



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**JÚLIO CÉSAR DA LUZ BELARMINO**

**DESENVOLVENDO E APLICANDO A MATEMÁTICA NA ELETRÔNICA:  
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO TÉCNICO**

MOSSORÓ/RN

2015

JÚLIO CÉSAR DA LUZ BELARMINO

**DESENVOLVENDO E APLICANDO A MATEMÁTICA NA ELETRÔNICA:  
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO TÉCNICO**

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFRSA, campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Odacir Almeida Neves

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

Catálogo na Fonte

Catálogo de Publicação na Fonte. UFERSA - BIBLIOTECA CENTRAL ORLANDO TEIXEIRA - CAMPUS MOSSORÓ

Belarmino, Júlio César da Luz.

Desenvolvendo e aplicando a matemática na eletrônica: uma proposta para o ensino técnico / Júlio César da Luz Belarmino. - Mossoró, 2015.

93f: il.

1. Ensino da matemática. 2. Aprendizagem. 3. Metodologia do ensino. I. Título

RN/UFERSA/BCOT/451

CDD 372.7 B514d

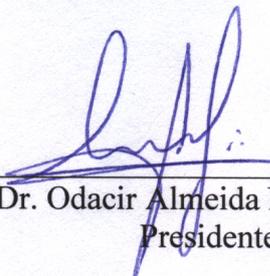
JÚLIO CÉSAR DA LUZ BELARMINO

**DESENVOLVENDO E APLICANDO A MATEMÁTICA NA ELETRÔNICA:  
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO TÉCNICO.**

Dissertação apresentada a Universidade  
Federal Rural do Semi-Árido, Campus  
Mossoró para obtenção do título de  
Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 29 / 06 / 2015

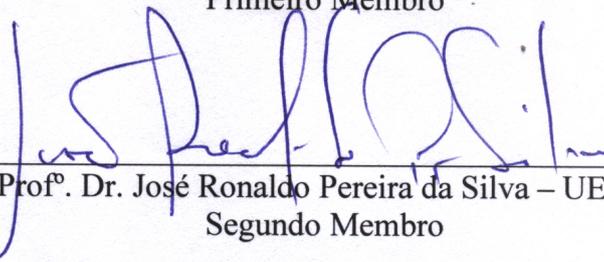
**BANCA EXAMINADORA**



Prof.º Dr. Odacir Almeida Neves - UFERSA  
Presidente



Prof.º Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA  
Primeiro Membro



Prof.º Dr. José Ronaldo Pereira da Silva – UERN  
Segundo Membro

Mossoró-RN, junho de 2015.

Dedico este trabalho para meu filho Felipe César Ferreira Belarmino e minha mãe Maria da Conceição da Luz Belarmino.

## **AGRADECIMENTOS**

A Rosinaide que sempre esteve ao meu lado, até mesmo no momento de muita dificuldade, deu-me incentivo, força e coragem para seguir e nunca desistir, ao meu filho Felipe César, pela paciência em suportar a ausência do pai, nos momentos em que esperava minha companhia, mas o considero presente de Deus, pois sua energia positiva sempre esteve em meu sangue.

À Meus pais Jeconias Belarmino Sobrinho e Maria da Conceição da Luz Belarmino. A meu pai por ter me ajudado com seu conhecimento técnico, e minha mãe por estar sempre me ajudando, e foi o alicerce e a força sem a qual não teria chegado aqui. “Obrigado mãe por tudo”.

A meu tio José Francisco por ter me recebido muito bem em sua casa, e toda sua família, a minha tia Joana D’arc uma mulher de grande exemplo, ao meu primo Rafael Pereira, A minha prima Rennab e seu esposo Antônio Farias e minha prima Rerem por dar sugestões e melhorias do seu conhecimento pedagógico.

Aos amigos Murilo Borba, Emerson de Paula, Jadilson e Marcos pelo incentivo e apoio.

A Odacir Almeida Neves, pelas aulas do PROFMAT, que foram de grande crescimento, e pela paciência de ser meu orientador.

Ao professor Ronaldo, pelas aulas do PROFMAT, e por ter lutado e conseguido a bolsa que foi fundamental para realização do curso.

Aos meus colegas de grupo do PROFMAT Francisco Pereira, Paulo Cordeiro, Alexandre. Pela grande união e colaboração durante as tarefas árduas.

A todos os colegas e Professores que conviveram nessa jornada de grande crescimento, foi um privilégio fazer parte desse grupo.

Agradeço a Deus por ter respirado esse momento, por ter alimentado em minha alma a vontade de crescer e ser justo, de construir um mundo melhor a cada dia.

“Nenhuma investigação humana pode ser chamada realmente Ciência, se não puder ser demonstrada matematicamente.”

(Leonardo da Vinci)

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Brasileiros que frequentam ou já frequentaram a educação profissional .....	21
Figura 2 Instituição onde o curso profissionalizante foi ou está sendo realizado.....	22
Figura 3 Aproveitamento em relação ao curso profissionalizante.....	23
Figura 4 Opinião dos brasileiros sobre os cursos profissionalizantes no Brasil.....	23
Figura 5 Avaliação da Instituição do Ensino Profissionalizante.....	24
Figura 6 Perfil da Amostra no Brasil.....	26
Figura 7 Circuito com duas impedâncias em paralelo e outra em série .....	28
Figura 8 Simulação da função seno, usando Winplot .....	30
Figura 9 Mostra o resultado da simulação com display e o CI7448. ....	36
Figura 10 Montagem Experimental do Circuito com Display .....	37
Figura 11 Circuito RC.....	38
Figura 12 Curva do Capacitor no Osciloscópio.....	41
Figura 13 Circuito Experimental RC .....	41
Figura 14 Circuito com dois resistores em série.....	42
Figura 15 Montagem experimental de dois Resistores em Série.....	44
Figura 16 Plotagem no Osciloscópio resultando na reta .....	44
Figura 17 Sinal Senoidal Plotado no Osciloscópio.....	45
Figura 18 Indução Magnética .....	46
Figura 19 Circuito com Transformador .....	46
Figura 20 Circuito RC para Circunferência .....	47
Figura 21 Sinais de mesma amplitude e defasados de $90^0$ .....	49
Figura 22 Circunferência de raio igual a 1,25 V .....	49
Figura 23 Circuito RC análise fasorial : Números Complexos .....	51
Figura 24 Circuito RC Montagem : Números Complexos.....	51
Figura 25 Sinais Defasados : Números Complexos.....	53
Figura 26 Circuito de Polarização do Transistor .....	54
Figura 27 Exemplo de Transistor em Corte .....	55
Figura 28 Exemplo de Transistor em Saturação.....	56
Figura 29 Circuito Sensor de Luz .....	57
Figura 30 Circuito Experimental Sensor de Luz .....	58
Figura 31 Luz do LED na Escuridão .....	58
Figura 32 Circuito Integrador .....	59
Figura 33 Circuito Derivador .....	60

Figura 34 Montagem do Circuito Integrador.....	61
Figura 35 Plotagem Integral da Senóide .....	61
Figura 36 Plotagem Integral de uma onda Triangular .....	62
Figura 37 Plotagem Integra de uma onda Retangular.....	62
Figura 38 Montagem do Circuito Derivador .....	63
Figura 39 Plotagem Derivada da Senóide .....	63
Figura 40 Plotagem Derivada de uma onda Triangular .....	64
Figura 41 Plotagem Derivada de uma onda Retangular.....	64
Figura 42 Circuito RLC Paralelo .....	65
Figura 43 Montagem do Circuito RLC Paralelo .....	67
Figura 44 Plotagem Caso Subamortecido .....	68
Figura 45 Plotagem Caso Sobreamortecido .....	68
Figura 46 Lei de Ampèr .....	74
Figura 47 Fórmulas básicas da Eletricidade num Dodecágono.....	75
Figura 48 Primeira Bateria .....	76
Figura 49 Leis de Kirchhoff .....	76
Figura 50 Lei de Faraday .....	77
Figura 51 Lei de Gauss .....	78
Figura 52 Equações de Maxwell.....	79
Figura 53 Código de Cores para Resistores .....	80
Figura 54 Código de Cores para Capacitores .....	81
Figura 55 Código para Capacitores de Cerâmica .....	82
Figura 56 Diodo Led.....	83
Figura 57 LDR (Símbolo) .....	84
Figura 58 Tipos de LDR.....	84
Figura 59 Estrutura e Símbolo do transistor TJB-NPN .....	85
Figura 60 Polarização do transistor e a curva de carga.....	85
Figura 61 Transistor BD135.....	85
Figura 62 Diagrama do CI 7448 .....	86
Figura 63 CI 7448 com 16 Pinos .....	86
Figura 64 Diagrama do Display de 7 segmentos .....	86
Figura 65 Display de 7 segmentos com 10 Pinos .....	86
Figura 66 Osciloscópio .....	87
Figura 67 Gerador de Sinais .....	88
Figura 68 Protoboard .....	89

## **SIGLAS**

**CEPEP:** CENTRO DE PROFISSIONALIZAÇÃO E EDUCAÇÃO DE PERNAMBUCO LTDA.

**SENAI:** SERVIÇO NACIONAL DE APRENDIZAGEM INDUSTRIAL.

**LDBEN:** LEI DE DIRETRIZES E BASES DA EDUCAÇÃO NACIONAL.

**SENAC:** SERVIÇO NACIONAL DE APRENDIZAGEM COMERCIAL.

**SENAR:** SERVIÇO NACIONAL DE APRENDIZAGEM RURAL.

**SEBRAE:** SERVIÇO DE APOIO À PEQUENA E MICROEMPRESA.

**PISA:** PROGRAMA INTERNACIONAL DE AVALIAÇÃO DE ALUNOS.

**ENEM:** EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO.

**CNI:** CONFEDERAÇÃO NACIONAL DAS INDUSTRIAS.

**CI:** CIRCUITO INTEGRADOR.

**RC:** RESISTOR E CAPACITOR.

**RLC:** RESISTOR, INDUTOR E CAPACITOR.

**RMS:** ROOT MEAN SQUARE.

**LDR:** LIGHT DEPENDENT RESISTOR.

**LED:** LIGHT EMITTING DIODE.

**TJB:** TRANSISTOR DE JUNÇÃO BIPOLAR.

## RESUMO

Verifica-se através de experiências que muitos alunos do curso técnico de eletrônica tem dificuldade em matemática do ensino fundamental e médio, desenvolve-se aqui uma metodologia experimental, mas que também é seguido do exercício teórico, para reforçar e motivar os alunos para o estudo da matemática. Traz-se para sala de aula após o desenvolvimento teórico as aplicações da matemática na eletrônica de uma forma simples e, desenvolve-se o ensino-aprendizagem preenchendo a lacuna deixada no ensino regular das escolas, onde os alunos sempre perguntam: “para que serve isso?”. Aproveitando a estrutura laboratorial da escola técnica podemos desenvolver e aplicar matemática para todos alunos, em especial para os alunos de eletrotécnica, mecatrônica e eletrônica ou cursos técnicos que tenham a disciplina de eletrônica. Fica também como proposta para todos os professores de matemática. Esse é o mundo da eletrônica capaz de converter a lógica matemática em um dispositivo, pode ser um robô, um celular, um satélite, eletrocardiograma, um sensor de luz, de vibração, de toque, de um olhar, pode observar as estrelas mais distantes e as partículas subatômicas, tudo isso é o que a matemática faz e pode fazer muito mais. De uma infinidade de aplicações que se podem estar desenvolvendo, neste trabalho dissertativo são colocados nove circuitos experimentais de um maneira simples com poucos componentes, com o objetivo de aplicar a matemática do ensino fundamental, médio e superior.

**PALAVRAS-CHAVE:** Metodologia experimental; Matemática no Ensino Fundamental, Médio e Superior; Eletrônica.

## **ABSTRACT**

There is through experience that many students of electronics technician course has difficulty in mathematics from elementary and secondary education, develops here an experimental methodology, but it is also followed by theoretical exercise, to strengthen and motivate students to study of mathematics. Brings to the classroom after the theoretical development of mathematics applications in electronics in a simple way and develops the teaching-learning filling the gap left in regular education schools, where students often ask: "what is the use?". Taking advantage of the laboratory structure of technical school can develop and apply mathematics to all students, especially for students of electrical engineering, mechatronics and electronics or technical courses that have the discipline of electronics. It is also as a proposal for all math teachers. This is the world of electronics capable of converting mathematical logic on a device, can be a robot, a mobile phone, a satellite, electrocardiogram, a light sensor, vibration, touch, a look, you can observe the most distant stars and subatomic particles, all this is that mathematics does and can do much more. A multitude of applications that can be developed in this work are placed dissertative nine experimental circuits of a simple way with few components, in order to apply the mathematics of primary, secondary and higher.

**KEYWORDS:** experimental methodology; Math in elementary school, middle and upper, Electronics.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	15
1.1 Objetivo Geral.....	17
1.2 Objetivo específico .....	17
1.3 Justificativa .....	17
<b>2 EDUCAÇÃO PROFISSIONAL NO BRASIL</b> .....	19
<b>3 ESTADO DA ARTE</b> .....	27
<b>4 APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA NA ELETRÔNICA</b> .....	35
4.1 SISTEMAS DE NUMERAÇÃO .....	35
4.1.1 Análise Matemática .....	35
4.1.2 Material Utilizado .....	36
4.1.3 Análise Experimental.....	36
4.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL .....	37
4.2.1 Análise Matemática .....	37
4.2.2 Simulação no Geogebra .....	39
4.2.3 Material Utilizado .....	40
4.2.4 Análise experimental .....	40
4.3 FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU .....	41
4.3.1 Análise Matemática .....	41
4.3.2 Simulação no Geogebra .....	43
4.3.3 Material Utilizado .....	43
4.3.4 Análise experimental .....	43
4.4 FUNÇÃO SENO.....	44
4.4.1 Análise Matemática .....	44
4.4.2 Simulação no Geogebra .....	45
4.4.3 Material Utilizado .....	46
4.4.4 Análise experimental .....	46
4.5. EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA.....	47
4.5.1 Análise Matemática .....	47
4.5.2 Simulação no Geogebra .....	48
4.5.3 Material Utilizado .....	49
4.5.4 Análise experimental .....	49
4.6 NÚMEROS COMPLEXOS.....	50
4.6.1 Análise Matemática .....	50
4.6.2 Material Utilizado .....	52

4.6.3 Análise experimental .....	52
4.7 EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU.....	53
4.7.1 Análise Matemática .....	53
4.7.2 Material Utilizado .....	57
4.7.3 Análise experimental .....	58
4.8 INTEGRAIS E DERIVADAS .....	58
4.8.1 Análise Matemática .....	58
4.8.2 Material Utilizado .....	60
4.8.3 Análise experimental .....	61
4.9 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM.....	64
4.9.1 Análise Matemática .....	64
4.9.2 Materil Utilizado.....	67
4.9.3 Análise experimental .....	67
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>69</b>
<b>6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>71</b>
APÊNDICE A: CONTRIBUIÇÕES IMPORTANTES .....	74
APÊNDICE B : COMPONENTES ESPECIAIS .....	80
APÊNDICE C : EQUIPAMENTOS UTILIZADOS.....	87
APÊNDICE D : RELAÇÕES MATEMÁTICAS.....	90

## 1 INTRODUÇÃO

Com base na experiência de ensino técnico observamos que muitos alunos têm deficiência na compreensão da matemática a nível do Ensino Fundamental e Médio, dificultando sua aprendizagem de vários assuntos do nível técnico, especificamente, os alunos que fazem o Curso Técnico de Eletrônica. Não dão muita importância ao desenvolvimento da matemática e estão mais preocupados com a execução e fazer a “coisa funcionar” sem se preocupar como foi projetado ou desenvolvido aquele circuito. Assim, muitos alunos têm dificuldade até mesmo de compreender o funcionamento porque não compreendem os cálculos desenvolvidos e que são necessários para compreensão dos projetos e com isso fica como um grande obstáculo para desenvolver melhor a sua aprendizagem. Mas quando percebem que a matemática desenvolvida projeta circuitos e vê seu funcionamento elaborado e dimensionado começa a correr para o entendimento da matemática, alguns querem livros para estudar, outros dizem que vão revisar o assunto. Então teoria e prática andando juntas fazem o papel ideal para o ensino-aprendizagem.

O aluno do curso técnico já deve ter em seu currículo do Ensino Médio preparação ou condições de desenvolver toda a matemática convivia durante anos de estudo. Mas não é o que ocorre na realidade e essa lacuna provoca um atraso na compreensão do desenvolvimento técnico, especificamente os alunos do curso técnico de eletrônica, essa visão de interesse muda quando percebem que a matemática desenvolvida tem uma aplicabilidade.

A proposta desse trabalho é desenvolver alguns conteúdos importantes da matemática do Ensino Fundamental, Médio e Superior e aplicá-los para o curso técnico de eletrônica como também uma proposta de treinamento para professores de Matemática e Física que desejem aplicar em sala de aula. Projetando e dimensionando corretamente os componentes de um circuito, plotando e medindo grandezas fundamentais, sendo capazes de analisar corretamente os resultados, nessa tarefa, ensino-aprendizagem, os alunos vão desenvolver a matemática e verificar sua aplicabilidade no ramo de seu interesse.

Os professores podem agregar as simulações feitas com o computador, e um dos recursos que podem utilizar é o programa GeoGebra, com as práticas de circuitos, que será uma ferramenta a mais na aprendizagem da matemática. Existem muitos programas computacionais que podem elaborar virtualmente os circuitos e que podem ser outro recurso útil para montagem e análise.

