algebricamente, ficamos com

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2,$$

anulando alguns termos semelhantes, segue que

$$4py = x^2,$$

e isolando y, resulta

$$y = \frac{x^2}{4p}$$

Logo a parábola de foco F(0; p) e diretriz d : y = – p, possui equação $y = \frac{x^2}{4p}$,

ou seja, $y = \frac{1}{4p} \Rightarrow p = \frac{1}{4a}$.

Assim, o gráfico da função polinomial do segundo grau f(x) = ax^2 é uma parábola de foco $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz d : $y = -\frac{1}{4a}$.

2.3.2 Translações do gráfico de uma função

Considere uma função g : IR $\rightarrow$ IR e um número real v. Se definirmos a função f, tal que f(x) = g(x) + v, então o gráfico da função g é o mesmo da função f, transladado verticalmente v unidades acima ou abaixo, à medida que v é positivo ou negativo.

Tomando h $\in$ IR, e definindo a função f como, f(x) = g(x – h). O gráfico da função f é obtido a partir de g, deslocando-o horizontalmente h unidades, para a direita ou para esquerda, conforme h > 0 ou h < 0.

Para mostrar que o gráfico de qualquer função quadrática é uma parábola, vamos realizar translações verticais e horizontais partindo do gráfico da função g(x) = ax^2, que já mostramos ser uma parábola de foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz d: $y = -\frac{1}{4a}$.

Apesar de não ser comum no ensino básico, acreditamos que estudar translações de gráficos facilita na percepção do comportamento das funções, já que a partir de casos elementares, conseguimos construir gráficos não tão simples. Nos baseando nas propriedades conhecidas de funções mais básicas.

2.3.3 Translação vertical

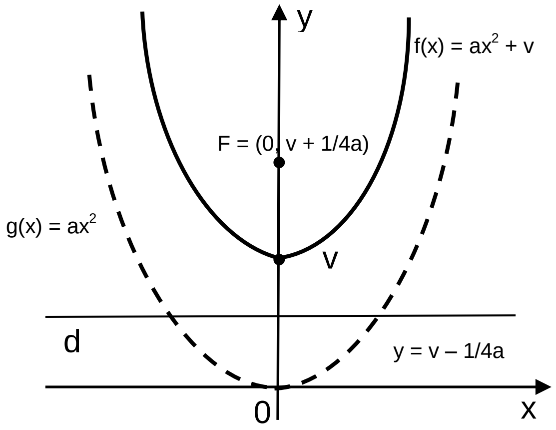
O gráfico da função f(x) = ax^2 + v, onde a; v $\in$ IR e a $\neq$ 0 é uma parábola de foco $F = \left(0, v + \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = v - \frac{1}{4a}$.

Com efeito, sabendo que o gráfico da função g(x) = ax^2 é uma parábola, de foco $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = -\frac{1}{4a}$, então podemos escrever que f(x) = g(x) + v, ou seja, a função f é uma translação vertical da função g, figura 7.

Nesse momento seria interessante o uso de um software de geometria dinâmica, para mostrar a translação da função, permitindo uma melhor visualização para os alunos.

Aconselhamos o uso do software geogebra, distribuído gratuitamente na internet através do endereço eletrônico (www.geogebra.com.br).

Figura 10: Translação vertical da parábola ax^2

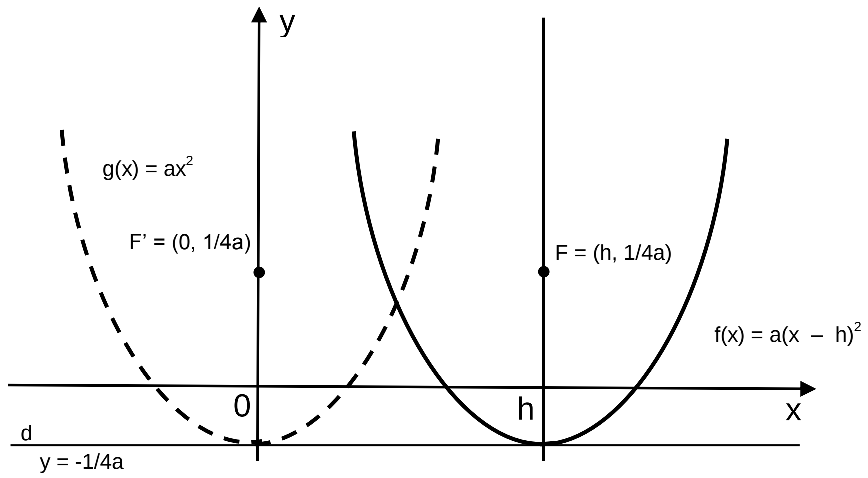


Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

2.3.4 Translação horizontal

De maneira análoga a translação vertical, trabalharemos com a translação horizontal. Considere a função $f(x) = a(x - h)^2$ com a e h $\in$ IR e $a \neq 0$, que representa a translação horizontal da função $g(x) = ax^2$, ou seja, $f(x) = g(x - h)$. Figura 11.

Figura 11: Translação horizontal da parábola ax^2



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

Novamente o uso do software (geogebra) é interessante para uma melhor visualização do deslocamento do gráfico, e dará aos alunos uma segurança maior ao trabalhar translações de gráficos, ajudando de forma intuitiva na construção.

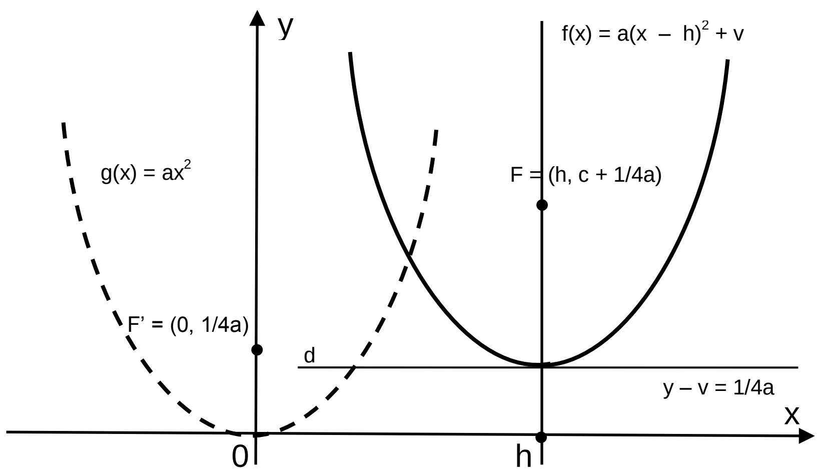
Vale salientar que os softwares dinâmicos, de uma maneira geral, são ferramentas que auxiliam na construção de gráficos e visualização de figuras planas, porém essas construções não provam a veracidade das afirmações envolvidas, ou seja, de forma alguma substituem a demonstração precisa, que é necessária para comprovar o que se deseja. Por exemplo, para mostrar que o gráfico de uma função polinomial do segundo grau é uma parábola não basta fazer inúmeros exemplos no software e em seguida concluir tal fato. A demonstração deve ser feita independentemente da quantidade de casos particulares observados.

Assim, ao transladarmos horizontalmente e verticalmente a função $g(x) = ax^2$, teremos a função $f(x) = a(x - h)^2 + v$, que possui foco $F = \left(h, v + \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = v - \frac{1}{4a}$, visto que o foco da função g deslocou-se h horizontalmente e v verticalmente, enquanto a diretriz se deslocou v verticalmente, pois não sofre deslocamento horizontal.

2.3.5 Gráfico da função quadrática

Como visto o gráfico da função f(x) = a(x – h)^2 + v é uma parábola de foco $F = \left(h, v + \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = v - \frac{1}{4a}$. Comparando a função com a forma canônica, podemos dizer que $h = -\frac{b}{2a}$ e $v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, ou seja, o gráfico de qualquer função polinomial do segundo grau é uma parábola, com foco $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$ e diretriz $v = -\frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$. Conforme a figura 4.5.