Para algumas situações já ocorridas, falar de uma função ou de uma equação parece uma coisa assustadora e isso atrapalha na compreensão das matérias que exige cálculos. Assim,

aplicações da matemática na eletrônica visa direcionar aos assuntos dados no Ensino Fundamental, Médio e Superior com as aplicações práticas e fazer os alunos abrirem suas mentes para uma melhor compreensão da matemática e com isto estimular ideias e a criatividade como também, motivá-los para a beleza que os números podem construir. Além disso, verificarão que os mesmos estão por toda a parte construindo prédios, aviões mais velozes e seguros, equipamentos mais qualificados e produzindo avanços na tecnologia.

Desenvolve-se a matemática para conteúdo do Ensino Fundamental, Médio e Superior, tais como: Função Exponencial, Função do Primeiro Grau, Equação da Circunferência, Função Seno e Função Cosseno, Sistemas de Numeração, Números Complexos, Equações do Primeiro Grau, Integrais, Derivadas e as Equações Diferenciais de Segunda Ordem.

Na estrutura organizacional desse trabalho apresentamos algumas descrições de equipamentos e componentes como também algumas contribuições históricas daqueles que foram os professores de matemática e desenvolveram teorias que até hoje são aplicados na eletrônica. No apêndice encontra-se para consulta conteúdos que fornecem um direcionamento para aqueles que não trabalham ou ainda não são familiarizados com eletrônica, mas que apreciam e querem mostrar a seus alunos as aplicações da matemática, fornecendo a importância e a beleza que a matemática pode proporcionar no mundo em que vivemos.

A matemática com sua enorme importância no dia a dia, torna-se interessante, estimulante, motivadora quando o resultado de sua argumentação teórica tem uma aplicação prática ao alcance de todos, e a eletrônica com seus pequenos circuitos podem fornecer uma interação para o crescimento do ensino-aprendizagem.

Assim desenvolve-se no Capítulo 2: Educação Profissional no Brasil, faz-se um levantamento estatístico da procura, da frequência e do desempenho dos professores e estudantes de várias escolas dos cursos técnicos no Brasil, no Capítulo 3: O Estado da Arte, dando ênfase alguns trabalhos que tiveram como meta aplicar a matemática, no capítulo 4 : Aplicações da Matemática na Eletrônica, que analisa conteúdos de matemática, no capítulo 4.1 Sistemas de Numeração que aplica circuitos digitais, em 4.2 Função Exponencial, que verifica-se através de um capacitor carregando, em 4.3 Função do primeiro grau que mostra na tela do osciloscópio a Lei de Ohm, em 4.4 Função Seno, que pode ser analisada através da rede elétrica, em 4.5 Equação da Circunferência que através da circunferência vista no osciloscópio determina-se a capacitância, em 4.6 Números Complexos, que podem ser visualizados no osciloscópio, em 4.7 Equação do Primeiro Grau, que pode acender uma luz automática, em 4.8 Integrais e Derivadas, vistas de sinais no osciloscópio e no 4.9 Equações Diferenciais de Segunda Ordem, observando-se suas soluções na tela do osciloscópio.

## 1.1 Objetivo Geral

Desenvolver circuitos simples na área da eletrônica que aplique a matemática do Ensino Fundamental, Médio para Curso Técnico.

## 1.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver conteúdos de matemática.
- Projetar circuitos simples que aplique a matemática desenvolvida.
- Conhecer o funcionamento de Componentes Eletrônicos e Instrumentação Eletrônica.
- Fazer simulações no programa GeoGebra e Osciloscópio.
- Proposta para o Ensino Superior: Integrais, Derivadas e Equações Diferenciais de Segunda Ordem.

## 1.3 Justificativa

Com experiência no SENAI (Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial) de Santo Amaro em Recife como professor da Educação Básica nas disciplinas de eletrônica analógica, digital e de potência durante 10 anos. E atualmente como professor de eletrônica do CEPEP (Centro de Profissionalização e Educação de Pernambuco) Cabo de Santo Agostinho em Pernambuco, durante todo esse período sempre encontramos na maioria dos alunos de uma turma, dificuldades em resolver problemas de matemática do Ensino Médio quando o assunto dado precisaria da compreensão dessa ferramenta.

Durante o período do SENAI, as turmas pela manhã eram de alunos que já tinha o Ensino Fundamental e estavam cursando o Ensino Médio, e muito deles, vindo de escolas públicas, comentavam que não tinha visto o assunto suficiente ou parte dele e como a eletrônica explora com bastante rigor a matemática, ficavam sem entender algumas etapas do desenvolvimento do assunto de eletrônica; falar de funções era algo novo e que muitos não entendiam os gráficos no osciloscópio, era preciso revisar um pouco o assunto para que pudessem ficar mais tranquilos e interessados pela disciplina, e também melhorar os conteúdos de matemática necessários para aquele estudo.

Houve uma turma com projetos sobre sensores para indicar se o filtro do ar condicionado estava sujo, exploraram bastante a matemática do Ensino Médio, para dimensionar corretamente os componentes do circuito, e ficaram muito felizes com o resultados e da importância da matemática naquela aplicação. Verificaram o quanto é importante aqueles assuntos dados no ensino da matemática; uma das alunas argumentou que ficou apaixonada pela matemática quando viu sua aplicação naquele estudo.

No CEPEP as aulas são voltadas para alunos que trabalham nas refinarias de petróleo, o turno noturno, a maioria deles adultos, alguns com idade avançada, e em torno de 90% dos alunos de uma turma tem grande dificuldade no conteúdo do Ensino Fundamental e Médio em matemática, e para alguns resolver uma equação do primeiro grau é não entender absolutamente nada, outros dizem que há muito tempo que estudou, e que não lembram, outros dizem que tudo é “fazer de conta”, o professor “faz de conta” que ensina e o aluno “faz de conta” que aprende, mas sempre colocamos para eles que o curso técnico tem como pré-requisitos formação do Ensino Médio, e que a matemática básica é fundamental para compreensão dos circuitos elétricos, então 10% do tempo que tenho é para fazer uma revisão e assim coloco aplicações da matemática, e no final das experiências eles ficam mais interessados em estudar matemática.

Para muitos alunos que fazem o Curso Técnico, a matemática desenvolvida no Ensino Médio tem muita deficiência porque em muitos casos os professores não mostram aplicações de um conteúdo desenvolvido, ou não trabalham as aplicações necessária a uma melhor compreensão da matéria, pois para quem gosta de matemática tudo é belo, no entanto para aqueles que têm outras vocações o grande estímulo seria uma aplicação dinâmica que chamasse atenção para a importância daqueles cálculos desenvolvidos.

## 2 EDUCAÇÃO PROFISSIONAL NO BRASIL

A educação profissional no Brasil já assumiu diferentes funções no decorrer de toda a história educacional brasileira.

Até a promulgação da atual LDBEN (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a educação profissional esteve agregada ao ensino de 2º grau (atual Ensino Médio), quando então passou a ter identidade própria, cuja característica marcante é a sua capacidade de integrar-se «às diferentes formas de educação, ao trabalho, à ciência e à tecnologia», com vistas a conduzir o educando «ao permanente desenvolvimento de aptidões para a vida produtiva» (LDBEN, art. 39).

Num país como o Brasil, que apresenta diversidades físicas, socioculturais e econômicas marcantes, o modelo educacional adotado para a profissionalização tinha de ser flexível. Os novos currículos voltaram-se para atender tanto ao mercado nacional como às características das diferentes regiões brasileiras, além de se adaptarem às exigências dos setores produtivos.

O objetivo é criar cursos que garantam perspectivas de trabalho para os jovens e facilitem seu acesso ao mercado; que atendam, também, os profissionais que já estão no mercado, mas sentem falta de uma melhor qualificação para exercerem suas atividades, e, ainda, sejam um instrumento eficaz na reinserção do trabalhador no mercado de trabalho.

A formação profissional não se esgota na conquista de um certificado ou diploma. A nova política estabelece a educação continuada, permanente, como forma de atualizar, especializar e aperfeiçoar jovens e adultos em seus conhecimentos tecnológicos.

### 2.1 FORMAS E INSTITUIÇÕES QUE OFERECEM A EDUCAÇÃO PROFISSIONAL

A educação profissional pode ser oferecida pelas escolas técnicas federais, estaduais, municipais e privadas, sendo que, nestas últimas, estão incluídos os estabelecimentos do chamado Sistema S (Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial – SENAI; Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial – SENAC; Serviço Nacional de Aprendizagem Rural – SENAR; Serviço de Apoio à Pequena e Microempresa – SEBRAE) e instituições empresariais, sindicais, comunitárias e filantrópicas.

### 2.2 ACESSO À EDUCAÇÃO PROFISSIONAL: IDADE E CICLOS

O acesso à educação profissional é possível ao aluno matriculado ou egresso do Ensino Fundamental, Médio e Superior, assim como ao trabalhador em geral.

A legislação em vigor no Brasil classifica a educação profissional em três níveis:

- *Básico*: modalidade de educação não-formal e de duração variável, destinada a proporcionar ao cidadão trabalhador, independentemente da escolaridade prévia, conhecimentos que lhe permitam a qualificação, requalificação e atualização para o exercício de funções demandadas pelo mundo do trabalho, compatíveis com a complexidade tecnológica do trabalho, o seu grau de conhecimento técnico e o nível de escolaridade do aluno.
- *Técnico*: destinado a jovens e adultos que estejam cursando ou tenham concluído o Ensino Médio, mas cuja titulação pressupõe a conclusão da Educação Básica de 11 anos.
- *Tecnológico*: destinado à formação Superior, tanto de Graduação como de Pós-Graduação, de jovens e adultos.

A legislação brasileira para a educação profissional estabelece que os cursos de nível básico, abertos a qualquer pessoa interessada, independentemente de escolaridade, possuem duração variável e são destinados a qualificar, requalificar e reprofissionalizar trabalhadores, não estando sujeitos à regulamentação curricular; os cursos técnicos têm organização curricular própria e são destinados a habilitar alunos que estão cursando ou já concluíram o Ensino Médio; os tecnológicos, por sua vez, são cursos de nível superior. Tanto os cursos Técnicos quanto os tecnológicos estão estruturados em áreas profissionais para atender aos diversos setores da economia.

### 2.3 OS BRASILEIROS E A EDUCAÇÃO PROFISSIONAL

Um quarto da população brasileira já frequentou ou frequenta um curso profissional e nove em cada dez estudantes concluem o curso. A principal razão que leva o brasileiro a fazer um curso profissional é ingressar mais cedo no mercado de trabalho e as maiores dificuldades são a falta de tempo e de recursos financeiros. Cabe ressaltar que, 35% continuam trabalhando na área em que fez o curso.

- 25% dos brasileiros com 16 anos ou mais frequentam/frequentaram curso de educação profissional
- 43% da demanda de educação profissional é atendida pelo Sistema S
- 53% apontaram o ingresso mais rápido no mercado de trabalho como uma das três principais razões para fazer um curso profissional

- 40% escolheram a falta de tempo para estudar como uma das três principais razões para não terem feito um curso profissional
- Um a cada dez estudantes não conclui seu curso profissional
- 61% dos entrevistados que frequentaram a educação profissional atuam ou já atuaram na área do curso.

Um em cada quatro brasileiros afirma estar frequentando ou já ter frequentado curso de educação profissional. Quando observado o corte por faixa de ensino, verifica-se que os Cursos Técnicos não são conflitantes com a educação regular, ao contrário, é possível observar uma complementaridade à medida que aqueles que mais buscaram realizar um curso profissional foram os entrevistados com graus mais elevados de instrução: 42% dos entrevistados com grau superior fazem ou fizeram cursos de educação profissional, enquanto que para os entrevistados com até 4º série do ensino fundamental, esse percentual cai para 5%.

A procura pelos cursos de educação profissionalizante é maior entre os jovens: 34% dos entrevistados na faixa etária de 16 a 24 anos afirmam que frequentam ou já frequentaram Cursos Técnicos. Para aqueles na faixa etária de 25 a 34 anos, o percentual é de 32%. Em contrapartida, essa participação cai para apenas 12% para os entrevistados acima dos 55 anos de idade.

**Brasileiros que frequentam ou já frequentaram curso de educação profissional\***

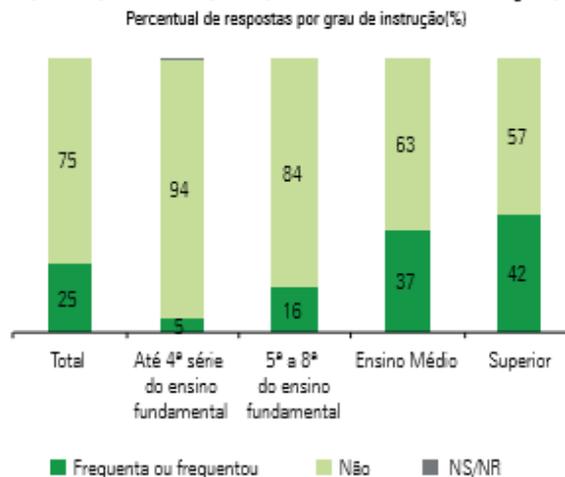


Figura 1: Brasileiros que frequentam ou já frequentaram a educação profissional. Fonte: Pesquisa CNI-IBOPE : retratos da sociedade brasileira: Educação Profissional: janeiro 2014 / Confederação Nacional da Indústria. – Brasília: CNI, 2014. 26 p. : il.

Dentre os entrevistados que frequentam ou frequentaram cursos de educação profissional, 43% o fizeram em instituição de ensino de educação profissional vinculada ao Sistema S (SENAI, SENAC, SEBRAE etc).

Outros 37% realizaram o curso em instituição de educação profissional particular, enquanto um quinto dos entrevistados (20%) fez ou está fazendo o curso em uma instituição pública (federal, estadual ou municipal).

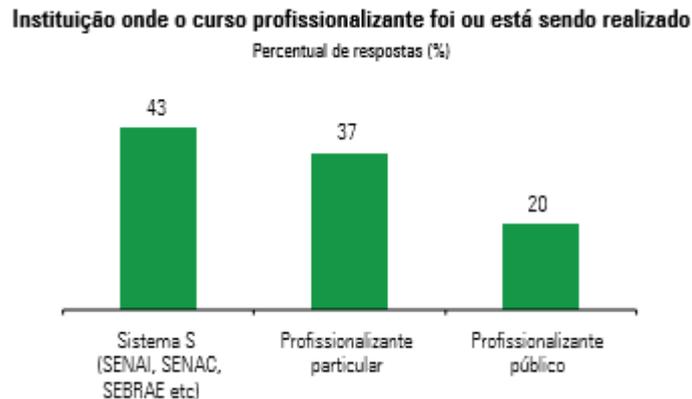


Figura 2: Instituição onde o curso profissionalizante foi ou está sendo realizado. Fonte: Pesquisa CNI-IBOPE : retratos da sociedade brasileira: Educação Profissional: janeiro 2014 / Confederação Nacional da Indústria. – Brasília: CNI, 2014. 26 p. : il.

Os entrevistados que frequentam ou frequentaram um curso profissional foram instados a dizer por qual razão – até três opções – optaram por fazer o curso. Dentre as opções de resposta, as mais escolhidas foram: permitir um ingresso rápido ao mercado de trabalho (53%) e desejo de qualificar-se em determinada profissão (47%). “O curso de educação profissional amplia as oportunidades do mercado de trabalho”, “Melhorar o desempenho no atual trabalho” e “O curso é mais objetivo, tem foco na prática profissional” vieram na sequência com 28%, 27% e 23% das opções de resposta, respectivamente.

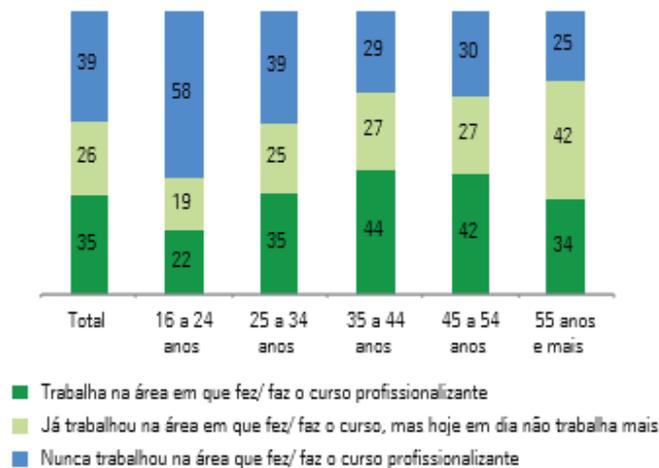
“Atender uma nova demanda industrial local” ficou com 16% das marcações de resposta, muito próximo a “Oferta de cursos profissionalizantes próximos à residência/trabalho” (15%).

A maioria dos entrevistados que cursa/cursou o ensino profissional (61%) afirmam trabalhar ou já terem trabalhado na área em que fez/faz o curso profissional, sendo que 35% afirmam que trabalham na área em que fizeram/fazem o curso profissional e 26% que já trabalharam na área, mas hoje em dia não trabalham mais.

Outros 39% dizem nunca ter trabalhado na área de formação profissional. Essa participação é três vezes maior entre os entrevistados com renda familiar de até 1 salário mínimo, onde o percentual alcança 60% ante 19% entre os entrevistados com renda familiar de 10 salários mínimos ou mais.

### Aproveitamento em relação ao curso profissionalizante que fez ou está fazendo\*

Percentual de respostas de quem frequenta/frequentou um curso profissionalizante por faixa etária (%)



\* A soma dos percentuais pode não alcançar 100% por motivos de arredondamento.

Figura 3: Aproveitamento em relação ao curso profissionalizante que fez ou está fazendo. Fonte: Pesquisa CNI-IBOPE: retratos da sociedade brasileira: Educação Profissional: janeiro 2014 / Confederação Nacional da Indústria. – Brasília: CNI, 2014. 26 p. : il.

## 2.4 QUALIDADE DOS CURSOS DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL NO BRASIL

A maioria da população brasileira considera os cursos de educação profissional do Brasil ótimo ou bom e avaliam positivamente as instituições de ensino.

Na Figura 4, 69% dos brasileiros, afirma considerar o nível dos cursos profissionais no Brasil ótimo ou bom. Pouco mais de um quinto (22%) consideram os cursos de educação profissional regulares e 4% os consideram ruins ou péssimos. 5% dos entrevistados não souberam ou não quiseram responder.

### Opinião dos brasileiros sobre os cursos profissionalizantes no Brasil

Percentual de respostas (%)

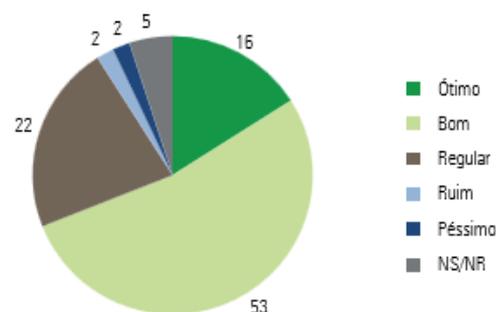


Figura 4: Opinião dos brasileiros sobre os cursos profissionalizantes no Brasil. Fonte: Pesquisa CNI-IBOPE: retratos da sociedade brasileira: Educação Profissional: janeiro 2014 / Confederação Nacional da Indústria. – Brasília: CNI, 2014. 26 p. : il.

Os entrevistados foram instados a avaliar — com notas de 0 a 10 — a instituição de ensino na qual realizaram seu curso profissional sob quatro aspectos: adequação às necessidades do mercado de trabalho; estrutura física da escola; material didático e nível dos professores. De modo geral, a percepção sobre os aspectos avaliados foi positiva (a grande maioria das notas ficou acima de oito).

As instituições de educação profissional vinculadas ao Sistema S (SENAI, SENAC, SEBRAE etc) obtiveram as melhores avaliações: a nota média variou de 8,30 para adequação ao mercado de trabalho e estrutura física da escola até 9,40 para nível dos professores.

Em segundo lugar, com maiores notas médias, ficaram as instituições públicas (federal, estadual ou municipal). Todavia, houve mudança no ranking de classificação a partir do segundo item melhor avaliado (vê Figura 5). Assim como no caso do Sistema S e das demais instituições privadas, o nível dos professores também foi o item melhor avaliado no que diz respeito às instituições públicas (nota média de 8,71). Em segundo lugar, no entanto, aparece a estrutura física da escola. O item com menor nota média é material didático, com 8,15.

As demais instituições privadas obtiveram as menores notas médias: apenas nível dos professores ficou com nota acima de oito (8,71). Em segundo lugar tem-se a adequação ao mercado de trabalho e a menor nota foi para material didático (7,36).

**Avaliação da instituição de ensino profissionalizante que frequenta ou frequentou**  
Nota Média

	Público	Sistema S	Demais instituições privadas
Nível dos professores	8,71	9,40	8,71
Material didático	8,15	8,70	7,36
Adequação ao mercado de trabalho	8,57	8,30	7,71
Estrutura física da escola	8,64	8,30	7,64

Figura 5: Avaliação da Instituição do Ensino Profissionalizante, Fonte: Pesquisa CNI-IBOPE : retratos da sociedade brasileira: Educação Profissional: janeiro 2014 / Confederação Nacional da Indústria. – Brasília: CNI, 2014. 26 p. : il.

## 2.5 ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS DA PESQUISA

- Período de campo  
De 8 a 11 de março de 2013.
- Universo

A pesquisa é realizada com eleitores de 16 anos ou mais da área em estudo. O universo de eleitores é estratificado. Com exceção dos estados do Acre, Amapá e Roraima que juntos constituem apenas um estrato, cada um dos demais estratos é composto por apenas um estado brasileiro. Uma vez que o Estado possui Região Metropolitana, o seu universo é estratificado em Região Metropolitana e Interior.

- Amostra

O modelo de amostragem utilizado é o de conglomerados em 3 estágios.

No primeiro estágio os municípios são selecionados probabilisticamente através do método PPT (Probabilidade Proporcional ao Tamanho), com base na população de 16 anos ou mais de cada município.

No segundo estágio são selecionados os conglomerados: setores censitários, com PPT (Probabilidade Proporcional ao Tamanho) sistemático. A medida de tamanho é a população de 16 anos ou mais residente nos setores.

Finalmente, no terceiro estágio é selecionado em cada conglomerado um número fixo de eleitores segundo cotas de variáveis descritas abaixo.

## 2.6 VARIÁVEIS PARA COTAS AMOSTRAIS

- SEXO: Masculino e Feminino.
- GRUPOS DE IDADE: 16-24, 24-34, 35-44, 45-54, 55 anos e mais.
- INSTRUÇÃO: Até 4ª série do fund.; 5ª a 8ª série do fund.; Ens. Médio; Superior.
- ATIVIDADE: Setor de dependência - agricultura, indústria de transformação, indústria de construção, outras indústrias, comércio, prestação de serviços, transporte e comunicação, atividade social, administração pública, outras atividades, estudantes e inativos.
- FONTES DE DADOS PARA ELABORAÇÃO DA AMOSTRA: Censo 2010 e TSE 2012.
- NÚMERO DE ENTREVISTAS: 2002 entrevistas em 143 municípios.
- MARGEM DE ERRO: O intervalo de confiança estimado é de 95% e a margem de erro máxima estimada é de 2 pontos percentuais para mais ou para menos sobre os resultados encontrados no total da amostra.
- COLETA DE DADOS: Entrevistas pessoais com utilização de questionário elaborado de acordo com os objetivos da pesquisa. As entrevistas são realizadas por uma equipe de entrevistadores do IBOPE, devidamente treinada para abordagem deste tipo de público.
- CONTROLE DE QUALIDADE: Há filtragem em todos os questionários após a realização das entrevistas. Fiscalização em aproximadamente 20% dos questionários.

OBSERVAÇÃO: As perguntas cujas somas das porcentagens não totalizam 100% são decorrentes de arredondamentos ou de múltiplas respostas.

**Perfil da amostra Brasil**  
Percentual de respostas (%)

Sexo	
Masculino	47
Feminino	53
Idade	
16 a 24	19
25 a 34	23
35 a 44	20
45 a 54	17
55 e mais	21
Grau de instrução	
Até 4ª série do fundamental	27
5ª a 8ª do fundamental	20
Ensino Médio	37
Superior	16
Região	
Norte/Centro-Oeste	15
Nordeste	25
Sudeste	44
Sul	15

Renda familiar (em salários mínimos)	
Mais de 10	3
Mais de 5 a 10	12
Mais de 2 a 5	36
Mais de 1 a 2	33
Até 1	12
Não respondeu	4
Condição do município	
Capital	27
Periferia	13
Interior	59
Porte do município (em número de habitantes)	
Até 20 mil	14
Mais de 20 a 100 mil	33
Mais de 100 mil	53

Figura 6: Perfil da Amostra no Brasil, Fonte: Pesquisa CNI-IBOPE : retratos da sociedade brasileira: Educação Profissional: janeiro 2014 / Confederação Nacional da Indústria. – Brasília: CNI, 2014. 26 p. : il.

Essa pesquisa feita pela CNI (Confederação Nacional da Indústria)(2014) mostra que a maior parte dos brasileiros ao terminar o Ensino Fundamental ou Médio, procuram por cursos profissionalizantes, essa iniciativa é muito boa para os alunos que querem ingressar mais cedo no mercado de trabalho como também ganhar experiência dos estudos feitos na sua jornada escolar, além dessa necessidade ao trabalho, os alunos mais esforçados almejam o ensino superior, e constrói com a experiência do curso técnico um futuro com melhores perspectivas.

### 3 ESTADO DA ARTE

Com a finalidade de compreender ações voltadas para a situação da matemática atual nas escolas e como melhorar o desempenho dos alunos foram citadas algumas colocações, e estudos exaustivos de autores foram feitos para ampliar nossa discussão na busca de soluções e melhorias para o ensino matemática.

É focado uma aprendizagem em cima do desenvolvimento da robótica, utilizando o kit que favoreça as aplicações da matemática, com recursos satisfatórios e que o professor só precisa estudar como manipular o programa, pode executar em sala de aula uma ferramenta capaz de despertar o interesse dos alunos para matemática. E foi colocado também essa mensagem que diz respeito ao fator motivador do estudo: Para uma aprendizagem significativa, é preciso uma ação favorável do aluno que aprende, sua interação com o aluno é fundamental para que haja maiores relações das novas ideias com o que já se conhece para que não se limite à memorização. A habilidade do docente em estimular o alunado é fundamental. O docente intervindo ponderadamente despertará o aluno para a efetivação destas relações e a medida que estiverem construindo significados, também estarão melhorando esquemas já existentes, ou seja, melhorarão suas capacidades de estabelecer novas relações seja ela em qualquer situação que estiver. Dos Santos (2014).

Pela experiência em sala de aula verifica-se que para o assunto de números complexos, existe um grande vazio quanto a sua aplicação, uma ideia nova sobre números imaginários, onde aplica-se esta lógica algébrica? Os alunos sempre perguntam onde aplicarei isto em minha vida? e assim em busca de responder essas perguntas construtivas, Araújo (2014) fez uma aplicação em circuitos elétricos. É colocado vários circuitos para exemplificar o assunto dado, e o aluno precisa agregar seu conhecimento de física para armazenar a compreensão desse assunto, como também o professor deve ter conhecimentos técnicos de montar circuitos e fazer medições com equipamentos eletrônicos.

A Figura 7 trata de um circuito com suas impedâncias e as mesmas são representadas por números complexos. Isto pode ser mostrado em sala de aula e aplicado com uma finalidade muito útil em nosso dia a dia como os motores elétricos e geradores elétricos.

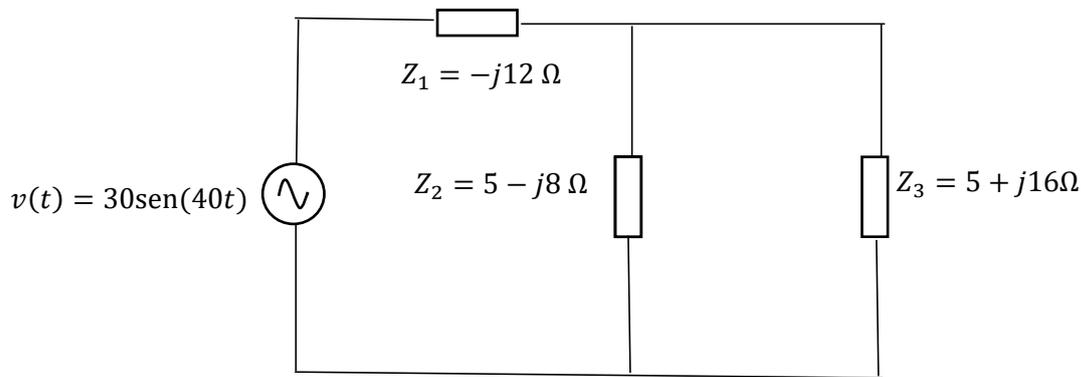


Figura 7: Circuito com duas impedâncias em paralelo e outra em série.

Num circuito, quando existem capacitores, os números complexos o termo imaginário fica negativo, quando existem indutores no circuito, o termo imaginário é positivo e quando existem resistores a parte real é representado por essa grandeza. No circuito da Figura 7 pode ser montado em laboratório e verificar sua impedância equivalente, e assim calculado com a mesma lógica dos números complexos e comparado os valores experimentais e teóricos. Essa atividade seria bem interessante para os alunos do Ensino Médio, que não sabem para que serve os números complexos.

Quando o aluno vê a matemática construindo algo interessante, a busca para compreendê-la é mais forte e cativante. Mesmo com muitos obstáculos de outras naturezas, todos sem exceção é capaz de aprender matemática, a vontade e o esforço são pontos essenciais para aprendizagem.

Na visão arquimediana o professor procura aplicar a matemática no espaço em que o aluno está inserido, ou desenvolver conforme o ambiente em que o aluno pretende seguir, está atividade estimula e motiva o aluno aos estudos.

A aprendizagem de conteúdos matemáticos por caminhos lúdicos está pautada na visão arquimediana do ensino da matemática. Ela nos sugere que o professor deve atuar durante o processo de ensino-aprendizagem exercendo a função de facilitador do processo, ou seja, agindo como mediador entre o aluno e a construção do conhecimento matemático, estimulando ideias matemáticas para que o aluno consiga estabelecer relações com a realidade que ele vivencia.

O professor deve realizar atividades com os alunos que os vislumbre, em seguida, partir para a matematização levantando questionamentos, finalizando com o registro do que o aluno aprendeu, uma forma de teoria. Este é o caminho

arquimediano segundo a proposta AME – Atividades Matemáticas que Educam. (p. 126, Fascículo 1, 2003).

Para o professor deflagrar ideias na cabeça do aluno, ele precisa apresentar situações–problemas instigantes, levantar questionamentos que induzam o aluno a pensar. Nunca dando a resposta, sempre dialogando até que ele mesmo consiga estabelecer relação (pingue-pongue), sempre ouvindo o que o aluno tem a acrescentar sobre o assunto, sem criticá-lo ou ridicularizá-lo.

Através dessas propostas de um caminho arquimediano é possível vencermos muitas das dificuldades que o ensino de matemática apresenta. Uma das soluções é trabalhar com simuladores de matemática em vários níveis, pois quando há interação, as estruturas cognitivas da criança se ativam e, então, vislumbram e geram estruturas de maior valia.

Os simuladores podem ter várias funções como: facilitar as atividades corporais, obter informações a partir de manipulações, fazer registros a partir de manipulações e permitir a ampliação do conhecimento. É muito importante observar que, com esse tipo de trabalho, o conhecimento não é dado pelo professor para o aluno, mas é sim, puxado de dentro do aluno.

Também foi levantando o desempenho de estudantes brasileiros quanto aprendizagem da matemática, e as estatísticas mostram que o sistema de ensino nas escolas públicas é precário e com muita deficiência, e esse dado é óbvio, pois em sala de aula existe um grande desinteresse nos estudos de matemática, visando melhorar esse quadro na escola em que atua mostra-se uma aplicação dos logaritmos na área de saúde. Lembruger (2014).

Nesse segundo momento da atividade deseja-se que os alunos comecem a compreender as vantagens de modelarmos situações do dia a dia pelo tipo de função matemática mais adequada. Na atividade a seguir, o modelo exponencial cumpre esse papel e contamos ainda com o auxílio de logaritmos para resolver cálculos mais precisos. O professor deverá discutir com seus alunos que a quantidade proveniente de cada dosagem (remédios) no organismo deverá seguir uma função do tipo exponencial. Por exemplo: a quantidade referente à primeira dosagem é dada pela função

$$c(t) = 400 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}},$$

onde  $c(t)$  indica a quantidade em mg do medicamento decorridas  $t$  horas da primeira dose. Tendo construído essa lei com seus alunos o professor deverá fazer os seguintes questionamentos:

Supondo que a pessoa tomou apenas uma dose do medicamento responda as seguintes perguntas:

- 1) Em quanto tempo a quantidade decaiu a oitava parte da quantidade inicial?
- 2) Considerando, determine quanto tempo levou para que a quantidade fosse de 128 mg?
- 3) Em quanto tempo a quantidade atingiu 40 mg?
- 4) Qual a quantidade após 50 horas?

Outras áreas afins como a física tem um campo vasto da aplicação da matemática, as equações de Galileu que é uma função do primeiro grau e do segundo grau, o movimento harmônico simples que exemplifica a função seno ou cosseno, que também ressalva a grande dificuldade que os alunos tem em matemática e que uma aplicação torna a aula mais dinâmica e contribui para o ensino-aprendizagem, parte desse trabalho utiliza-se de um programa de simulação de gráficos e depois utiliza experimentos da física para exemplificar a matemática desenvolvida para determinado assunto. Lima (2014).

Com o auxílio do programa winplot pode-se construir o gráfico da função  $f(x) = \text{sen}x$ . Mostra-se na Figura 8 o resultado da simulação.

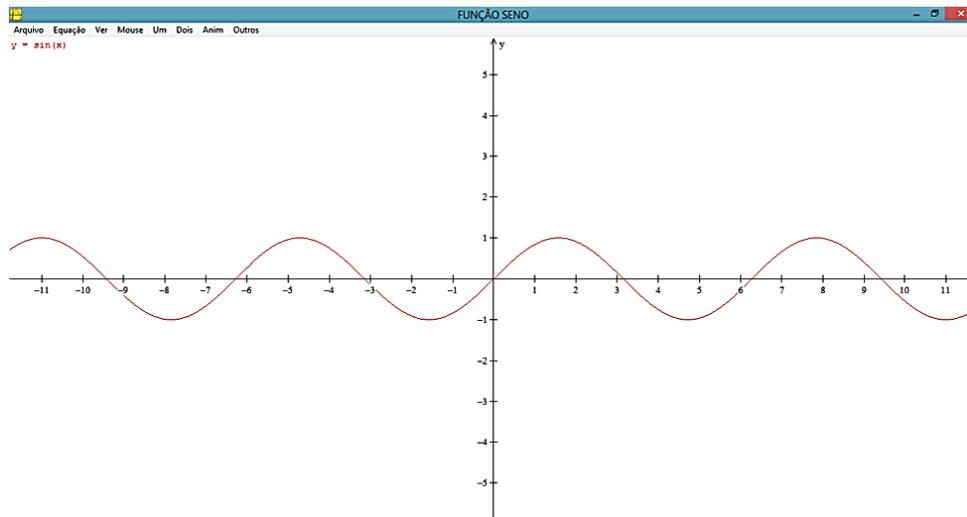


Figura 8: Simulação da função seno, usando Winplot.

Também com aplicações da Física, em lançamentos de foguetes e construindo os mesmos com garrafas pets e exemplificando na prática a utilização da equação do segundo grau para medir o alcance do foguetes, trabalhou com os alunos do 9<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental, antes disso utilizou o programa GeoGebra para fazer várias simulações com funções quadráticas. Moraes (2014).