Figura 12: Gráfico da função f(x) = a(x – h)^2 + v



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

2.3.6 Eixo de simetria da parábola

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ f(x), tomemos $x_1 \neq x_2$, com x_1 e x_2 reais, tais que $f(x_1) = f(x_2)$.

Desse modo, como $f(x_1) = f(x_2)$, então

$$ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c,$$

cancelando c nos dois membros

$$ax_1^2 + bx_1 = ax_2^2 + bx_2,$$

e agrupando os termo de maneira conveniente no primeiro membro

$$ax_1^2 - ax_2^2 + bx_1 - bx_2 = 0,$$

do agrupamento, evidenciamos a e b

$$a\left(x_1^2 - x_2^2\right) + b\left(x_1 - x_2\right) = 0,$$

fatorando a diferença $\left(x_1^2 - x_2^2\right)$

$$a\left(x_1 + x_2\right)\left(x_1 - x_2\right) + b\left(x_1 - x_2\right) = 0,$$

evidenciando o fator comum $\left(x_1 - x_2\right)$

$$\left(x_1 - x_2\right)\left[a\left(x_1 + x_2\right) + b\right] = 0.$$

Como estamos supondo $x_1 \neq x_2$, então

$$a\left(x_1 + x_2\right) + b = 0,$$

segue que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

ou seja

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Isso significa que todos os pontos x_1 e x_2 distintos, tais que $f(x_1) = f(x_2)$, são simétricos em relação a reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$. Essa reta vertical é chamada de eixo de simetria da parábola.

2.3.7 Concavidade da parábola

A concavidade (abertura) da parábola pode ser tanto para cima, como para baixo, dependendo exclusivamente do valor de a, pois se a > 0 a função atinge seu valor mínimo, que é o mais próximo da diretriz, logo a concavidade é voltada para cima. De maneira análoga se a < 0 a função atinge seu valor máximo e a concavidade é voltada para baixo.

Esse ponto de máximo ou de mínimo, que é o ponto, da parábola, mais próximo da diretriz é o que chamamos de vértice e possui coordenadas $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

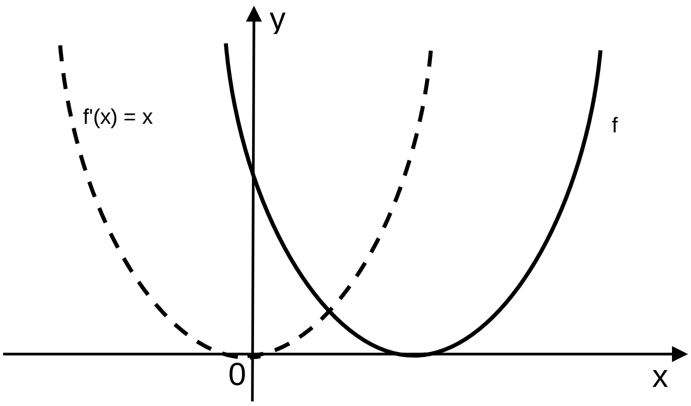
Exemplo Vamos construir o gráfico de cada uma das funções que seguem:

- $f(x) = x^2 - 2x + 1$
- $g(x) = -2x^2 + 5x - 8$

Solução

Primeiramente escreveremos a função em sua forma canônica, para facilitar nossos cálculos. Para f temos: $f(x) = x^2 - 2x + 1$, que pode ser escrita de maneira equivalente $f(x) = (x - 1)^2$, o gráfico dessa função possui apenas deslocamento horizontal comparando com a função $f'(x) = x^2$.

Figura 13: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

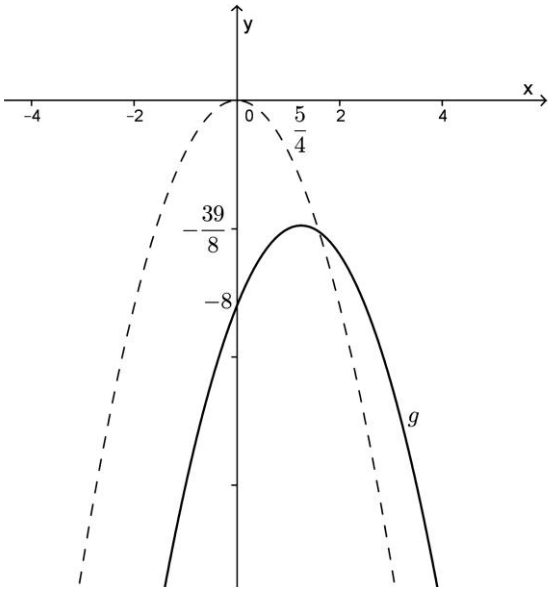
Para a função g seguiremos o mesmo raciocínio, vamos colocar a função em sua forma canônica e em seguida construir seu gráfico. Assim, $g(x) = -2x^2 + 5x - 8$, pode ser escrita de forma equivalente a $g(x) = -2\left(x - \dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{39}{8}$. Desse modo o gráfico da função g pode ser feito a partir do gráfico da função $g'(x) = -2x^2$, ou seja, temos que função g' transladou-se horizontalmente e verticalmente a partir da função g', como mostra o gráfico da figura 13.

Por fim construiremos o gráfico da função $h(x) = x^2 - 8x + 12$, que passando para a forma canônica, fica $h(x) = (x - 4)^2 - 4$, comparando com o gráfico da função $h'(x) = x^2$, podemos esboçar do gráfico da função h de maneira simples, veja:

O uso da forma canônica é de suma importância para o esboço do gráfico de uma função quadrática. Uma vez que, basta tomar uma função do tipo $f(x) = ax^2$ e a partir dela realizar as translações necessárias, que fica evidente, quando ela está em sua forma canônica.

Analisando o gráfico podemos extrair várias informações a respeito da função. No que diz respeito aos zeros temos:

Figura 14: Gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 5x - 8$



Fonte: O autor, usando o software geogebra

- O gráfico toca o eixo das abscissas em dois ponto distintos, quando a função possui zeros diferentes;
- O gráfico toca o eixo x num único ponto, quando a função possui zeros iguais;
- Se a função não possui zeros reais, então o gráfico não toca o eixo das abscissas.

Outra situação importante, que pode ser analisada observando o gráfico, é o estudo dos sinais que a função pode assumir. Ou seja, para que valores de x ela é positiva ou negativa. Veremos com mais detalhes no capítulo seguinte.

2.3.8 Estudo do sinal da função quadrática

Esse estudo permite avaliar para que valores de x a função admite valores positivos ou negativos, no eixo horizontal.

2.3.9 Estudando o sinal graficamente

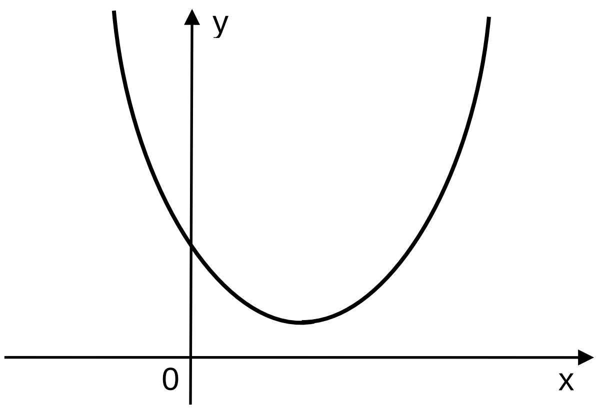
Como dissemos anteriormente ao se analisar o gráfico da função, podemos afirmar para que valores de x, ela assume valores positivos ou negativos.

Ao se esboçar o gráfico da função temos três casos a analisar, conforme $a > 0$ e $a < 0$.

Se $a > 0$ a concavidade da parábola é voltada para cima, como já vimos, neste caso podemos ter que:

- A parábola não toca o eixo x, ($\Delta < 0$), dessa forma a função só assume valores positivos para todo $x \in IR$.

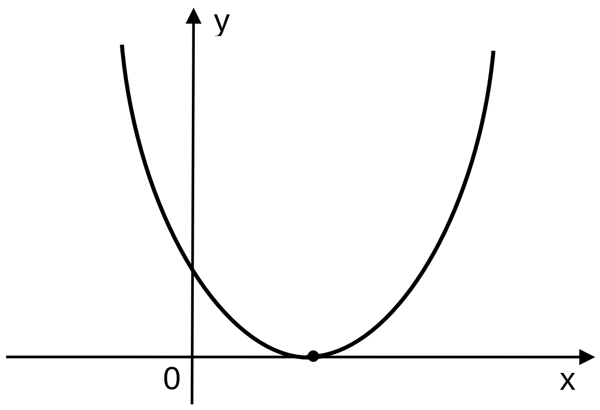
Figura 15: Função quadrática com $a > 0$ e $\Delta < 0$



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

- A parábola toca no eixo x em apenas um ponto, ($\Delta = 0$), neste caso a função será zero quando x for raiz da equação, e será positiva para qualquer outro valor de x.

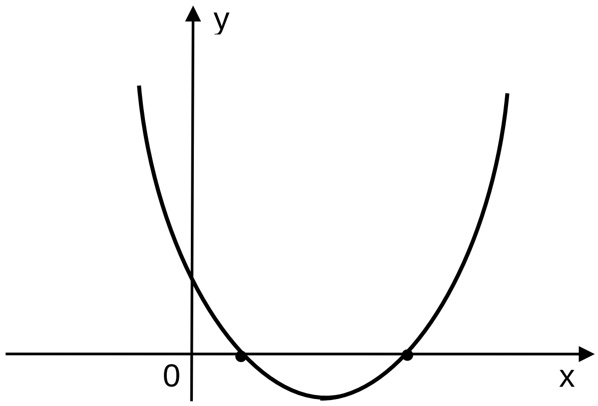
Figura 16: Função quadrática com a > 0 e Δ = 0



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

- A parábola corta o eixo x em dois pontos distintos, ($\Delta > 0$), este é o caso mais interessante a ser considerado, pois requer uma análise mais detalhada a respeito do gráfico. Como $\Delta > 0$, então a função possui dois zeros reais diferentes, considerando que α e β são as raízes da equação e que $\alpha < \beta$, então a função será positiva quando $x < \alpha$ ou $x > \beta$ e será negativa quando $\alpha < x < \beta$.

Figura 17: Função quadrática com a > 0 e Δ > 0

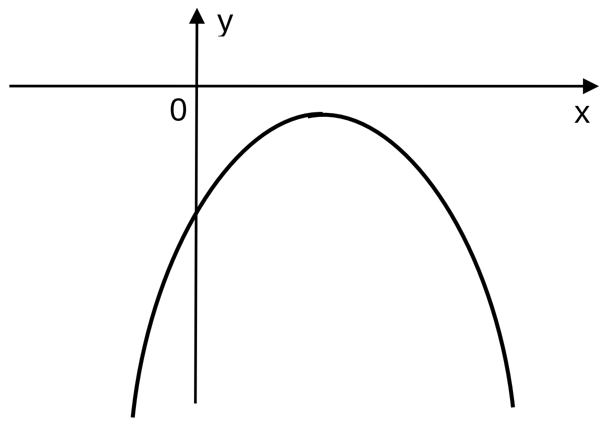


Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

Sendo a concavidade da parábola voltada para baixo ($a < 0$), temos mais três situações a considerar.

- O gráfico não toca no eixo x, ($\Delta < 0$), neste caso a função é negativa para todo $x \in$ IR:

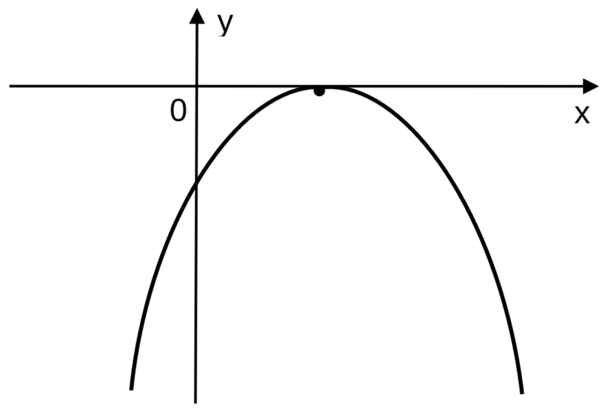
Figura 18: Função quadrática com a < 0 e Δ < 0



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

- A parábola toca no eixo x em um único ponto, ($\Delta = 0$), neste caso a função é zero quando x for raiz da equação, e será negativa para qualquer outro valor de x.

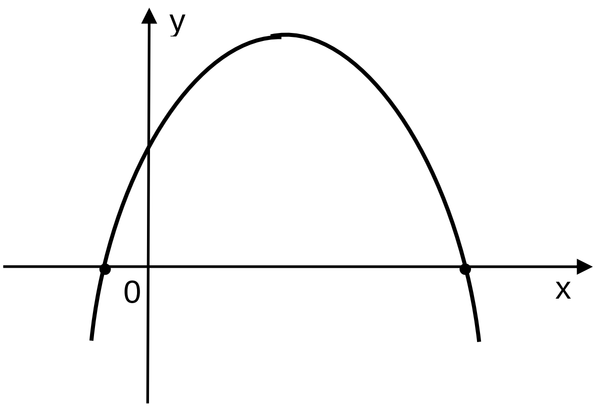
Figura 19: Função quadrática com a < 0 e Δ = 0



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

- Por fim o caso mais interessante, quando a parábola corta o eixo x em dois pontos distintos, ($\Delta > 0$). Consequentemente a equação possui duas raízes reais e diferentes, digamos α e β, com $\alpha < \beta$, então a função será positiva quando $\alpha < x < \beta$ e será negativa quando $x < \alpha$ ou $x > \beta$.

Figura 20: Função quadrática com a < 0 e Δ > 0



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

Exemplo Estudar os sinais das funções abaixo:

Como vimos a construção do gráfico auxilia na visualização dos sinais que uma função quadrática pode assumir, tornando o conteúdo mais palpável e dando ao aluno uma maneira confiável de interpretar os valores que uma função pode ter, o auxiliando na assimilação do assunto.

É importante observar que o estudo dos sinais de uma função quadrática pode ser feito de maneira algébrica através da função f(x) = ax^2 + bx + c, disposta convenientemente, como veremos a seguir.

2.3.10 Forma fatorada

Considerando α e β reais, como as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, caso a equação possua raízes reais.

Colocando a em evidência na função f(x) = ax^2 + bx + c, temos $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

Sabendo que a soma das raízes de uma equação do segundo grau é dado por $-\frac{b}{a}$ e que o produto é dado por $\frac{c}{a}$, então escreveremos a função f da seguinte maneira:

$$f(x) = a\left[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\right]$$

De maneira equivalente

$$f(x) = a\left[x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta\right].$$

Daí

$$f(x) = a\left[x(x-a) - \beta(x-\alpha)\right],$$

donde concluímos que

$$f(x) = a\left[(x-\alpha)(x-\beta)\right].$$

A função polinomial do segundo grau escrita na forma $f(x) = a\left[(x-\alpha)(x-\beta)\right]$, é a chamada forma fatorada. Com a função nesse formato podemos deduzir os sinais que ela assume para os variados valores de x de maneira simples.

Além disso, nessa forma fica explícito que α e β são os valores de x que a anulam, ou seja, são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ que é equivalente ao segundo membro de nossa função em sua forma fatorada.

Sem perca de generalidade, vamos supor que α seja menor que β, desse modo quando $\alpha < x < \beta$ o produto $(x - \alpha)(x - \beta)$ é negativo, então o sinal da função será contrário ao sinal de a.