Também focando o Ensino da Física, verifica-se que os alunos são levados a decorar fórmulas e muitas vezes não estão habilitados aos conceitos e a lógica matemática que está por

trás daqueles fenômenos físicos, os alunos também perguntam “para que serve isto?“, “a onde vou aplicar isto?”, ou ainda “para que isto se não vou trabalhar com isto?” o assunto se torna difícil e sem estímulo, pois é resolvido aplicando-se uma fórmula e pronto. Assim, fazendo-se uma modelagem matemática, desenvolvendo a fórmula e juntamente trabalhando os conceitos com aplicações práticas o ensino-aprendizagem tem maior potencial.

*Muitas vezes o ensino de Física inclui a resolução de inúmeros problemas, onde o desafio central para o aluno consiste em identificar qual fórmula deve ser utilizada. Esse tipo de questão, que exige, sobretudo, memorização, perde sentido se desejamos desenvolver outras competências. Não se quer dizer com isso que seja preciso abrir mão das fórmulas. Ao contrário, a formalização matemática continua sendo essencial, desde que desenvolvida como síntese dos conceitos e relações, compreendidas anteriormente de forma fenomenológica e qualitativa (PCN/MAIS p.38).*

Completa-se esse pensamento com a pergunta das qual praticamente nenhum professor de Física e Matemática escapam: Professor isso serve para quê? A vivência em sala de aula tem revelado que tal pergunta traduz em palavras o sentimento da maioria dos alunos que não consegue ver um sentido claro no ensino dessas duas disciplinas - situação que gera em curto período de tempo aversão e mais adiante, certamente, os diversos problemas com a aprendizagem e que são factíveis em avaliação como as realizadas pelo PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos) e pelo ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio). Maciel (2014).

Em quase todos os trabalhos na área de matemática é colocado as dificuldades e deficiência do ensino da matéria, como também a desmotivação dos alunos e o desinteresse para o estudo da disciplina. Além disso, enquanto docente, tivemos a oportunidade de entrar em contato com diferentes alunos de diversas idades e classes sociais, com crianças de oito anos e até com Jovens e Adultos em escolas públicas e particulares. Percebemos que, independentemente da idade ou classe social, os alunos, geralmente, apresentam as mesmas dificuldades de aprendizagem. Muitas vezes eles chegam a uma determina série sem os pré-requisitos necessários para aquela etapa do ensino, tendo dificuldades até mesmo em realizar operações simples de aritmética, não conseguindo fazer associações e inferências sobre conteúdos já trabalhados e, por isso, ficam impossibilitados de resolver problemas que lhes são apresentados em sala de aula. Assim, a maioria dos alunos costumam estar desmotivados e com baixa autoestima em relação à Matemática. Como reflexo disso, eles sempre nos questionam: para que serve isso? Onde aplicarei em minha vida? Ou seja, apresentam grandes angústias e ansiedades nos momentos das aulas. Souza (2014).

Todos os professores tem seu programa para construir novos aprendizados, e muitos alunos passam de ano sem construir o conhecimento efetivo da matemática, que motivação terá um aluno que entra numa sala de aula e não sabe absolutamente nada que o professor está passando? Tudo dependerá de seu esforço para retroceder e buscar a compreensão dos assuntos que foram deixados para trás.

Muitas vezes ensinamos métodos para alcançar a resposta, procedimentos mecânicos do tipo “siga o modelo”, fórmulas prontas e descontextualizadas. Não apresentando significado ao aluno, que geralmente, estuda, aprende, faz a prova e esquece. Mais do que uma alternativa de ensino, a modelagem matemática para o ensino pode ser considerada uma forma de envolver os alunos com situações que extrapolem o contexto de sala de aula, dinamizar a compreensão da matemática possibilitando um aprendizado mais dinâmico e crítico.

Tem-se então, ao ensinar matemática através da modelagem matemática a necessidade e o desafio de fazer uma abordagem com foco na realidade do aluno, centrando atenção no que é construído e não no que é transmitido. A transmissão e a construção do conhecimento matemático são importantes, porém estamos formando pessoas, cidadãos, vidas independentes e conhecedoras. Neste sentido o papel principal do professor se volta à orientação da construção de um cidadão crítico, criativo e autônomo por meio do ensino/aprendizagem do conteúdo científico. Nespolo (2014).

Bertulani (1998), ressalta que a eletrônica é o ramo da ciência que trata com componentes eletrônicos e suas funções. É a parte da física que trabalha com as variações de grandezas elétricas para captar, transmitir e processar dados. Utilizam circuitos elétricos e ferramentas válvulas termiônicas (Componente baseado no efeito Edison, onde um filamento, próximo a uma placa metálica, é polarizado, e possui uma corrente constante em seus terminais, a esse efeito, se dá o nome de efeito Edison, descoberto em 1883). Ou (O efeito ou emissão termiônica é o processo pelo qual os elétrons atingem energia suficiente, por meio do calor, para escapar da superfície do elemento metálico emissor, descoberto pelo inventor americano Thomas Alva Edison). Além de semicondutores (tais como transistores e circuitos integrados), também são usados tubos de raios catódicos e demais componentes, como os baseados no efeito fotoelétrico (células fotoelétricas, válvulas fotomultiplicadoras).

Com o projeto sendo baseado na explicação da matemática em circuitos simples, é essencial a busca de uma definição formal do seu significado, para apresentação da sua importância e de seu campo de atuação. Dessa forma Ubiratan D’Ambrosio define matemática como: Vê-se a disciplina de matemática como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo da sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade

sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural. Isso se dá, da mesma maneira com as técnicas, as artes, as religiões e as ciências em geral. Trata-se da construção de corpos de conhecimento em total simbiose dentro de um mesmo contexto temporal e espacial, que obviamente tem variado de acordo com a geografia e a história dos indivíduos e dos vários grupos culturais a que eles pertencem – famílias, tribos, sociedades, civilizações. A finalidade maior desses corpos de conhecimento têm sido a vontade, que é efetivamente uma necessidade, desses grupos culturais de sobreviver no seu ambiente e de transcender, espacial e temporalmente, esse ambiente. (D’AMBROSIO, 1996, p.9)

Complementando, Feynman (2006) diz que a matemática inicialmente era a ciência que tinha por objetivo medir e obter as propriedades das grandezas, porém atualmente é cada vez mais a ciência do padrão e da dedução.

A lógica é a base fundamental da matemática e da eletrônica, pois além da eletrônica ter sua base fundamentada na matemática, esta é muito mais do que apenas a resolução de cálculos e expressões matemáticas. Dessa forma, o desenvolvimento da lógica desde cedo é essencial para dar continuidade ao processo de aprendizado da eletrônica. A definição da lógica pode ser representada por: “A lógica descreve as formas, as relações e as propriedades das preposições, em decorrência da construção de um simbolismo regulado e ordenado que permita diferenciar linguagem cotidiana e linguagem formalizada” (PERCÍLIA, 2012, p.1), deixando ainda mais clara a importância da mesma, na eletrônica, pois muitas das dificuldades encontradas na resolução de problemas aparecem paralelas a esses problemas lógicos.

Na eletrônica digital temos a utilização da chamada lógica booleana. Ela foi desenvolvida pelo irlandês George Boole (1815-1864), que mostrou sistemas matemáticos para formulação de declarações lógicas com símbolos e fórmulas para que a lógica pudesse ser resolvida de uma forma mais próxima à álgebra comum Floyd (2007).

A área da matemática que contempla a lógica booleana é chamada de matemática discreta, nela é visto um novo escopo de possibilidades dentro da própria matemática, saindo das infinitudes normais da matemática padrão.

A álgebra de Boole tem expressões contendo letras e operações. As letras (variáveis) em uma expressão booleana não representam números; ao contrário, representam os valores verdadeiro e falso. Assim, em uma expressão algébrica booleana, as letras podem ter apenas dois valores. (SCHEIRNERMANN, 2003 p. 27).

A manipulação de variáveis dentro da lógica booleana não toma uma conotação de equivalência com as tensões e os circuitos eletrônicos. Scheirnermann (2003) tem sua obra construída mostrando a matemática discreta sem entrar no assunto da eletrônica. Já Floyd

(2007) tem sua obra voltada a eletrônica, ele aborda lógica da seguinte forma: O termo lógica é aplicado a circuitos digitais usados para implementar funções lógicas. Diversos tipos de circuitos lógicos digitais são os elementos básicos que formam os blocos construtivos de sistemas digitais complexos como o computador. (FLOYD, 2007 p. 29).

Enquanto Floyd (2007) em sua obra aborda os circuitos digitais e seu uso, centrando-se na criação e explicação dos circuitos. Observa-se, porém, que Scheirnermann (2003) aprofunda-se na matemática utilizada por Boole e as afirmações dele.

Agrega-se a estes estudos de pesquisa um desenvolvimento na elaboração da aplicações dos conteúdos de matemática. Projetando-se circuitos simples na eletrônica, utilizando-se componentes eletrônicos fundamentais como resistores, capacitores, diodos e transistores, elaborando-se montagens de circuitos que aplique a matemática desenvolvida, fazendo-se medições e simulações utilizando o osciloscópio que é um medidor bastante útil e eficaz para fornecer resultados das variações de tensões elétricas. Uma forma mais eficaz de produzir aplicações em sala de aula, que estimule o aprendizado do aluno, que os cálculos tão fundamentais para nossa vida, seja contemplado com uma demonstração prática estimulante, é o objetivo desta obra, provocar no aluno uma motivação para estudar matemática e vencer os desafios.

## 4 APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA NA ELETRÔNICA

São analisados sete circuitos com aplicações da matemática do Ensino Fundamental e Médio e duas aplicações para o Ensino Superior. Primeiro se observa análise matemática, depois o material utilizado na experiência, e para concluir a parte experimental, ou uma simulação no GeoGebra quando precisar, a matemática desenvolvida está no Apêndice D, como também a contribuição de alguns matemáticos como referência dos assuntos de eletricidade ou eletrônica no Apêndice A, também no Apêndice B e C foram colocados a descrição de componentes e equipamentos aqui utilizados nas experiências.

### 4.1 SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

#### 4.1.1 Análise Matemática

Os sistemas de numeração mais trabalhados na computação e na eletrônica são (sistemas binário, decimal, hexadecimal e octal). Então o sistema binário é representado pelos seguintes algarismos: binário (0,1), decimal (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9), octal (0,1,2,3,4,5,6,7) e o hexadecimal (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F).

Pode-se transformar essa conversão numa realidade visual e prática, muito aplicado nos visores de relógios e como também na computação, a forma mais simples de demonstrar é utilizar displays de sete segmentos (leds). Então passar de um sistema para outro e mostrar num display montado em um circuito vai tornar a aula mais interessante, então por exemplo, converter 4 (na base decimal para binário), fazendo as divisões sucessivas, vamos encontrar  $4_{10}=100_2$ . Assim para adquirir o número 4 no display preciso aplicar as entradas de um decodificador de 7 segmentos que é DCBA, (Apêndice B) nessa sequência significa que em binário fica 0100, e neste caso temos que o nível lógico 1 representa a presença de tensão, que nos circuitos integrados é próximo de 5 V. O nível lógico 0 representa uma tensão que pode ser próxima de 0V. Simulando num programa de computador temos a formação do número 4 que em binário é 0100 e o número 5 que em binário é 0101, o circuito da Figura 9 mostra uma chave que pode ser ligada no 0 ou 1. Assim conforme o número desejado de 0 à 9, pode-se colocar a sequência da ligação das chaves. Esta sequência é dada por V1, V2, V3 e V4, onde 5V é nível lógico 1 e 0V é nível lógico 0. Assim observa-se que na formação do 4 a sequência ficou 0100 apenas a chave V2 está ligada. Para o número 5, a sequência foi de 0101, ou seja apenas as chaves V2 e V4 estão ligadas.

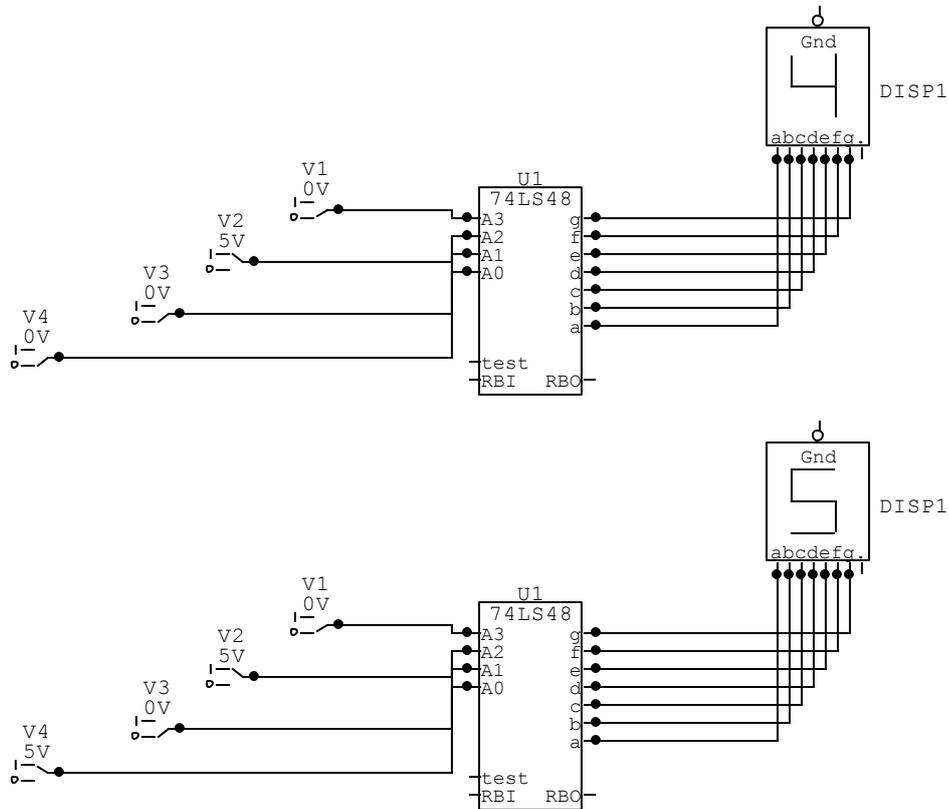


Figura 9: Mostra o resultado da simulação para formar os números 4 e 5, as chaves digitais, o decodificador com as entradas (A1, A2, A3, A4) para sequência binária, e as saídas (a,b,c,d,e,f,g) que vão para os leds do display para formar os números de 0 à 9.

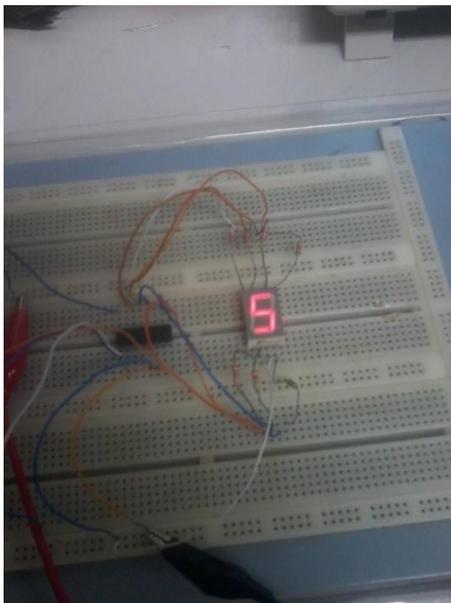
#### 4.1.2 Material Utilizado

- 7 resistores de 100  $\Omega$
- 1 display (de 7 segmentos).
- 1 gerador de sinais
- 1 suporte com 4 pilhas de 1,5 V.
- 1 CI SN 7448 (decodificar de 7 segmentos)
- 1 Protoboard (Placa de Montagem)

#### 4.1.3 Análise Experimental

Para fazer a montagem é preciso ter o diagrama de CI 7448 (decodificador de 7 segmentos) e o diagrama do display (Apêndice B), a montagem é seguir as pinagens que vão

ser 4 entradas e 7 saídas para o display (mostrador de 7 segmentos do tipo catodo comum), a Figura 10 mostra o resultado da montagem e as entradas DCBA nessa sequência coloca-se essas entradas ou no polo positivo da bateria que significa nível lógico 1 ou no polo negativo que significa nível lógico 0. A Figura 10 indica o esquema desses dois componentes, e é necessário que cada ligação para o display tenha um resistor de aproximadamente  $100\ \Omega$  para manter uma corrente satisfatória pra o display. Pode-se colocar chaves que quando ligadas é nível lógico 0 e quando desligadas nível lógico 1. Assim, ficando uma sequência de quatro chaves, se for para formar por exemplo o número 6, a sequência será Chave 1 ligada, chave 2 desligada, chave 3 desligada, chave 4 ligada, ou seja fazendo a sequência binária 0110 que corresponde ao número 6.



D	C	B	A	Display
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9

Figura 10: Mostra o resultado da montagem de um circuito com CI7448 e a saída S que é o display. Tabela 1: Valores das entradas DCBA do decodificador 7448 e display fazendo o número 5.

## 4.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

### 4.2.1 Análise Matemática

O objetivo é mostrar na tela do osciloscópio um capacitor carregando totalmente, e este carregamento é uma função exponencial do tempo, então matematicamente para se chegar nesta função é resolver uma equação diferencial de primeira ordem, porém como o objetivo é mostrar

aos alunos de nível médio, a curva do capacitor a análise matemática é só para conhecimento do professor.

Na Figura 11 temos uma fonte de tensão contínua com valor  $V_1$ , uma chave  $S_1$ , um resistor com valor  $R_1$  e um capacitor com valor  $C_1$ , o tempo de carregamento é contado a partir do momento do fechamento da chave  $S_1$ , este tempo de carregamento depende dos valores de  $R_1$  e  $C_1$ .