Quando x é maior que β ou menor que α, então o produto $(x - \alpha)(x - \beta)$ é positivo, logo a função terá o mesmo sinal de a.

Caso α seja igual a β, então podemos escrever que $f(x) = a(x - \alpha)^2$, neste caso a função se anula para $x = \alpha$ apenas, e terá o mesmo sinal de a, para os demais valores reais de x, visto que $(x - \alpha)^2$ é positivo.

No caso de a função não possuir raízes, então não podemos escrevê-la em sua forma fatorada, porém o estudo de seus sinais pode ser analisado através do valor de máximo ou de mínimo que a função assume.

Sabemos que, se $a > 0$ a função possui valor de mínimo, dado por $-\dfrac{\Delta}{4a}$, mas a função não admite raízes, isso significa que $\Delta < 0$, desse modo a expressão $-\dfrac{\Delta}{4a}$ será positiva, entretanto esse valor é o menor que a função assume, logo a função será sempre positiva para todo $x \in IR$.

De maneira análoga, se a < 0 a função possui valor de máximo, dado por $-\dfrac{\Delta}{4a}$, como $\Delta < 0$, então a expressão $-\dfrac{\Delta}{4a}$ será, também, negativa. Mas esse valor é o maior que a função assume, portanto a função será sempre negativa, para todo $x \in IR$.

3 UM POUCO DE CINEMÁTICA

É a parte da mecânica (ramo da física) que descreve os movimentos, procurando determinar a posição, a velocidade e a aceleração de um corpo em cada instante (RAMALHO et all, 2009).

Na tentativa de compreender as causas que produzem e modificam os movimentos, depois de 1586, Galileu Galilei começou a estudar o assunto, até então quase todos os filósofos aceitavam o pensamento de Aristóteles: a velocidade durante a queda de um corpo sobre a superfície da terra é diretamente proporcional ao peso do corpo. Porém, Galileu não concordava com essa teoria e demonstrou que a queda dos objetos leves (como plumas , folhas , flocos de neve) é sustentada pela resistência do ar o que faz com que eles caiam mais lentamente quando comparado com objetos mais pesados.

Galileu afirmou também que na ausência do ar todos os corpos , quando abandonados do repouso no mesmo nível , caem com a mesma velocidade, chegando juntos ao chão (como um caminhão e um livro por exemplo).

Fundamentalmente, o conceito de mecânica é o de movimento, ou seja, o estudo da mudança nas posições dos corpos ao longo do tempo.

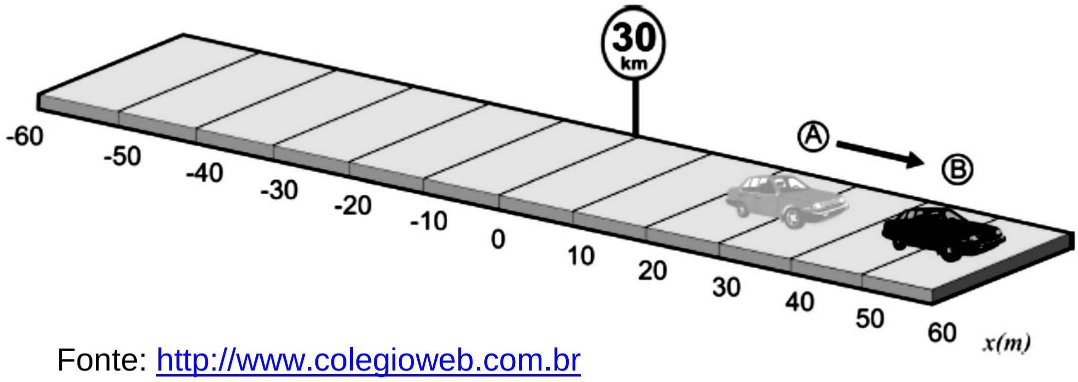
O objetivo da cinemática é descrever como se processam os movimentos, isto é, estabelecer as posições que os corpos ocupam ao longo do tempo e as respectivas velocidades, independentemente das causas desses movimentos.

Um corpo estará em movimento sempre que mudar de posição, no decorrer do tempo, em relação a um referencial adotado; e em repouso, sempre que sua posição se mantiver a mesma (constante) no decorrer do tempo em relação ao referencial que foi adotado.

3.1 Velocidade média

Considere uma partícula que pode mover-se apenas ao longo de uma reta. Tal movimento é dito retilíneo ou unidimensional.

Figura 21: Carro se desloca de (A) para (B).



Fonte: http://www.colegioweb.com.br

Podemos observar que um veículo parte de A e depois de um certo tempo, o veículo parou em B. Vamos dizer que em A o instante é t_1 e que em B o instante seja t_2.

A duração deste intervalo é dada por

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Considerando a figura acima, se tomarmos a placa acima como referencial, de onde medimos a posição do carro, em (A) o carro estava a 30 m a direita da placa, ou seja, a posição do carro em (A) é dada por $s(t_1) = 30$ m. Analogamente, em (B), a posição do carro é dada por $s(t_2) = 50$ m.

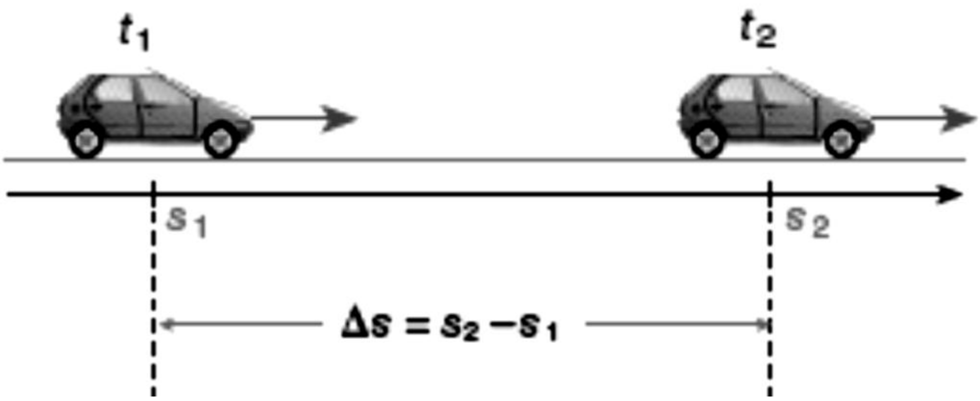
O deslocamento da partícula é dado por

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

A velocidade média é a razão entre o espaço percorrido (deslocamento) e o tempo que levou para percorrê-lo.

O conceito formal de velocidade é: a taxa de variação do espaço numa unidade de tempo.

Figura 22: Veículo se deslocando da posição s_1 para s_2



Fonte: RAMALHO et al, 2010

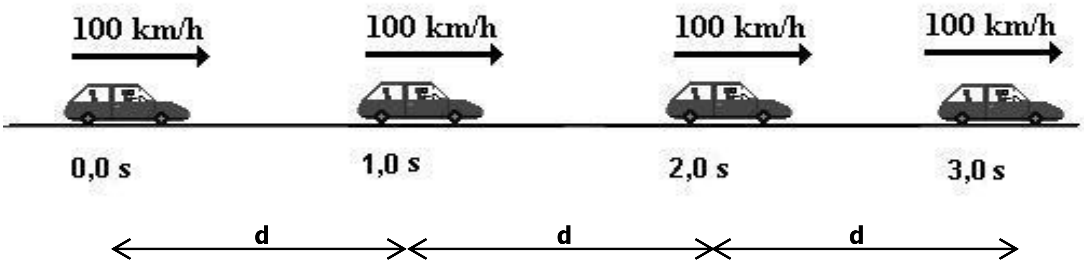
$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}\ , \text{onde} \begin{cases} \Delta s = s - s_o \\ \Delta t = t - t_o \end{cases}$$

3.2 Movimento uniforme (M.U.)

É quando a velocidade escalar do móvel é constante em qualquer instante, significando que, o móvel percorre distâncias iguais em tempos iguais, ou seja, não importa as causas do movimento, como se iniciou ou como terminou, analisaremos apenas o trecho onde a velocidade não varia com o tempo.