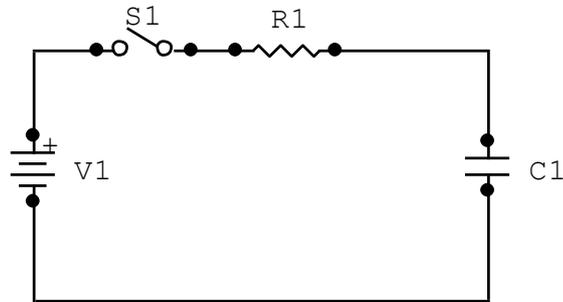


Figura 11: Circuito RC para analisar o carregamento do capacitor a partir do fechamento da chave  $S_1$ .

Aplicando lei de Kirchhoff das tensões tem-se

$$V_1 - R_1 i - \frac{q}{C} = 0 \quad (\text{I})$$

mas,

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (\text{II})$$

então,

$$R_1 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_1} = V_1. \quad (\text{III})$$

Na equação (I),  $V_1$  é o valor da tensão da fonte,  $R_1$  é o valor do resistor,  $i$  é a corrente do circuito,  $q$  é a carga elétrica no capacitor e  $C$  é a capacitância do capacitor.

Esta equação diferencial (III) descreve a variação com o tempo da carga  $q$  no capacitor da figura. Para resolvê-la precisamos encontrar a função  $q(t)$  que satisfaz essa equação e também a condição de que o capacitor está inicialmente descarregado, ou seja de que  $q = 0$  no instante  $t = 0$ . Assim a solução será

$$q(t) = C_1 V_1 \left(1 - e^{-t/R_1 C_1}\right), \quad (\text{IV})$$

onde  $R_1 C_1$  é chamado de constante de tempo e é representado por  $\tau = RC$ .

Do ponto de vista da tensão no capacitor, basta dividir a expressão anterior por  $C$  e então,

$$V(t) = V_1 (1 - e^{-t/R_1 C_1}) \quad (\text{V})$$

Um capacitor carregando exemplifica bem este assunto, resolvendo uma equação diferencial chegamos numa expressão dada por

$$V(t) = V_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \quad (\text{VI})$$

Assim, o tempo que o capacitor leva para se carregar depende dos valores de resistência e capacitância. Fazendo o tempo tender para o infinito, verifica-se que,

$$V(t) = V_1$$

ou seja, o capacitor está totalmente carregado.

Se fizermos o tempo  $t = 0$ , verifica-se que  $V(t) = V_1(1 - 1) = 0$ , ou seja, o capacitor, inicialmente, não tem carga. Os capacitores tem várias aplicações, como em filtros, fontes de alimentação, circuitos osciladores, etc, alguns tipos de capacitores e seus valores se encontram no Apêndice B.

#### 4.2.2 Simulação no GeoGebra

A curva encontrada no GeoGebra corresponde a valores negativos e positivos da abscissa ou eixo x, e a análise no carregamento do capacitor é dependente do tempo, e o tempo só conta-se a partir do zero, assim chega-se ao mesmo gráfico encontrado no experimento, e que amplitude do sinal é 8 V, logo o que se espera é que num tempo de aproximadamente 5 ms o capacitor já esteja carregado totalmente, isso porque se substituirmos  $5\tau$  na fórmula (VI), onde  $\tau = RC$ , tem-se que  $v(t) = 0,99V_1$ , onde  $V_1$  é a tensão da fonte e  $v(t)$  é a tensão no capacitor em função do tempo. Logo houve uma boa aproximação do gráfico experimental, o que torna o GeoGebra uma ferramenta bastante útil na análise de simulações gráficas.

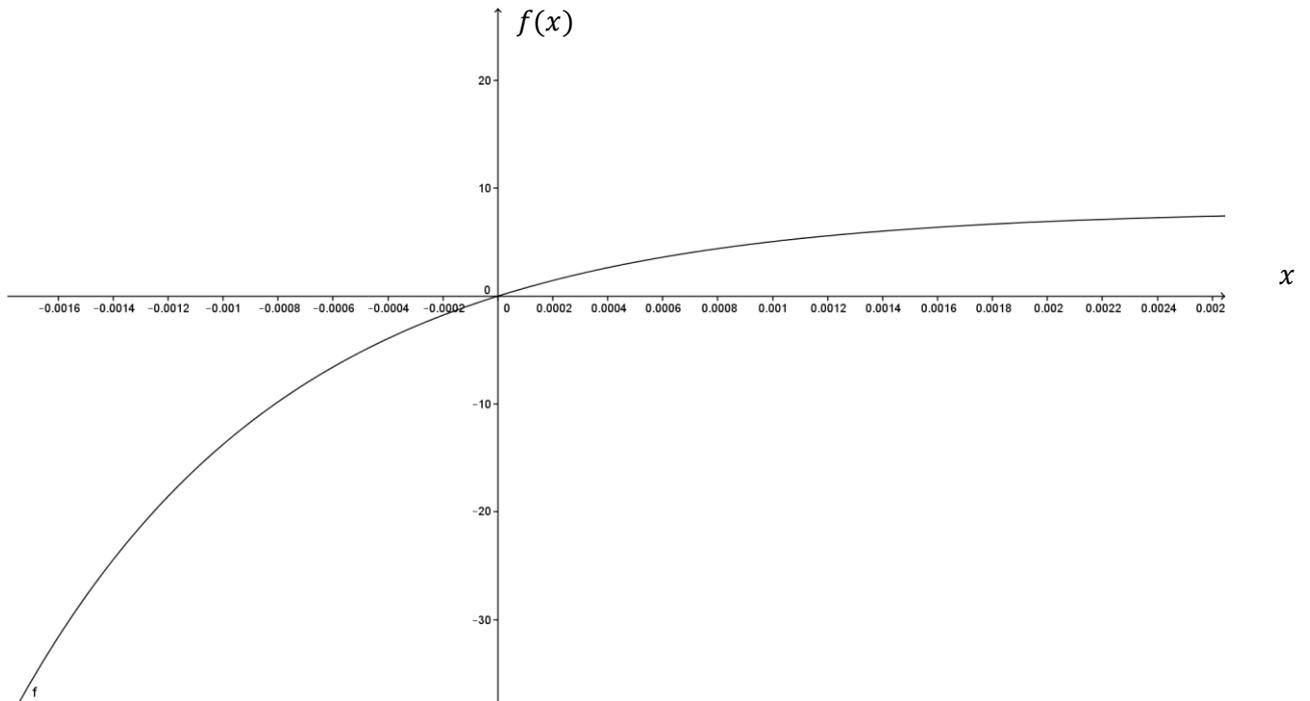


Gráfico 1: Gráfico da função  $f(x) = 8(1 - e^{-\frac{x}{10^{-3}}})$

No gráfico 1, o valor  $10^{-3}$  equivale ao produto de  $RC$ , ou seja  $1\text{ k}\Omega$  por  $1\text{ }\mu\text{F}$  e amplitude de  $8\text{V}$ .

#### 4.2.3 Material Utilizado

- 1 Capacitor de  $1\text{ }\mu\text{F}$
- 1 Resistor de  $1\text{ k}\Omega$
- 1 Gerador de sinais
- 1 Osciloscópio
- 1 Protoboard

#### 4.2.4 Análise Experimental

Usa-se um capacitor de  $1\text{ }\mu\text{F}$  em série com um resistor de  $1\text{ k}\Omega$ , conforme a Figura 13, após montar o circuito no protoboard, regula-se o gerador de sinais para uma amplitude de  $8\text{ V}$  e seleciona uma onda quadra (permite observar o capacitor carregando, porque tem um regime permanente constante depois cai para zero e assim periodicamente), após isso conecta a saída do gerador a ponteira com duas garras, sendo uma vermelha (positiva) e a outra preta

(negativa). Coloca-se entre o capacitor e o resistor, ou seja medindo-se a tensão total, conforme a Figura 13, a ponteira vermelha está no terminal do capacitor e a ponteira preta no terminal do resistor. Assim o circuito está montado para análise com o osciloscópio, que tem dois canais, escolhe-se um dos canais e conecta no capacitor, e na Figura 12 observa-se o resultado experimental da curva do capacitor.

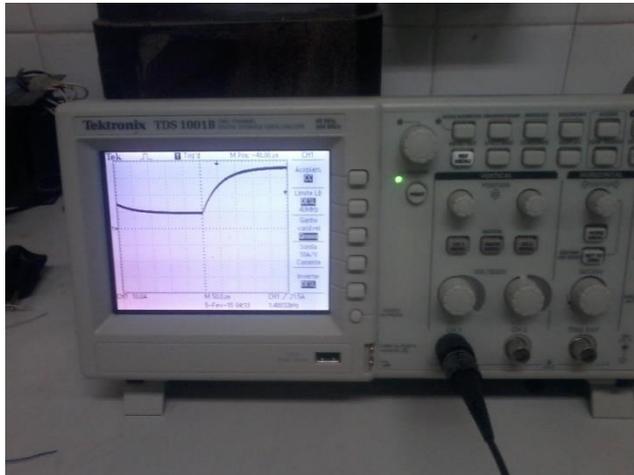


Figura 12: Curva do capacitor no Osciloscópio.



Figura 13: Circuito Resistor em série com o Capacitor.

### 4.3 FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

#### 4.3.1 Análise Matemática

Usa-se a Lei de Ohm (Apêndice A) que envolve corrente elétrica, tensão elétrica e resistência elétrica, em qualquer circuito elétrico, sabe-se que a constante de proporcionalidade é a resistência elétrica entre a tensão e corrente, logo seu comportamento é uma função do primeiro grau, e os resultados experimentais nos mostra graficamente uma reta. Assim, é usado uma fonte variável para analisar essa hipótese, sabe-se que a lei de Ohm é dada por  $V(i) = R \cdot i$ , onde  $V$  é a tensão elétrica,  $R$  é a resistência elétrica e  $i$  é a corrente do circuito.

No circuito da Figura 14 tem-se um fonte senoidal  $V(t)$ , um resistor de valor  $R_1$  que está em série com um resistor de valor  $R_2$  e a corrente que irá circular é dependente do tempo  $i(t)$  também terá um comportamento senoidal.

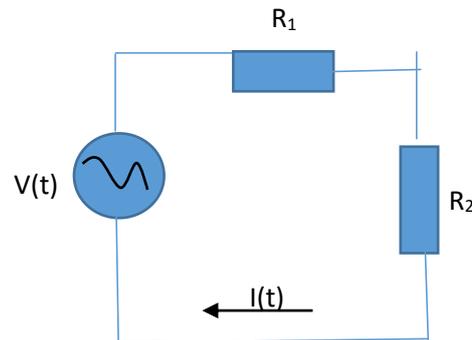


Figura 14: Circuito formado por dois resistores em série e uma fonte variável

A tensão total do circuito é dado por  $V(t)$ . Essa tensão é dividida para  $R_1$  e  $R_2$  proporcionalmente aos valores de resistência, assim pela lei de Ohm a corrente do circuito será:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_1 + R_2} \quad (\text{VII})$$

Em  $R_2$  a corrente é dada por

$$i(t) = \frac{V_2(t)}{R_2}, \quad (\text{VIII})$$

assim a tensão total do circuito em função da corrente fica  $V(i) = i.(R_1 + R_2)$ , que é uma função do primeiro grau.

Se a fonte é senoidal, ou seja,

$$V(t) = V_p \text{sen}(\omega t), \quad (\text{IX})$$

a corrente do circuito será

$$i(t) = \frac{V(t)}{R_1 + R_2},$$

ou ainda,

$$i(t) = \frac{V_p \text{sen}(\omega t)}{R_1 + R_2}. \quad (\text{X})$$

Daí, aplicando a lei de Ohm, encontra-se a resistência elétrica para um determinado tempo  $t$ ,

$$R = \frac{V(t)}{i(t)} = \frac{V_p \text{sen}(\omega t)}{i_p \text{sen}(\omega t)} = \frac{V_p}{i_p} = R_1 + R_2,$$

que é um valor constante.

Portanto,  $V(i) = Ri$  é uma função do primeiro grau e será analisada no GeoGebra e no osciloscópio.

#### 4.3.2 Simulação no GeoGebra

A função simulada no GeoGebra foi a equivalente ao circuito com dois resistores de  $10\text{ k}\Omega$  e  $1\text{ k}\Omega$ , ou seja  $V(i) = 11i$ .

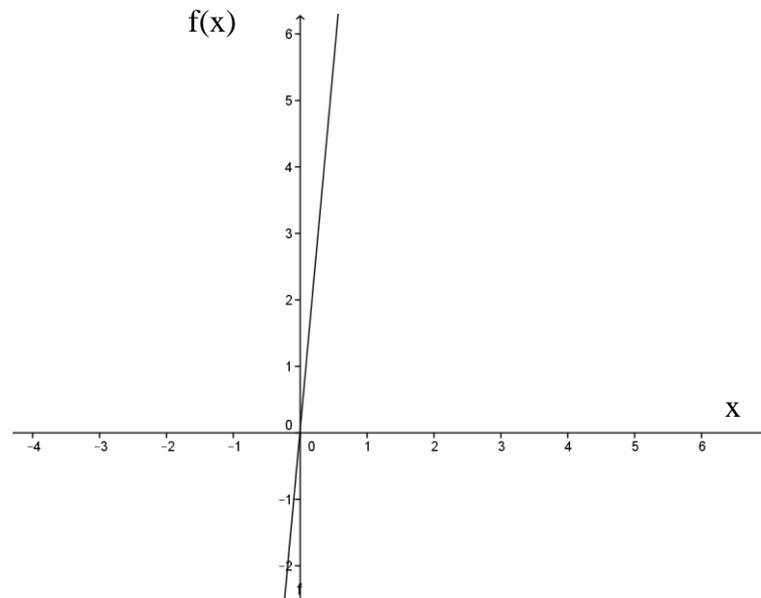


Gráfico 2:  $f(x) = 11x$ , função do primeiro grau.

#### 4.3.3 Material Utilizado

1 Resistor de  $1\text{ k}\Omega$  / 0,125

W 1 Resistor de  $10\text{ k}\Omega$  /

0,125W 1 Gerador de Sinais

1 Osciloscópio

#### 4.3.4 Análise Experimental

Monta-se o circuito no protoboard colocando dois resistores em série (Figura 15), pode-se colocá-los de  $1\text{ k}\Omega$  e o outro de  $10\text{ k}\Omega$ , após montado o circuito, alimenta-os com uma tensão senoidal vinda do gerador de sinais, pode-se colocar uma tensão de 8 V de pico a pico e

uma frequência de 1 kHz, é independente da amplitude e da frequência, porém estes valores não dá uma boa visualização na tela do osciloscópio, assim, mede-se no canal 1 do osciloscópio a tensão total do circuito, e no canal 2 mede-se a tensão no resistor de 1 k $\Omega$ . Usa-se a função modo XY do osciloscópio, entrando no canal y em função do que está entrando no canal x. As Figuras 15 e 16 a seguir mostram os resultados do experimento.

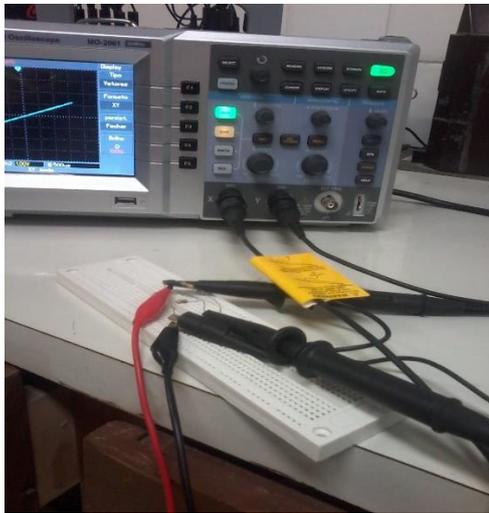


Figura 15: Dois resistores em série alimentados por onda senoidal e ligação com o osciloscópio

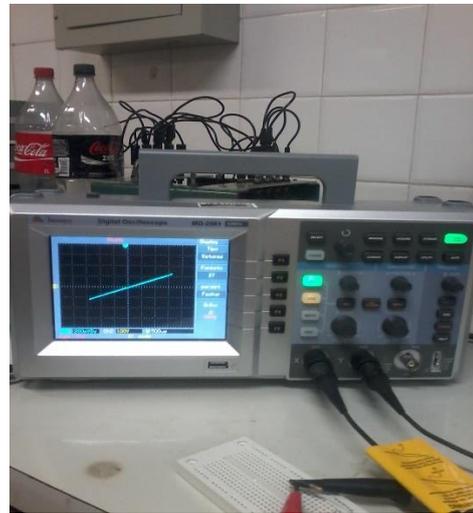


Figura 16: Plotagem no osciloscópio dos sinais da tensão total e da corrente no resistor, mostrando a reta esperada

## 4.4 FUNÇÃO SENO

### 4.4.1 Análise Matemática.

A forma mais comum de potência elétrica disponível no mundo é produzida por geradores que convertem energia mecânica em elétrica. A maioria desses geradores fornece uma tensão alternada cuja forma de onda é muito semelhante mostrada na Figura 17. Este tipo de forma de onda é comumente chamado uma onda seno ou senóide. Ela é chamada de senóide, porque a equação que a descreve é dependente da função trigonométrica chamada

É necessário dizer que a senóide é de grande interesse para nós, não apenas por ser a forma de onda de tensão das linhas de alimentação (usualmente 220 V / 60 Hz) mas também porque é inerentemente produzida em circuitos eletrônicos chamados osciladores, que constituem a base da maioria dos sistemas de comunicação (rádio, TV). Além do mais, a senóide é relacionada a consideráveis fenômenos naturais e tem certas propriedades matemáticas que a tornam muito utilizada. Ela pode ser diferenciada ou integrada e ainda

fornece um resultado senoidal. Também, a superposição de senóides de mesma frequência resulta numa senóide de frequência idêntica. Por exemplo ela pode ser mostrada por uma técnica matemática chamada análise de Fourier, onde a combinação de senos e cossenos podem gerar outros tipos de sinais.