• Características do M.U. $\begin{cases} v \rightarrow \text{constante e diferente de zero} \\ a \rightarrow \text{aceleração nula} \end{cases}$

Figura 23 - Movimento do carro



Fonte: http://www.Educar.sc.usp.br

3.2.1 Movimento retilíneo e uniforme (M.R.U.)

É quando o móvel percorre uma trajetória retilínea e apresenta velocidade escalar constante.

3.2.2 Função Horária

No movimento uniforme temos que a velocidade escalar é constante e coincide com a velocidade escalar média em qualquer instante ou intervalo de tempo. É uma função dada pelo polinômio:

$$s = f(t),\ s = s_o + v \cdot t,\ \text{onde} \begin{cases} s \rightarrow \text{espaço final} \\ s_o \rightarrow \text{espaço inicial} \\ v \rightarrow \text{velocidade constante} \\ t \rightarrow \text{tempo} \end{cases}$$

Demonstração:

Considerando a equação $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, *onde* $\begin{cases} \Delta s = s - s_o \\ \Delta t = t - t_o \end{cases}$ e substituído Δs e Δt na equação da velocidade descrita acima, temos:

$$v = \frac{s - s_o}{t - t_o}$$

Considerando o tempo inicial igual a zero, $t_o = 0$, temos a função horária do movimento uniforme.

$$v = \frac{s - s_o}{t}$$

Isolando o espaço final (s) na equação:

$$s - s_o = v \cdot t$$

temos que:

$$s = s_o + v \cdot t$$

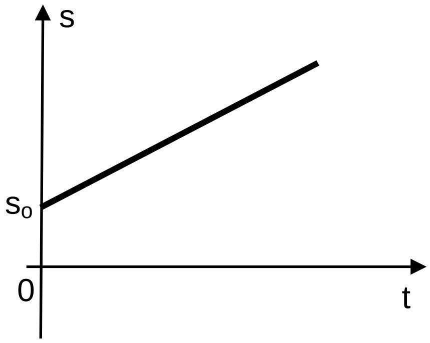
v ≠ 0 (função horária do espaço no MU)

3.2.3 Gráficos do movimento uniforme

A função horária s = f(t), s = s_o + v.t, é uma função do 1º grau em t do tipo y = ax + b. Uma função de 1º grau é representada graficamente por uma reta, no sistema de coordenadas cartesianas, em relação ao eixo dos tempos.

Para a velocidade positiva (v > 0), a função é crescente, assim o gráfico da função pode ser:

Figura 24 – Função Crescente para o espaço

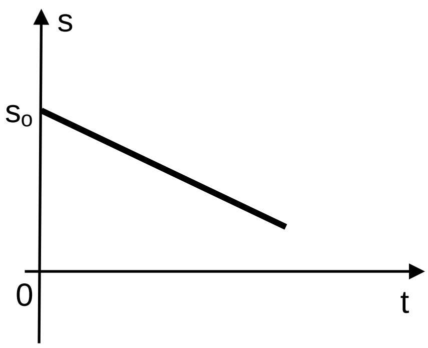


Fonte: http://**www.alunosonline.com.br**

Note que o gráfico da função é uma reta crescente, portanto, o movimento é progressivo, ou seja, o móvel caminha na mesma direção e sentido da orientação da trajetória.

Para a velocidade negativa ($v < 0$), a função é decrescente, assim o gráfico da função pode ser:

Figura 25 – Função Decrescente para o espaço



Fonte: http://**www.alunosonline.com.br**

Note que o gráfico da função é uma reta decrescente, portanto, o movimento é retrógrado, ou seja, o móvel caminha na mesma direção e sentido oposto ao da orientação da trajetória.

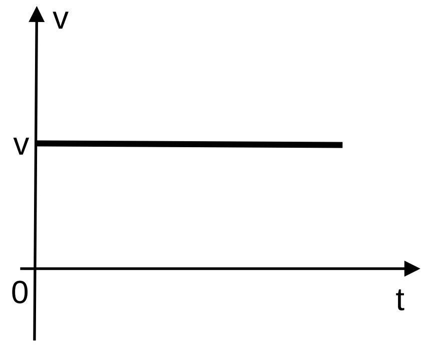
OBS: O aluno não deve confundir gráfico com trajetória.

3.2.4 Gráficos da velocidade

Como a velocidade escalar do movimento uniforme é constante, os gráficos podem ser:

Para a velocidade positiva (v > 0), a função é constante e o gráfico da velocidade é acima do eixo do tempo.

Figura 26 – Função constante para a velocidade com v > 0

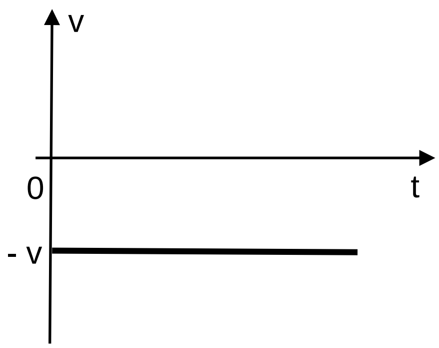


Fonte: http://www.alunosonline.com.br

Note que o gráfico da velocidade é uma reta paralela ao eixo dos tempos, para v = f(t). Essa função é uma função constante.

Para a velocidade negativa (v < 0), a função é constante e o gráfico da velocidade é abaixo do eixo do tempo.

Figura 27 – Função constante para a velocidade com v < 0

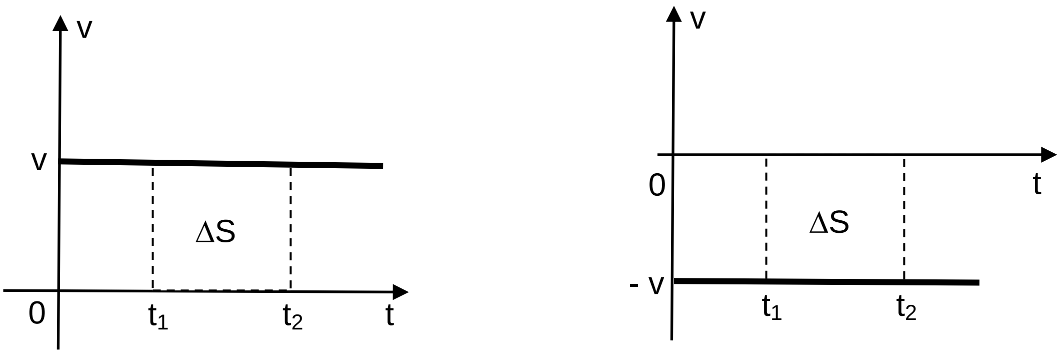


Fonte: http://www.alunosonline.com.br

Nota: Os gráficos não determinam a trajetória, apenas representam as funções do movimento.

OBS: A área formada pelo gráfico de v = f(t) é numericamente igual ao espaço percorrido pelo móvel.

Figura 28 – Gráficos para cálculo de área

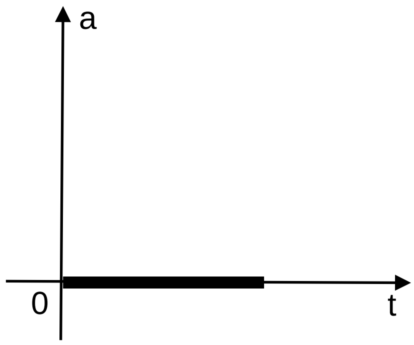


Fonte: http://www.alunosonline.com.br

3.2.5 Gráfico da aceleração

Como a velocidade escalar do movimento uniforme é nula (a = 0), o gráfico da aceleração é uma reta que coincide com o eixo dos tempos.

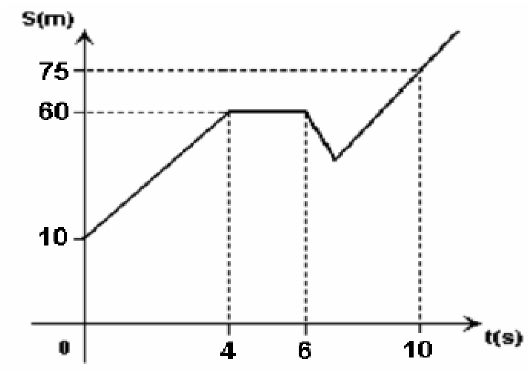
Figura 29 – Gráficos para aceleração nula



Fonte: http://www.alunosonline.com.br

Exemplos de interpretação de gráficos

Figura 30 – Desenvolvimento de um móvel no M.U.



Fonte: Vestibular Ufersa 2006.1

I. Entre t = 0 e t = 4 s um móvel se deslocou com uma velocidade média de 12,5m/s.

$$\text{se } s = s_o + v \cdot t, \text{ então:}$$

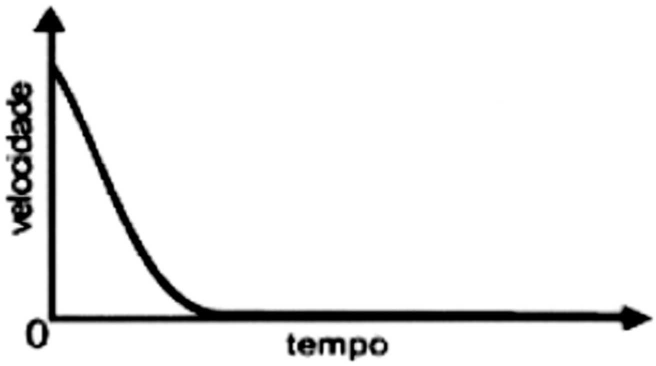
$$60 = 10 + v \cdot 4 \Rightarrow 4 \cdot v = 50 \therefore v = \frac{50}{4} = 12{,}5 \text{ m/s}$$

II. Entre t = 4 s e t = 6 s o móvel permaneceu parado.

IV. Logo após t = 6 s o móvel voltou alguns metros para depois continuar avançando em seu movimento progressivo.

O gráfico mostra como varia a velocidade de um corpo, em função do tempo, durante parte de seu movimento.

Figura 31 – Velocidade diminuindo com o tempo



Fonte: Vestibular Ufersa 2007.1

O movimento representado pelo gráfico pode ser o de um(a)

(A) carro que se aproxima de um sinal vermelho e para.
(B) fruta que cai de uma árvore.
(C) bala no interior do cano de uma arma, logo após o disparo.
(D) esfera que desce por um plano inclinado e continua rolando por um plano horizontal.

Resposta: A resposta certa é a letra A, pois o gráfico mostra que a velocidade de um móvel está diminuindo até atingir o valor zero, logo após atingir velocidade zero o gráfico indica que o móvel permanece em repouso.
Nas alternativas B, C e D indicam a tendência de um móvel aumentar sua velocidade.

3.3 Movimento retilíneo e uniformemente variado (M.R.U.V.)

É quando o móvel percorre uma trajetória retilínea e apresenta velocidade escalar variável, com aceleração constante.

Se um móvel, está em movimento em uma determinada trajetória retilínea, e a variação de sua velocidade for sempre igual em intervalos de tempo iguais, então dizemos que este é um Movimento Uniformemente Variado, ou seja, que tem aceleração constante e diferente de zero.

O conceito de aceleração em física, difere um pouco do conceito que se tem no cotidiano. Na física, acelerar significa basicamente mudar de velocidade, seja tornando-a maior ou menor. Já no cotidiano, quando pensamos em acelerar algo, estamos nos referindo a um aumento na velocidade.

O conceito formal de aceleração é: a taxa de variação de velocidade numa unidade de tempo.

3.3.1 Aceleração média

É a razão entre a variação da velocidade e o tempo que levou para variar.

Figura 32: Carro variando sua velocidade (A) para (B).

Fonte: RAMALHO et al, 2010

Podemos observar que um veículo parte de A com velocidade v_1 e depois de um certo tempo, o veículo passa em B com velocidade v_2. Vamos dizer que em A o instante é t_1 e que em B o instante seja t_2.

A duração deste intervalo é dada por

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

A variação da velocidade da partícula é dado por

$$\Delta v = v_2 - v_1$$

A aceleração média é a razão entre a variação da velocidade e o tempo que levou para variar essa velocidade.

O conceito formal de aceleração é: a taxa de variação da velocidade numa unidade de tempo.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}\text{, onde }\begin{cases}\Delta v = v - v_o \\ \Delta t = t - t_o\end{cases}$$

3.3.2 Funções Horárias

No movimento uniformemente variado, temos que a velocidade escalar é variável com aceleração constante, a aceleração coincide com a aceleração escalar média em qualquer instante ou intervalo de tempo.

11.1.1. Velocidade em Função do Tempo v = f(t).

É uma função dada pelo polinômio:

$$v = v_o + a \cdot t, \, onde \begin{cases} v \rightarrow \text{velocidade final} \\ v_o \rightarrow \text{velocidade inicial} \\ a \rightarrow \text{aceleração constante} \\ t \rightarrow \text{tempo} \end{cases}$$

Demonstração:

Considerando a equação $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$, onde $\begin{cases} \Delta v = v - v_o \\ \Delta t = t - t_o \end{cases}$ e substituído Δv e Δt na equação da aceleração descrita acima, temos:

$$a = \frac{v - v_o}{t - t_o}$$

Considerando o tempo inicial igual a zero, $t_o = 0$, temos a função horária da velocidade do movimento uniformemente variado.

$$a = \frac{v - v_o}{t}$$

Isolando a velocidade final (v) na equação:

$$v - v_o = a \cdot t$$

temos que:

$$v = v_o + a \cdot t$$

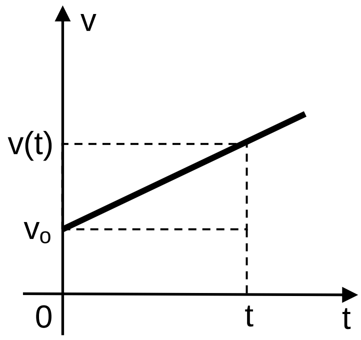
a ≠ 0 (função horária da velocidade no MUV)

3.3.4 Gráficos da velocidade em função do tempo do M.U.V.

A função horária v = f(t), $v = v_o + a \cdot t$, é uma função do 1º grau em t do tipo y = ax + b. Uma função de 1º grau é representada graficamente por uma reta, no sistema de coordenadas cartesianas, em relação ao eixo dos tempos.

Para a aceleração positiva (a > 0), a função é crescente, assim o gráfico da função pode ser:

Figura 33: Velocidade crescente com a > 0

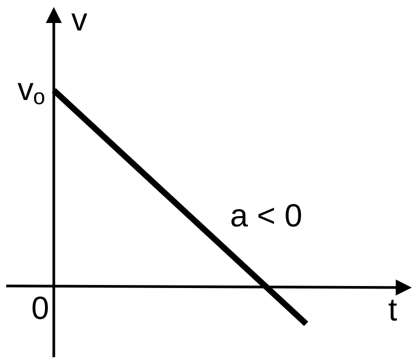


Fonte: http://www.brasilescola.com

Notamos que o gráfico da função é uma reta crescente, portanto, o movimento é acelerado, ou seja, o móvel caminha aumentando o módulo de sua velocidade na mesma direção e sentido da orientação na trajetória.

Para a aceleração positiva (a < 0), a função é decrescente, assim o gráfico da função pode ser:

Figura 34: Velocidade crescente com a < 0



Fonte: http://www.brasilescola.com

Notamos que o gráfico da função é uma reta decrescente, portanto, o movimento é retardado, ou seja, o móvel caminha diminuindo o módulo de sua velocidade na mesma direção e sentido até o gráfico tocar o eixo do tempo e mudar o sentido da orientação na trajetória pois a velocidade passa a ser negativa.