Parâmetros de uma tensão senoidal:

- A tensão de pico:  $V_P$  [V]
- A tensão pico a pico:  $V_{PP} = 2V_P$  [V]
- A Frequência do sinal:  $f$  [Hz]
- O Período do sinal:  $T$  [s]
- A tensão média:  $V_m$  [V]
- A tensão eficaz ou rms:  $V_{rms}$  [V]

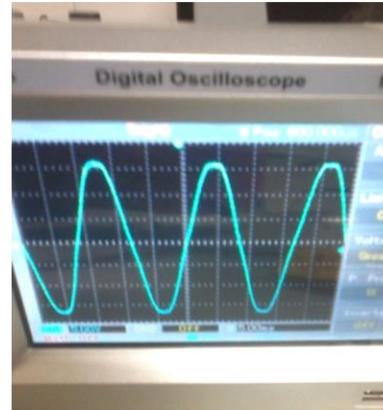


Figura 17: Sinal Senoidal plotado no osciloscópio

Temos:  $f = \frac{1}{T}$ , onde  $f$  é a frequência e  $T$  é o período

$V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$ , A demonstração matemática desta fórmula no Apêndice D.

#### 4.4.2 Simulação no GeoGebra.

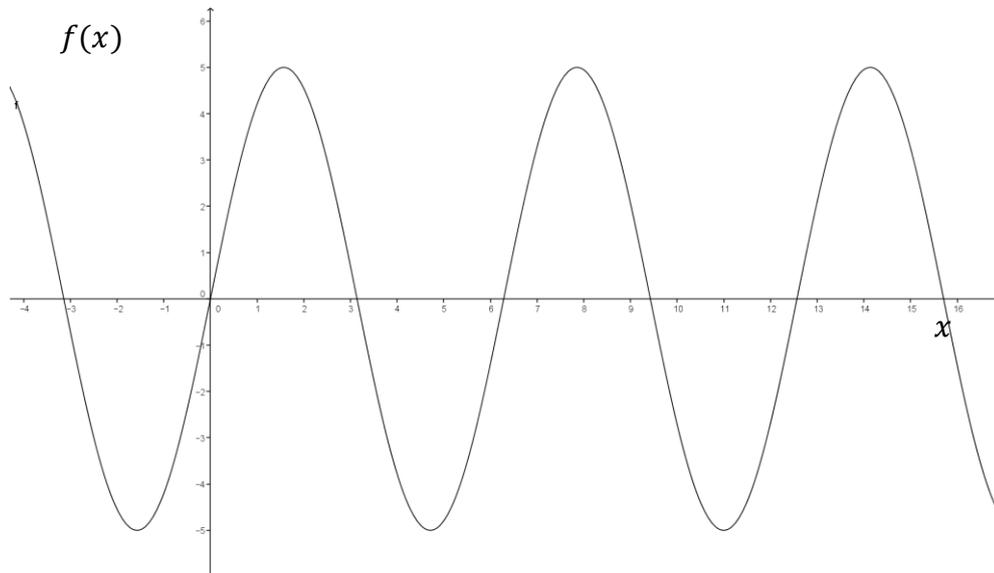


Gráfico 3: A função seno do tipo  $f(x) = 5\text{sen}x$ , onde temos uma amplitude de 5V, fase igual a 0 e o período igual a  $2\pi$

#### 4.4.3 Material Utilizado

1 Transformador 220 V / 12 V

1 Osciloscópio.

1 protoboard

1 resistor de 10 k $\Omega$  / 0,125 W

1 bobina de 900 espiras / 24 mH

1 bobina de 600 espiras/ 16 mH

#### 4.4.4 Análise Experimental

Usa-se duas bobina de 900 espiras e 600 espiras para mostrar a indução magnética (Contribuições de Michael Faraday e Maxwell, Apêndice A) e o princípio de funcionamento do transformador, ou seja alimenta a primeira bobina com uma onda senoidal (usa-se o gerador de sinais), conecta a segunda bobina no osciloscópio e aproxima-se da primeira (Figura 18), até que o sinal senoidal e a variação de sua amplitude seja observada na tela do osciloscópio. Outra experiência para ser analisada é o sinal senoidal gerado pela rede elétrica residencial onde a tensão  $\sim$ 220 V e a frequência 60 Hz. Para isso utiliza-se um transformador de 220 V para 12 V. O primário do transformador é ligado na rede elétrica e o secundário a uma resistor de 10 k $\Omega$  e conecta as ponteiros do osciloscópio (Figura 19) para observar o sinal senoidal reduzido para 12 V, e assim os parâmetros do sinal são adquiridos para termos as características do sinal senoidal da rede elétrica.



Figura 18: Uma bobina se aproxima da outra e capta seu campo magnético



Figura 19: Um transformador 220 V/ 12 V e um resistor de 10 k $\Omega$  é alimentado no secundário.

Colocou-se uma frequência de 1kHz e uma amplitude de 4V (Figura 18), e observa-se que a tensão é menor na outra bobina e a mesma é proporcional a razão do número de espiras do primário em relação ao secundário, o período analisado foi de 1 ms, ou seja a frequência não é alterada.

Na análise da rede de 220V (Figura 19), a tensão foi reduzida para 12V, e o resistor de 10 k $\Omega$  serve para fazer análise da corrente por lei de Ohm. A tensão de pico observada foi de 17 V, nos cálculos temos  $V_P = V_{rms} \cdot \sqrt{2} = 12 \cdot \sqrt{2} = 16,97 V$ , e o período foi de 16,5 ms, que corresponde uma frequência de 60 Hz, o que era esperado.

## 4.5 EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

### 4.5.1 Análise Matemática.

O objetivo é analisar uma circunferência no osciloscópio, assim será necessário analisar a corrente elétrica através do resistor  $R_1$  e a tensão elétrica no capacitor  $C_1$  (vê Figura 20), essa análise será transferida para os canais X e Y do osciloscópio. Com estes dois parâmetros, observa-se a defasagem de 90<sup>0</sup> e amplitudes iguais no resistor e capacitor, variando-se a frequência varia-se a reatância capacitiva.

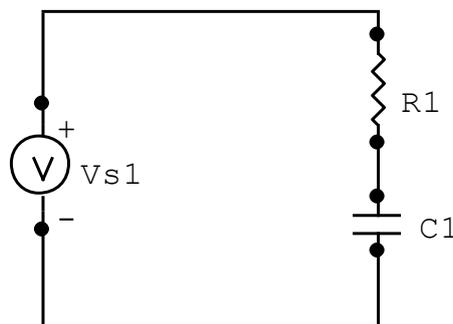


Figura 20: Circuito RC , onde  $V_{s1}$  é tensão eficaz da fonte senoidal,  $R_1$  é o valor da resistência do resistor que fará um divisor de tensão com o capacitor  $C_1$ .

Temos aplicando a lei de Ohm nos elementos do circuito, onde  $V_R$  é tensão no resistor,  $V_C$  é tensão no capacitor e  $X_C$  é a reatância capacitiva que é inversamente proporcional a frequência do sinal da fonte, e é dado por  $X_C = \frac{1}{2\pi f C}$ .

$$V_R = R \cdot i \quad (\text{XI}) \quad \text{e} \quad V_C = X_C \cdot i \quad (\text{XII})$$

Na forma trigonométrica

$$V_R = V_P \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (\text{XIII}) \quad ; \quad V_C = V_P \cdot \text{cos}(\omega t) \quad (\text{XIV})$$

Temos o canal x e o canal y do osciloscópio

$$X = V_R = V_P \cdot \text{sen}(\omega t) ; \quad Y = V_C = V_P \cdot \text{cos}(\omega t),$$

$$X^2 + Y^2 = V_P^2 \cdot \text{sen}^2(\omega t) + V_P^2 \cdot \text{cos}^2(\omega t) = V_P^2 \quad (\text{XV})$$

Temos uma equação da circunferência (XV), ao visualizar a mesma na tela do osciloscópio, temos que as amplitudes são iguais e defasados de  $90 \text{ graus}$  entre os sinais, assim neste momento  $R = Xc$ .

A montagem do circuito para a mesma amplitude implica que devemos saber para que valores de R e frequência fazem com que  $R = Xc$  ou seja  $R = \frac{1}{\omega \cdot C}$ , assim se um capacitor é desconhecido, com essa simples experiência é possível determiná-lo.

#### 4.5.2 Simulação no GeoGebra

A amplitude do sinal dá o raio da circunferência, a circunferência também pode ser simulada no computador, porém na montagem do circuito a sua importância vai além de sua visualização.

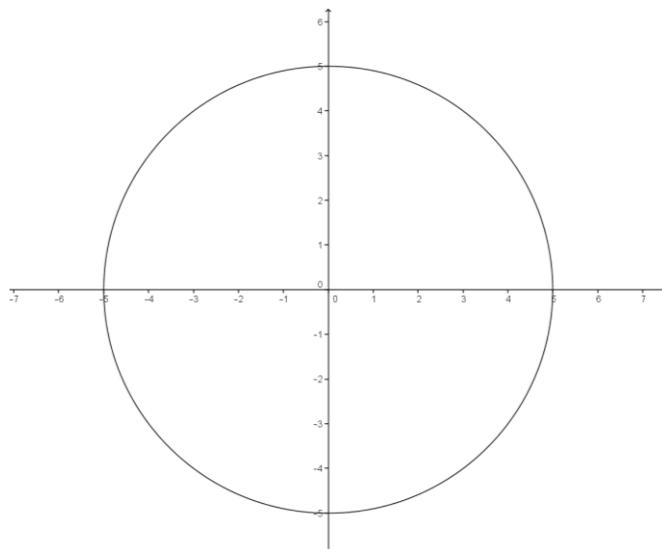


Gráfico 4: Simulação da equação  $X^2 + Y^2 = 25$  com amplitude de 5V

#### 4.5.3 Material Utilizado

- 1 Resistor de  $1\text{ k}\Omega$
- 1 Capacitor de  $1\text{ }\mu\text{F}$
- 1 Gerador de Sinais
- 1 Osciloscópio

#### 4.5.4 Análise do Experimento

Monta-se o circuito no protoboard, ou seja um capacitor de  $1\text{ }\mu\text{F}$  em série com um resistor de  $1\text{ k}\Omega$ , após isso regula-se o gerador de sinais para onda senoidal e amplitude  $5\text{ V}$ , conecta-se as pontes do osciloscópio ao circuito capacitor e resistor, para o canal  $x$  vai a tensão no resistor e para o canal  $y$  vai a tensão no capacitor, de imediato o osciloscópio mostrará o gráfico a Figura 21, no início as amplitudes podem estar diferentes, se isso acontecer regula-se a frequência de modo que as amplitudes fiquem iguais, sinal amarelo é a tensão no resistor e sinal azul é a tensão do capacitor, após essa visualização, o osciloscópio tem uma opção que faz um canal ficar em função do outro, é chamado de modo  $xy$ , ou seja  $y(x)$ , então escolhe-se essa opção e assim têm-se o gráfico da Figura 22 que é uma circunferência de raio  $1,25\text{ V}$ .

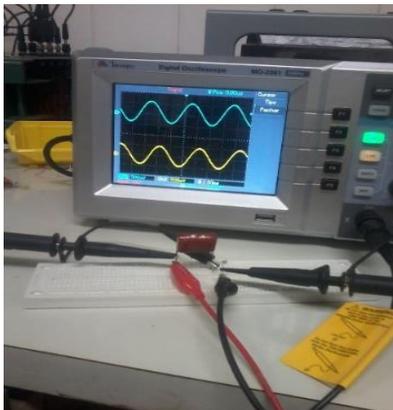


Figura 21: Sinal amarelo, tensão no resistor, e sinal azul tensão no capacitor.

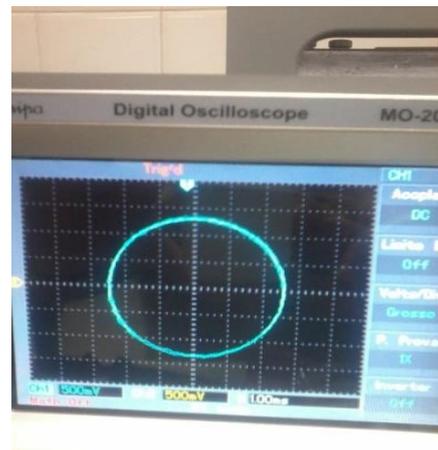


Figura 22: Circunferência de raio  $1,25\text{ V}$ , nesse momento  $R = X_C$ .

O que se pode observar é que a corrente é a mesma para os dois componentes capacitor e resistor porque estão em série, e que quando  $X_C$  for igual a  $R$ , as amplitudes serão iguais, pois pela lei de Ohm, tem-se que  $V_R = R \cdot i$  e  $V_C = X_C \cdot i$ , porém a tensão total não pode ser a soma de  $V_R$  e  $V_C$ , pois são dois vetores defasados de  $90^\circ$ , a tensão total tem que ser  $V_T = \sqrt{V_R^2 + V_C^2}$

(XVI), analisando-se os valores das amplitudes das tensões no resistor e no capacitor, observa-se os seguintes valores:  $V_R = 1,25 V$  e  $V_C = 1,25 V$ , (observe na Figura 22 o valor da escala, que está com as cores azul e amarela estão indicando o valor de 500mV, o raio da circunferência de cor azul, está dando dois quadrados e meio de divisão na tela do osciloscópio. Fazendo-se a multiplicação de  $500 mV \times 2,5 = 1,25V$ , encontra-se os valores de tensão de pico no resistor e capacitor), aplicando-se a equação XVI e calculando-se a tensão total encontra-se o valor de 1,76 V, essa foi a tensão verdadeira inicial da fonte. (pois a mesma no painel indicava 5 V, ou seja o gerador na realidade estava mandando 1,76 V para o circuito, mostrando-se, porém com defeito nos valores de tensão fornecidos). E torna-se interessante, fazendo-se uma leitura da tensão total com o multímetro (que faz leituras eficazes da tensão) observa-se um valor de 1,24 V, e convertendo-se em valor de pico é só multiplicar por  $\sqrt{2}$  que dá o valor de 1,76V esperado.

Mas a análise independe do valor da amplitude do sinal fornecido pelo gerador de sinais, o objetivo é chegar na circunferência e verificar que a matemática conduz a verdade e a realidade mostra o seu valor.

## 4.6 NÚMEROS COMPLEXOS

### 4.6.1 Análise Matemática

Agora podemos representar (Apêndice D) a impedância de um circuito elétrico através de uma representação matemática idêntica aos números complexos, isso porque a fonte é senoidal de frequência angular dada por  $\omega = 2\pi$  sendo assim a parte real equivale a parte ativa ou a resistência elétrica e a parte imaginária equivale a parte reativa ou reatância capacitiva. Assim vamos analisar o diagrama de impedância e obter o módulo da mesma, como também a fase, ou a defasagem dos sinais, entre tensão e corrente no capacitor. A parte imaginária significa uma defasagem de  $90^\circ$ . Vamos analisar a importância dos números complexos na análise de circuitos.

Na Figura 23, a tensão da fonte senoidal é  $V_{s1}$ , a resistência do circuito é dado por R1 e a capacitância por C1, neste circuito haverá um divisor de tensão provocado por R1 e C1, a reatância capacitiva depende dos valores de frequência, o resistor do circuito R1 servirá para análise da corrente, e a tensão do circuito será a tensão da fonte, assim será possível analisar a defasagem entre a corrente do circuito e a tensão total.

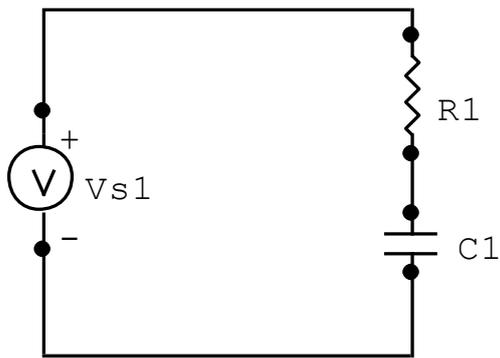


Figura 23: Circuito RC para análise fasorial.

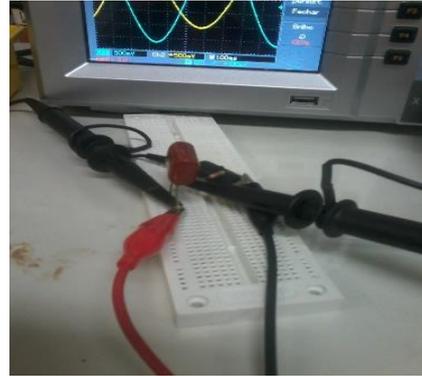


Figura 24: Circuito RC montado no protoboard e as conexões com o osciloscópio.

A Figura 23 mostra o esquema de um resistor em série com o capacitor, no resistor a tensão está em fase com a corrente, já no capacitor a tensão está atrasado de noventa graus em relação a corrente, o circuito montado está na Figura 24, verifica-se que uma das ponteiros do osciloscópio está no resistor com o intuito de analisar a corrente, apesar do osciloscópio só medir tensão, porém analisar a tensão no resistor quanto a sua fase, é o mesmo que analisar a corrente, pois sabe-se que corrente e tensão estão em fase no resistor. E a outra ponteira do osciloscópio está conectada entre os dois componentes, para analisar a tensão total do circuito, pois assim é possível observar o ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente do circuito, o pode-se também analisado no diagrama de impedância

Então temos o seguinte diagrama de impedância, onde o  $j$  é a parte imaginária, ou seja  $\sqrt{-1}$ .

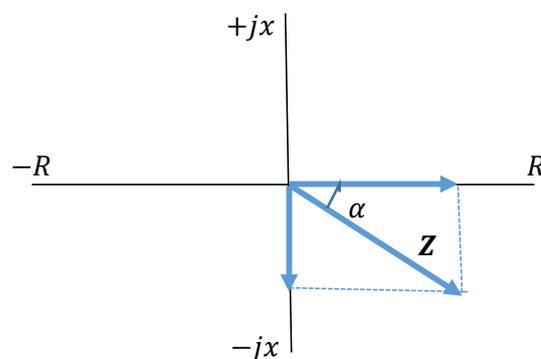


Gráfico 5: Diagrama de Impedância, no capacitor a corrente está adiantada de  $90^\circ$  em relação a tensão.

Sendo  $Z$  é a impedância do circuito, então

$$Z = R - jX_C$$

onde  $R$  é a resistência elétrica e  $X_C$  a reatância capacitiva, o ângulo  $\alpha$  do Gráfico 5 é a fase ou defasagem entre tensão e corrente no capacitor e pode ser obtido por

$$\arctan\left(\frac{X_C}{R}\right).$$

O módulo de  $z$  é dado por  $|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ .

#### 4.6.2 Material Utilizado

- 1 Resistor de  $1\text{ k}\Omega/0,125\text{ W}$
- 1 Capacitor de  $1\ \mu\text{F}$
- 1 Gerador de sinais
- 1 Osciloscópio

#### 4.6.3 Análise Experimental

Coloca-se montado no protoboard um resistor de  $1\text{ k}\Omega$  em série com um capacitor de  $1\ \mu\text{F}$  e alimenta-os com uma fonte senoidal de  $4\text{V}$  de amplitude ou  $8\text{ volts pico a pico}$  ( $V_{PP}$ ), coloca-se uma frequência de aproximadamente  $151\text{ Hz}$ , para que o valor da reatância capacitiva fique próximo de  $1\text{ k}\Omega$ , ou seja

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 151 \cdot 10^{-6}} = 1,1\text{ k}\Omega,$$

que dá a impedância  $Z = 1000 - 1100j$ . Assim a defasagem entre a tensão total do circuito e a corrente será dada por  $\alpha = \arctan\left(\frac{1100}{1000}\right) = 47,7^\circ$ .

Agora, analisa-se o resultado da plotagem dos sinais. No canal X coloca-se a tensão total e no Canal y coloca-se a tensão no resistor. A Figura 23 mostra o resultado desse experimento.

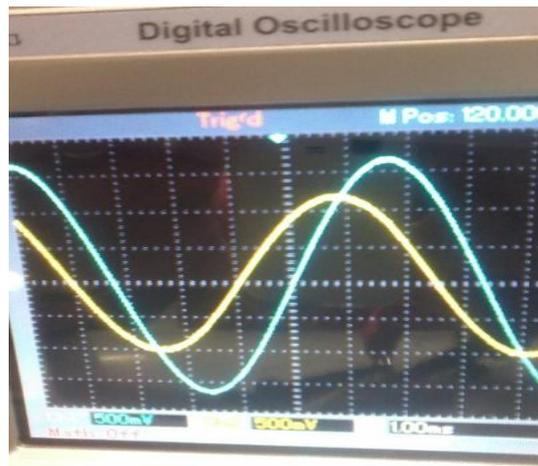


Figura 25: Resultado da plotagem dos sinais no resistor e na fonte do circuito. O sinal amarelo corresponde a corrente do circuito, e o sinal azul corresponde a tensão total do circuito.

A Figura 23 mostra o resultado dos sinais plotados no osciloscópio, que dá uma defasagem de 0,9 ms, convertendo para ângulo, temos a seguinte regra de três, o período do sinal que é o inverso da frequência dá 6,62 ms corresponde a  $360^{\circ}$  e assim 0,9 ms segundos vai corresponder a  $48,9^{\circ}$ . Assim observamos que praticamente foi igual ao valor calculado de  $47,7^{\circ}$ . Se quiséssemos ser mais preciso no valor, mediríamos o valor da capacitância e da resistência efetiva com o multímetro e chegaríamos praticamente ao mesmo valor medido.

## 4.7 EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

### 4.7.1 Análise Matemática

O objetivo é montar um circuito sensor de luz para verificar aplicação das equações do primeiro grau, e torna-se úteis nos cálculos das correntes de base, coletor e emissor, como também para o cálculo do resistor de coletor. O circuito de polarização do transistor é mostrado na Figura 26.

Desenvolve-se um circuito para polarizar o transistor (que pode trabalhar em três regiões: Ativa, Corte e Saturação). Os cálculos para dimensionar corretamente os componentes são construídos a partir de equações do primeiro grau. Este circuito contém um transistor NPN (Apêndice C), uma resistência variável com a luz chamada de LDR (Apêndice C), um resistor de coletor, um Relé (chave magnética) e um diodo LED (Apêndice C) para operar no escuro. Dessa maneira,

o interesse nesse circuito se dá pela sua simplicidade e a beleza matemática fazendo um diodo emissor de luz (LED) ser controlado pela presença ou ausência de luz.

Na Figura 26,  $v$  é a tensão da fonte,  $i_b$  é a corrente da base,  $i_c$  é a corrente de coletor,  $i_e$  é a corrente de emissor,  $R_1$  é o resistor da base, e  $R_2$  é o resistor de coletor. Este circuito servirá de base para montar o sensor de luz, os valores de  $R_1$  e  $R_2$  serão dimensionados para que o transistor trabalhe em corte e saturação.

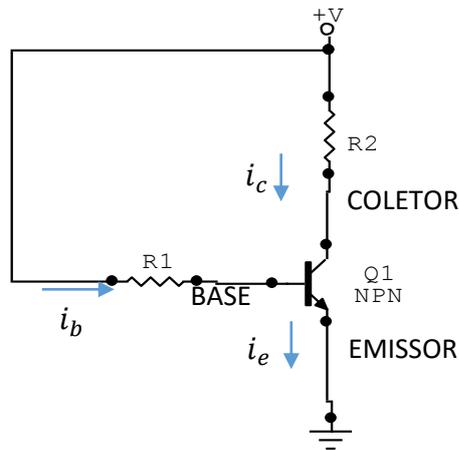


Figura 26: Polarização de um transistor com as corrente da base, corrente do coletor e a corrente do emissor.

Aplicando as leis de Kirchhoff nas malhas, ou seja, fazendo

$$\sum V = 0,$$

obtêm-se as equações (XVII) a (XX) que são equações do primeiro grau..

$i_b = \frac{V_{CC} - V_{be}}{R_1}$	(XVII)
$i_c = \beta \cdot i_b$	(XVIII)
$i_e = i_c + i_b$	(XIX)
$-V + R_2 \cdot i_c + V_{CE} = 0$	(XX)

onde:

$V_{CC}$  é a tensão contínua da fonte;

$V_{CE}$  é a tensão entre o coletor e o emissor do transistor;

$i_b$  é a corrente da base;

$i_c$  é a corrente do coletor;

$i_e$  é a corrente do emissor;

$V_{be}$  é a tensão entre a base e o emissor, geralmente é considerado 0,7

V;  $\beta$  é ganho de corrente do transistor.

Analisa-se duas situações de operação do transistor na aplicação da equação do primeiro grau : a operação em corte e outra em saturação.

Transistor em “corte” significa que a tensão entre coletor e emissor é muito próximo da tensão da fonte, assim implica que a corrente de base é próxima de zero fazendo com que a corrente de coletor também seja próximo de zero, assim vê-se pela lei de Kirchhoff das tensões (LKT) que  $V_{CE} = V_{CC}$ .

A Figura 27 mostra um circuito com valores de R1 e R2, e utilizando as equações (XVIII) à (XX) verifica-se que o transistor está em corte. Tem-se na base um resistor 820 k $\Omega$ . É dado o ganho do transistor em torno de 130. Tem-se os resultados:

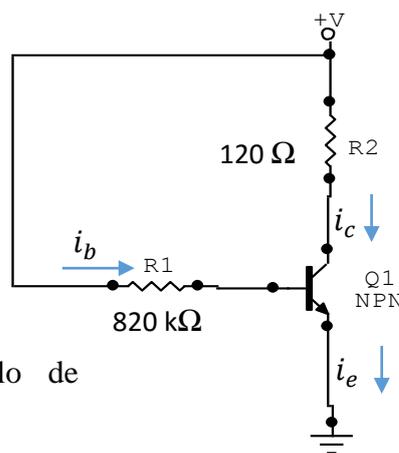


Figura 27: Exemplo de transistor em corte.

Calcula-se primeiramente a corrente da base  $i_b$  e a corrente de coletor  $i_c$ .

$$i_b = \frac{V_{CC} - V_{be}}{R_1} = \frac{12 - 0,7}{820 \cdot 10^3} = 0,0138 \text{ mA}$$

$$i_c = \beta \cdot i_b = 130 \cdot 0,0138 \text{ mA} = 1,79 \text{ mA}$$

Com a corrente de coletor, calcula-se a tensão entre o coletor e emissor  $V_{CE}$ .

Pela LKT fica:

$$-V_{CE} - 120 \cdot 1,79 \cdot 10^{-3} + 12 = 0$$

Logo  $V_{CE} = 11,99 \text{ V}$ , ou seja praticamente em corte pois a tensão da fonte é 12

Transistor em saturação significa que a tensão entre coletor e emissor é muito próxima de zero volts assim a corrente da base suficientemente grande para fazer com que a corrente do coletor provoque uma tensão no resistor de coletor que seja próximo da fonte, ou seja  $V_{RC} = V_{CC}$  assim implica que  $V_{CE} = 0$ .

Dado um Circuito da Figura 28, verificar a situação de operação do transistor. Tem-se que o ganho do transistor igual a 400.

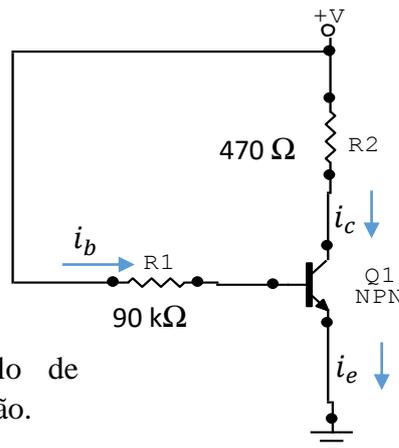


Figura 28: Exemplo de transistor em saturação.

Utilizando a equação (I) tem-se a corrente da base : lembrando que a tensão entre a junção base- emissor é um diodo , portanto a tensão será 0,7 V aproximadamente.

$$i_b = \frac{V_{CC} - V_{be}}{R_1} = \frac{12 - 0,7}{90 \cdot 10^3} = 0,126 \text{ mA}$$

A corrente de coletor será:

$$i_c = \beta \cdot i_b = 400 \cdot 0,126 \text{ mA} = 50,4 \text{ mA}$$

Assim a tensão entre o coletor e emissor sera:

$$-V_{CE} - 400 \cdot 50 \cdot 10^{-3} + 12 = 0 \quad \text{logo} \quad V_{CE} = -8 \text{ V}$$

Observa-se que a tensão é negativa, esta situação indica que o transistor já atingiu a saturação, pois o limite de tensão para o resistor de coletor é igual a tensão da fonte ou seja 12 V, portanto na prática a tensão  $V_{CE} = 0 \text{ V}$ .

O circuito a ser montado exemplifica estas duas regiões de trabalho do transistor, corte ou saturação, Figura 29. Analisemos seu funcionamento.

Com a luz acesa a resistência do LDR (Resistor variável com a luz) é pequena e suficiente para gerar uma corrente na base e uma corrente no coletor suficiente para saturar o transistor, o transistor em saturação vai mandar 0 V para o relé , portanto sua chave

normalmente aberta continuará aberta e assim o LED não acende. Ao apagar luz o LDR vai ficar com alta resistência fazendo a corrente da base ficar próxima de zero e o transistor entra em corte e manda a tensão da fonte para o relé que é acionado fechando a chave normalmente aberta e assim acende o LED.

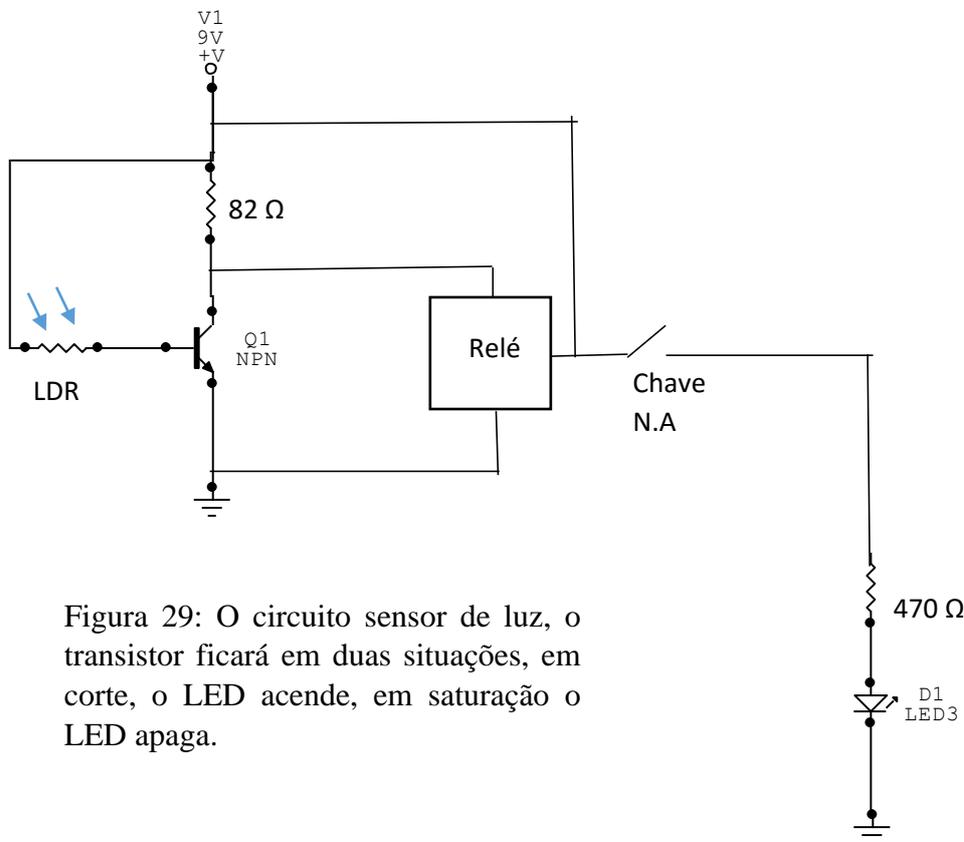


Figura 29: O circuito sensor de luz, o transistor ficará em duas situações, em corte, o LED acende, em saturação o LED apaga.

#### 4.7.2 Material Utilizado

- 1 resistor de  $82 \Omega / 5 W$
- 1 relé de 6 V
- 1 transistor NPN BD135
- 1 LDR
- 1 Diodo LED azul
- 1 resistor de  $470 \Omega$
- 1 protoboard
- 1 bateria de 9 V

### 4.7.3 Análise Experimental

A primeira coisa a fazer é medir a resistência mínima e máxima do LDR, com a resistência mínima, devemos calcular a corrente da base (equação II), após isso mede-se o ganho do transistor com o multímetro e determina os terminais coletor, base e emissor, com o ganho calcula-se a corrente do coletor (equação XVIII) e com isso o valor da resistência de coletor e sua potência, assim o circuito está projetado para funcionar, assim os resultados da montagem estão nas figuras abaixo:

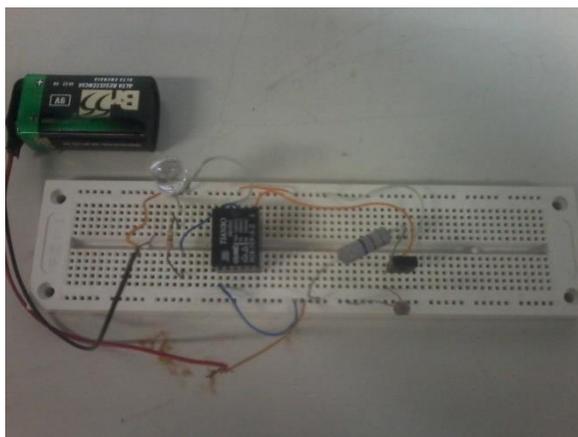


Figura 30: Mostra o circuito do sensor de luz montado no protoboard.



Figura 31: Mostra o sensor de luz na escuridão, na ausência de luz, o LED azul acende.

## 4.8 INTEGRAIS E DERIVADAS

Para exemplificar integrais e derivadas, será analisado dois circuitos, estes são chamados de circuitos integradores e derivadores.

### 4.8.1 Análise Matemática

Em certas condições um circuito  $RC$  pode se comportar como um circuito integrador, isso se fizermos  $R \gg XC$  ( a resistência ser muito maior que a reatância capacitiva), aplicando a lei de kirchhoff na malha encontramos a seguinte equação:

$$V_s = R \cdot i + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Vamos observar que a tensão no capacitor é praticamente nula e que a observação no osciloscópio é exatamente no capacitor e por isso a amplitude do sinal de saída vai ser baixa, mas o que se espera é que a saída seja uma integração da entrada. Para o circuito Derivador a análise do sinal é no resistor, porém o circuito inverte os papéis, agora  $R \ll X_C$  e a saída também tem uma baixa amplitude.

Na Figura 32,  $V_e$  é a tensão de entrada gerada pela fonte,  $R$  é o resistor que vai assumir um valor de tensão bem maior que a do capacitor  $C$ , e isso é feito através da variação da frequência, que atua na reatância capacitiva fazendo seu valor ser bem menor que a resistência  $R$ ,  $V_s$  é a tensão de saída que será analisada no capacitor.