OBS: A área formada pelo gráfico de v = f(t) é numericamente igual ao espaço percorrido pelo móvel.

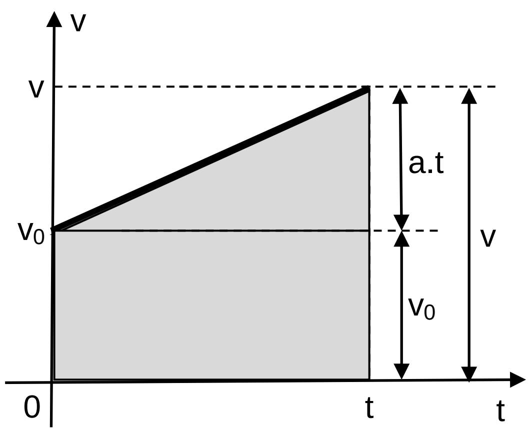
3.3.5 Espaço em função do tempo s = f(t).

É uma função dada pelo polinômio:

$$s = s_o + v_o \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}, \text{ onde } \begin{cases} s \rightarrow \text{espaço final} \\ s_o \rightarrow \text{espaço inicial} \\ v_o \rightarrow \text{velocidade inicial} \\ a \rightarrow \text{aceleração constante} \\ t \rightarrow \text{tempo} \end{cases}$$

Demonstração:

Figura 35: Trapézio formado a partir do gráfico



Fonte: http://www.brasilescola.com

Considerando a figura acima como um trapézio, calculando a área do trapézio $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ e substituindo v, v_o e t na equação da área descrita acima, temos: $A = \frac{(v + v_o) \cdot t}{2}$ e sabendo que $v = v_o + a \cdot t$ substituindo a equação da velocidade em A vamos ter $A = \frac{(v_o + a \cdot t + v_o) \cdot t}{2}$ isso implica que $A = \frac{(2v_o + a \cdot t) \cdot t}{2}$ multiplicando o tempo t e separando os termos da fração encontraremos

$A = \frac{2v_o \cdot t}{2} + \frac{a \cdot t^2}{2}$ e sabendo que, a área determinada pelo gráfico da velocidade em função do tempo representa o espaço percorrido pelo móvel, então A = Δs, logo, $\Delta s = v_o \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$ e como $\Delta s = s - s_o$, teremos $s - s_o = v_o \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$ portanto:

$$s = s_o + v_o \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

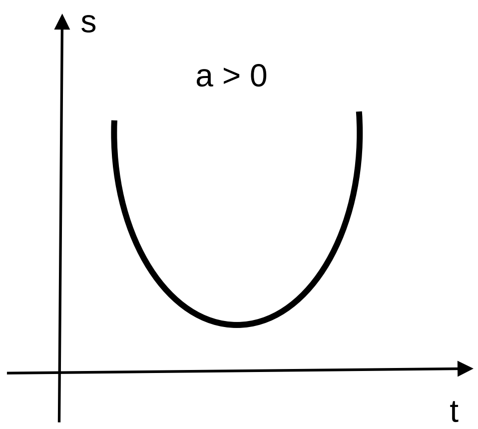
a ≠ 0 (função horária do espaço no MUV)

3.3.6 Gráficos do espaço em função do tempo do M.U.V.

A função horária s = f(t), $s = s_o + v_o \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$, é uma função do 2º grau em t do tipo $y = ax^2 + bx + c$. Uma função de 2º grau é representada graficamente por uma curva (parábola), no sistema de coordenadas cartesianas, em relação ao eixo dos tempos.

Para a aceleração positiva (a > 0), a função apresenta intervalos decrescentes antes do vértice v e intervalos crescentes depois do vértice v, assim o gráfico da função pode ser:

Figura 36: Parábola com concavidade para cima

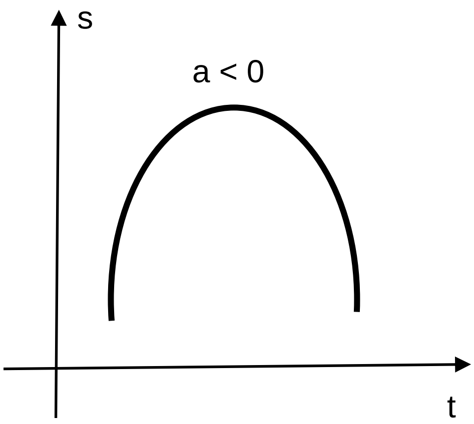


Fonte: http://www.brasilescola.com

Notamos que o gráfico da função é uma curva com concavidade voltada para cima, portanto, o movimento é retardado e acelerado, ou seja, o móvel caminha diminuindo o módulo da velocidade e depois aumentando o módulo de sua velocidade na mesma direção e mudando o sentido da orientação na trajetória.

Para a aceleração negativa (a < 0), a função apresenta intervalos crescentes antes do vértice v e intervalos decrescentes depois do vértice v, assim o gráfico da função pode ser:

Figura 37: Parábola com concavidade para baixo



Fonte: http://www.brasilescola.com

Notamos que o gráfico da função é uma curva, com concavidade para baixo, portanto, o movimento é retardado e acelerado, ou seja, o móvel caminha diminuindo o módulo da velocidade e depois aumentando o módulo de sua velocidade na mesma direção e mudando o sentido da orientação na trajetória.

3.3.7 Equação de torricelli

É uma equação usada quando não dispomos do tempo em um determinado movimento, e sua equação é dada pelo expressão:

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s, \text{ onde } \begin{cases} v \rightarrow \text{velocidade final} \\ v_o \rightarrow \text{velocidade inicial} \\ a \rightarrow \text{aceleração constante} \\ \Delta s \rightarrow \text{variação do espaço} \end{cases}$$

Demonstração:

Como a equação da velocidade é dada por $v = v_o + a \cdot t$ e elevando os dois membros da equação ao quadrado temos $v^2 = (v_o + a \cdot t)^2$ e lembrando do produto notável, quadrado da soma de dois termos $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$, e desenvolvendo a equação anterior vamos ter $v^2 = v_o{}^2 + 2 \cdot v_o{}^2 \cdot a \cdot t + a^2 \cdot b^2$, considerando $2 \cdot a$ como fator comum na expressão e isolando-o teremos $v^2 = v_o{}^2 + 2 \cdot a\left(v_o \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}\right)$, lembrando da demonstração da função do espaço em função tempo do MUV, a expressão $v_o \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = \Delta s$, então temo que:

$$v^2 = v_o{}^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

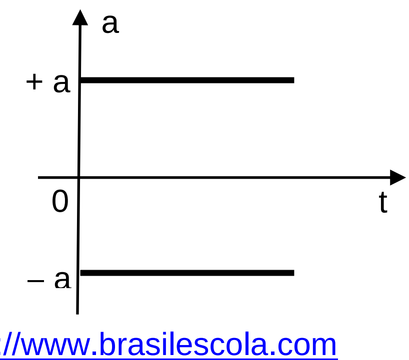
a ≠ 0 (equação de Torricelli no MUV)

3.3.8 Gráficos da aceleração

Como a aceleração escalar, do movimento uniformemente variado é constante, os gráficos podem ser:

Para a velocidade positiva (a > 0), a função é constante e o gráfico da aceleração é acima do eixo do tempo e para a aceleração negativa (a < 0), a função é constante e o gráfico da velocidade é abaixo do eixo do tempo.

Figura 38: Dois gráficos da aceleração constante



Fonte: http://www.brasilescola.com

Note que o gráfico da aceleração é uma reta paralela ao eixo dos tempos, para a = f(t). Essa função é uma função constante.

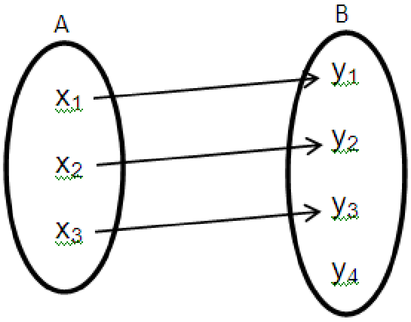
OBS: A área formada pelo gráfico de a = f(t) é numericamente igual à variação da velocidade do móvel.

4 INTERDISCIPLINARIDADE ENTRE MATEMÁTICA E FÍSICA

Uma das maneiras de trabalhar domínio, contradomínio e imagem de uma função, é relacionar com os gráficos de cinemática.

Quando definimos, que cada elemento do domínio de uma função só corresponde a um único elemento do contradomínio.

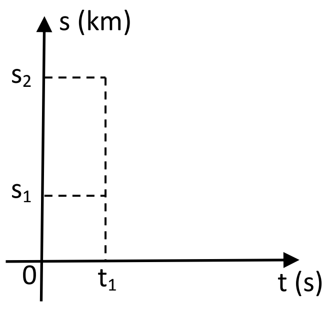
Figura 39: Diagrama de definição de função



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

Fica melhor explicado, se usarmos um gráfico de cinemática do espaço em função do tempo.

Figura 40: Gráfico do s x t

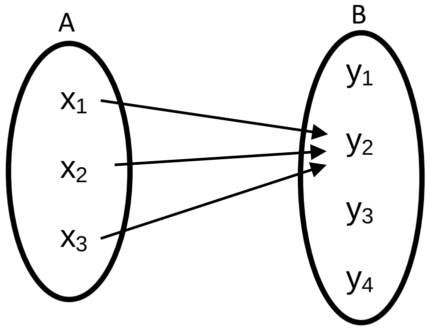


Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

O gráfico acima mostra, que não é possível que um mesmo objeto ocupe dois espassos ao mesmo tempo, ou seja, um elemento do domínio não pode corresponder a dois elementos de imagem no contradomínio.

Porém, podemos adimitir que um único elemento do contradomínio pode se relacionar com vários elementos do domínio que mesmo assim é uma função.

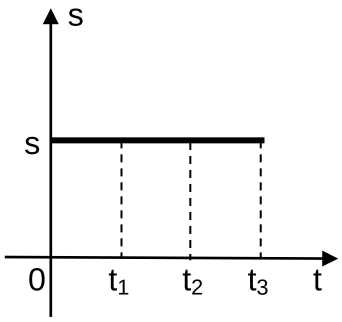
Figura 41: Diagrama de uma função constante



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

Utilizando um gráfico de função constante, fica mais fácil essa definição de função.

Figura 42: Gráfico de uma função constante do s x t



Fonte: O autor, usando o Microsoft Word

O gráfico acima mostra que o tempo está passando e o espasso continua o mesmo, ou seja o móvel está em repouso.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora o ensino da matemática e da física tenha melhorado com a interdisciplinaridade, não é novidade que uma parte expressiva dos alunos, não gostem de estudar matemática e física; alguns professores dessas disciplinas não conhecem a real leitura que estes alunos fazem da física e da sua relação com a matemática, como no cotidiano, na tecnologia. Um olhar mais atendo a esses tópicos, é importante para o processo de melhoria do ensino da matemática e da física.

Por experiência em salas de aula, de escolas públicas e privadas, percebi que os alunos do ensino médio no estudo de cinemática, confundem gráficos das funções, com trajetórias percorridas. Para solucionar esse problema, faço uma revisão de função em sala de aula, expondo as funções e seus respectivos gráficos, utilizando gráficos de movimentos e mostrando aos alunos que os gráficos apenas relacionam as grandezas dos eixos vertical e horizontal. Para que eles compreendam melhor, inicialmente exercito os gráficos com eles e depois passo uma lista de exercícios com várias situações envolvendo interpretação gráfica.

Essas experiências de salas de aula, demonstra a fragilidade da interpretação da relação entre a matemática e a física aos olhos dos alunos. Como objetivo correto, no contexto deste trabalho, entende-se o desenvolvimento de habilidades no aluno, em relacionar funções e seus respectivos gráficos com a cinemática.

Um professor que busca utilizar inovações nas aulas de física ou de matemática, em geral é um professor que está preocupado não somente com a conclusão do aluno no ensino médio, ou sucesso futuro na realização do vestibular, mas também está preocupado com a alfabetização científica dos alunos.

É importante salientar que, a grande maioria de alunos que declararam, tanto gostar como não gostar, ou considerar a disciplina Física importante usando como justificativa de validação a matemática.

E espero que este trabalho tenha apresentado dados suficientes para que o aluno perceba a importância que a matemática tem na física e vice versa. Contudo, é importante salientar que, fica muito interessante quando um professor de matemática, ao explicar gráficos de funções, utilize como aplicação, os gráficos de cinemática, ou outros conteúdos, na física. Da mesma forma, quando um professor de física for explicar funções e gráficos de cinemática, revisem para seus alunos, o conceito das funções da matemática não apenas por fórmulas, mas também, com um bom embasamento teórico.

REFERÊNCIAS

1. BISCUOLA, Gualter José e et al. **GUALTER & ANDRÉ FÍSICA VOLUME ÚNICO.** 1ª ed. São Paulo: Saraiva, 1996.

2. BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino Médio). Brasília; MEC, 2000.

3. CARRON, Wilson e et al. As Faces da Física: volume único. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2002.

4. CORDEIRO, Daniel de Morais Filho. **Manual de redação matemática**. 1ª ed. Campina Grande: ISBN, 2009.

5. DANTE, Luiz Roberto. Matemática contexto & aplicações. 4ª ed. São Paulo: Ática, 2008.

6. DOCA, Ricardo Helou. **Tópicos de física.** 20ª ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

7. GREF, Grupo de reelaboração do ensino de física. **Física 1**- **Mecânica**. 6ª ed. São Paulo: EDUSP -Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

8. IEZZI, Gelson e et al. **Fundamentos de Matemática Elementar**: conjuntos e funções. São Paulo: Atual, 2004. 8ª ed.

9. LIMA, Elon Lages e et al. **Temas e Problemas Elementares**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006A.

10. LIMA, Elon Lages e et al. **A Matemática do Ensino Médio**.9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006B.

11. LIMA, Elon Lages e et al. **Matemática e Ensino**. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

12. LUZ, Antônio Máximo Ribeiro da e et al. **Física Contextos & Aplicações**. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2011.

13. MORGADO, Augusto César. **Temas e problemas elementares**, 2ª.ed. [S.l.]: Editora SBM, 2006

14. PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: Paiva/ Manoel Rodrigues Paiva**. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2010.

15. PARANÁ, Djalma Nunes da Silva. **Física, vol. único Mecânica**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 1993.

16. RUFINO, Marcelo de Oliveira e et al. **Coleção Elementos da Matemática**: conjuntos e funções aritmética. Fortaleza: ISBN, 2010. 3ª ed.

17. SANT'ANNA**,** Blaidi Sant'Anna e et al. **Conexões com a física.** 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2010.

18. TIPLER, Paul; **Física – Volume 1; mecânica**. 4ª ed, LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2000.

19. http://www.alunosonline.com.br/fisica

20. http://www.alunosonline.com.br/matematica/graficos

21. http://www.brasilescola.com/matematica/grafico

22. http://www.brasilescola.com/fisica/funcao-horaria-muv-htm

23. http://www.colegioweb.com.br

24. http://www.Educar.sc.usp.br

25. http://www.geogebra.com.br

26. http://www.infoescola.com/matematica

27. http://www.matematica.br/historia

28. http://www2.ufersa.edu.br/portal/

29. http://www.ufsm.br/gef/Cinema01.htm

30. http://www.warlisson.com.br/teoria/funcao-identidade