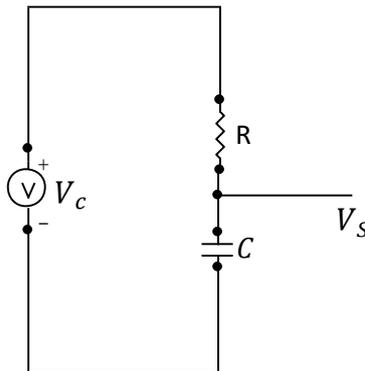


Figura 32: Circuito Integrador

A tensão de saída é a tensão no capacitor, logo  $V_s = V_c$  temos pela lei das tensões de Kirchoff, que  $V_e = V_R + V_c$ , condição para ser um circuito integrador varia-se a frequência tal que  $R$  seja muito maior que  $X_C$ .

$$R \gg X_C \rightarrow V_c \cong 0 \rightarrow V_e = R i,$$

mas

$$i = C \frac{dV_s}{dt} \rightarrow V_e = R \cdot C \frac{dV_s}{dt}.$$

Integrando os dois membros da equação anterior tem se

$$\int V_e = \int R \cdot C \frac{dV_s}{dt}.$$

Logo a tensão na saída será

$$V_S = \frac{1}{R \cdot C} \int V_e dt.$$

Na Figura 33,  $V_e$  é a tensão de entrada gerada pela fonte,  $R$  é o resistor que vai assumir um valor de tensão bem menor que a do capacitor  $C$ , e isso é feito através da variação da frequência, que atua na reatância capacitiva fazendo seu valor ser bem maior que a resistência  $R$ ,  $V_S$  é a tensão de saída que será analisada no resistor.

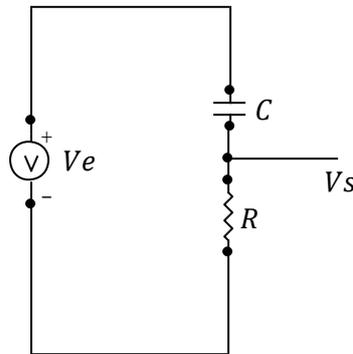


Figura 33: Circuito Derivador

Condição para o circuito ser derivador:  $R \ll X_C$ , assim temos que  $V_e = V_R + V_C$  e que  $V_R \cong 0$ , assim  $V_e = V_C$  ou  $V_e = \frac{1}{C} \int i dt$ , mas  $i = \frac{V_R}{R}$ , então fica  $V_e = \frac{1}{C} \int \frac{V_R}{R} dt$ , derivando os dois membros, temos  $\frac{dV_e}{dt} = \frac{V_R}{R \cdot C}$ , mas  $V_S = V_R$ , e finalmente

$$V_S = RC \frac{dV_e}{dt} \quad (\text{iv})$$

#### 4.8.2 Material Utilizado

- 1 resistor de  $1 \text{ k}\Omega / 0,125 \text{ W}$
- 1 resistor de  $10 \text{ k}\Omega / 0,125 \text{ W}$
- 1 capacitor de  $1 \mu\text{F}$
- 1 capacitor de  $0,01 \mu\text{F}$
- 1 gerador de sinais
- 1 Osciloscópio

### 4.8.3 Análise Experimental

#### 4.8.3.1 Circuito Integrador

Cálculo da faixa de capacitância para o circuito funcionar como circuito integrador, temos uma resistência de  $10\text{ k}\Omega$  e uma frequência de  $1\text{ kHz}$ , assim a condição é  $R \gg XC$ , fica  $R \gg \frac{1}{\omega \cdot C}$  ou  $C \gg \frac{1}{2\pi f R} \rightarrow C \gg \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^4} \rightarrow C \gg 0,016\ \mu\text{F}$ , então vai ser usado no circuito um capacitor de  $1\ \mu\text{F}$  e satisfará a estas condições. Os resultados foram:



Figura 34: Montagem do circuito integrador, Resistor de  $10\text{ k}\Omega$  em série com Capacitor  $1\ \mu\text{F}$ .

Pode-se calcular os valores das amplitudes por exemplo para onda senoidal, e verifica-se que a amplitude é baixa, mas o sinal de saída é uma integração do sinal de entrada, foram feitos plotagens para três tipos de sinais, senoidal, triangular e retangular.

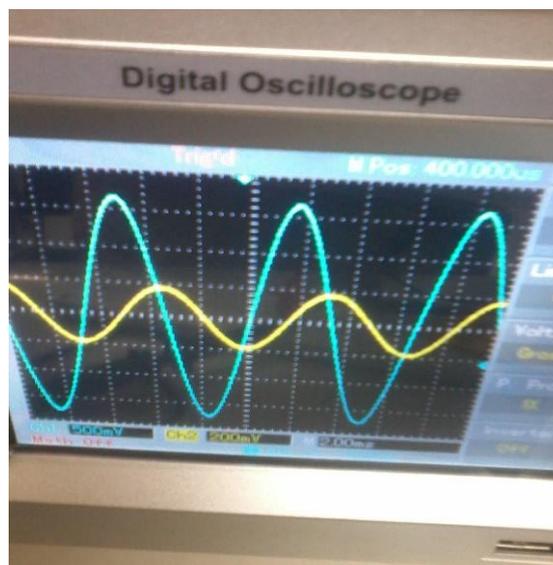


Figura 35: Sinal azul  $\text{sen}x$  e sinal amarelo  $-\text{cos}x$ .

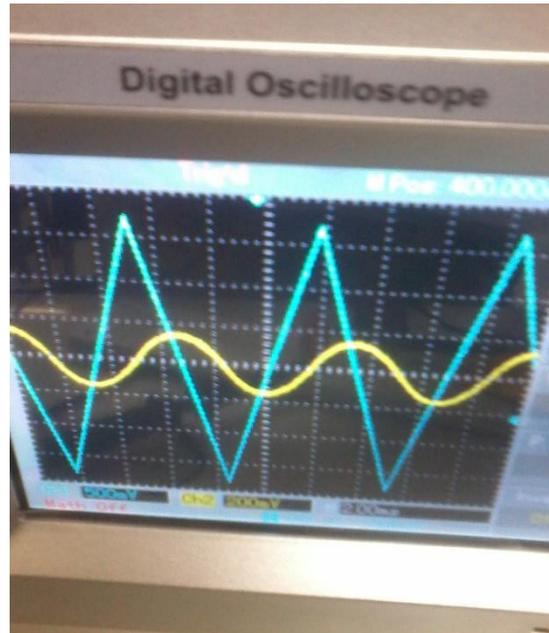


Figura 36: Sinal azul  $f(x) = x$  para certo intervalo de tempo e sinal amarelo  $f_1(x) = x^2/2$

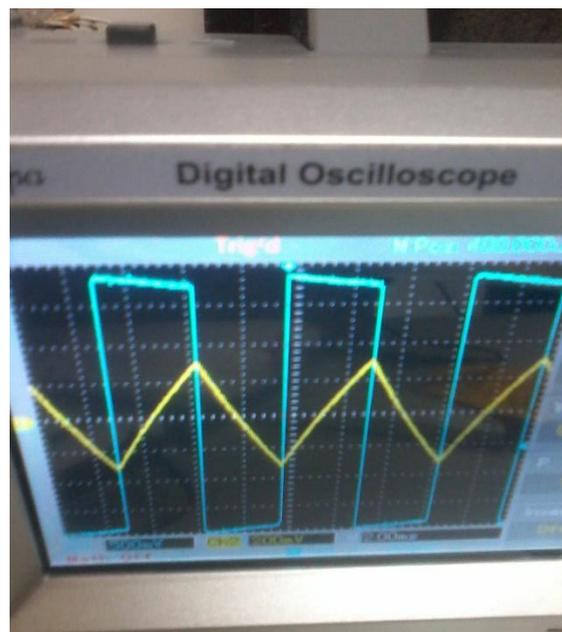


Figura 37: Sinal azul  $f(x) = a$  para certo intervalo de tempo e sinal amarelo  $f_1(x) = ax$

#### 4.8.3.2 Circuito Derivador

Cálculo da faixa de capacitância para o circuito funcionar como circuito derivador, temos uma resistência de  $1\text{ k}\Omega$  e uma frequência de  $100\text{ Hz}$ , assim a condição é  $R \ll XC$ , fica  $R \ll \frac{1}{\omega C}$  ou  $C \ll \frac{1}{2\pi f R} \rightarrow C \ll \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^2} \rightarrow C \ll 1,6\ \mu\text{F}$ , então vai ser usado no circuito um capacitor de  $0,01\ \mu\text{F}$  ou  $10\text{ nF}$  e satisfará a estas condições. Os resultados foram:



Figura 38: Montagem do Circuito Derivador, um resistor de  $1\text{ k}\Omega$  em série com um capacitor de  $0,01\ \mu\text{F}$ .

Para o circuito derivador também foram plotados três sinais na saída analisada nos terminais do resistor, fazendo a derivação desses sinais, foram obtidos:

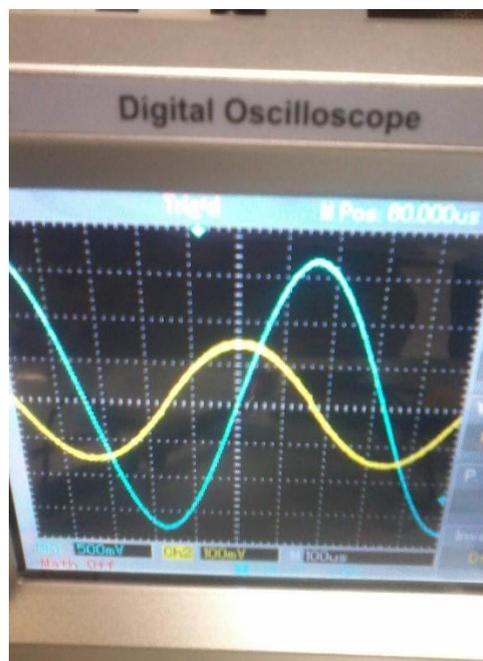


Figura 39: Derivada do  $\text{sen } x$  (Sinal Azul) é igual a  $\text{cos } x$  (Sinal amarelo).

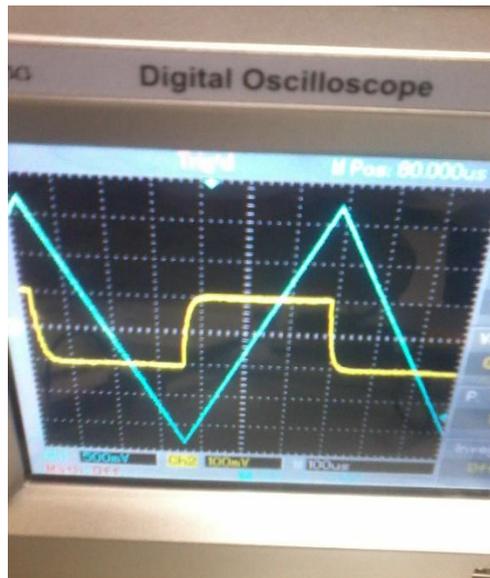


Figura 40: Derivada de  $x$  (Sinal Azul) é igual a 1 (sinal amarelo)

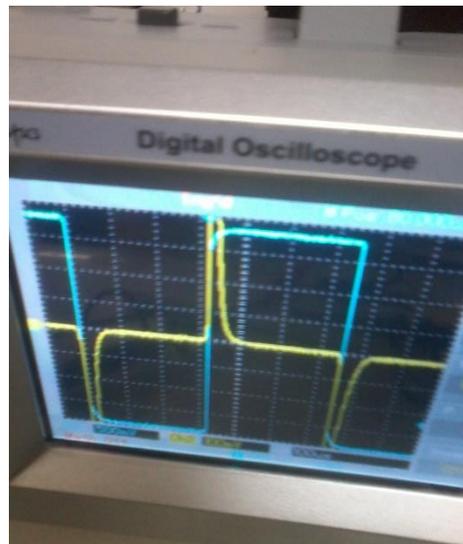


Figura 41: Derivada de 3,5 (Sinal Azul) é igual a 0 (sinal amarelo)

## 4.9 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

### 4.9.1 Análise Matemática

Analisa-se as equações diferenciais de segunda ordem para corrente do indutor e para tensão no capacitor, verifica-se nos dois casos que as equações diferenciais ficam com os

mesmos coeficientes, logo pode-se analisar a tensão ou a corrente. Como o osciloscópio mede somente tensão, fica melhor analisar a tensão no capacitor.

O comportamento do circuito RLC paralelo com excitação de uma fonte tipo degrau, objetivando a análise das correntes e tensões nos elementos para as soluções tipo sobreamortecido, criticamente amortecido e subamortecido.

Na Figura 42, temos uma fonte de corrente  $I_{s1}$  tipo degrau ou retangular para analisar o comportamento durante o regime permanente,  $i_t$  é a corrente total do circuito ou seja é igual a  $I_{s1}$ , tem-se  $i_R$  é a corrente do resistor variável ou potenciômetro R1, este resistor atuará nas soluções da equação,  $i_L$  é a corrente do indutor L1, pode-se encontrar a equação diferencial em termos desta corrente,  $i_C$  é a corrente do capacitor. Neste circuito as soluções serão melhor analisadas através da tensão no capacitor, pois o mesmo se encontra puramente capacitivo.

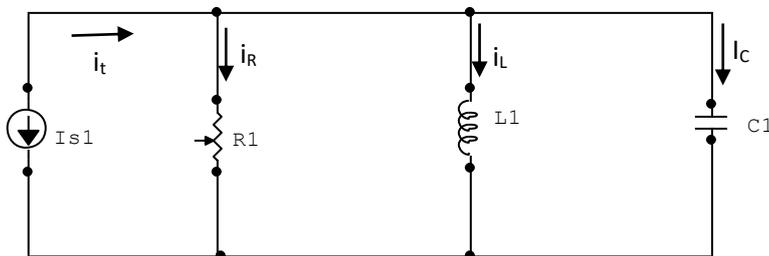


Figura 42: Circuito RLC paralelo, para análise das soluções subamortecido e sobreamortecido.

Temos uma fonte de corrente retangular (degrau) que alimenta um resistor variável em paralelo com um indutor e em paralelo com um capacitor, pela lei de Kirchhoff dos nós temos:

$$i_t = i_R + i_L + i_C$$

Considerando as seguintes relações:

$$i_R = \frac{V_R}{R} \quad , \quad i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt} \quad , \quad V_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} \quad , \quad V_R = V_L = V_C$$

$$\text{Substituindo:} \quad i_t = \frac{V_L}{R} + i_L + C \cdot \frac{dV_L}{dt} \quad \rightarrow \quad i_t = \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L + C L \cdot \frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

Dividindo todos os termos por CL, fica:  $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{CR} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{CL} i_L = \frac{i_t}{CL}$ , essa equação diferencial de segunda ordem em termos da corrente do indutor, podemos também encontrar a equação em termos da tensão no capacitor fica :

$i_t = \frac{V_C}{R} + i_L + C \cdot \frac{dV_C}{dt}$ , pois,  $V_R = V_L = V_C$ , assim derivando membro a membro fica  
 $\frac{di_t}{dt} = \frac{dV_C}{Rdt} + \frac{di_L}{dt} + C \cdot \frac{d^2V_C}{dt}$ , mas  $\frac{di_L}{dt} = \frac{V_L}{L} = \frac{V_C}{L}$ , substituindo e dividindo por C temos  
 :

$$\frac{d^2V_C}{dt} + \frac{1}{CR} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{CL} V_C = \frac{di_t}{Cdt}$$

Equação característica: resolvendo o caso particular para equação homogênea, temos:  
 $X^2 + 2\alpha X + \omega_0^2 = 0$ , onde  $\alpha$  é chamado coeficiente de amortecimento constante,  $\omega_0$  é chamado de frequência natural sem amortecimento.

$$x = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Para equação diferencial:

Existem três possibilidades de solução:

Subamortecido:  $\alpha < \omega_0$ , temos raízes complexas logo temos, a seguinte solução

$$x(t) = [A \cdot \cos(\omega_d t + \phi)] \cdot e^{-\alpha t},$$

Onde, A é uma constante,  $\omega_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$  é chamado de frequência angular,  $\phi$  é um ângulo constante,

Sobreamortecido:  $\alpha > \omega_0$ , temos raízes distintas e reais, assim temos a solução

$$x(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}, \text{ onde}$$

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad e \quad \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Criticamente amortecido:  $\alpha = \omega_0$ , raízes reais iguais, a solução fica

$$x(t) = \left[ \frac{dx}{dt} + \alpha \cdot x(0) \right]_{t=0} \cdot e^{-\alpha t}$$

#### 4.9.2 Material Utilizado

- 1 gerador de sinais
- 1 osciloscópio
- 1 protoboard
- 1 Indutor de 300  $\mu\text{H}$
- 1 Capacitor 1  $\mu\text{F}$
- 1 Trimpot 220  $\Omega$
- 1 Resistores de 4,7  $\Omega$

#### 4.9.3 Análise Experimental

Monta-se o circuito conforme a figura ou seja um capacitor de 1  $\mu\text{F}$  em paralelo com um resistor variável (trimpot ou potenciômetro) de 0 a 220  $\Omega$  e em paralelo com um indutor de 560  $\mu\text{H}$ . Ao montar o circuito deve-se fazer os cálculos de  $R_V$  (Resistor variável) para a resposta ser subamortecido ou sobreamortecido. Este cálculo vem das soluções das equações diferenciais de segunda ordem para a tensão no capacitor, ou seja  $\frac{d^2V_C}{dt} + \frac{1}{CR} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{CL} V_C = \frac{di_t}{cdt}$ , coloca-se a equação característica para resolver a equação, ou seja  $X^2 + 2\alpha X + \omega_0^2 = 0$ , assim para o circuito se tornar subamortecido, temos  $\alpha < \omega_0$   $R > 11,8 \Omega$ , coloca-se o potenciômetro no máximo valor para satisfazer a essas condições e fazer a plotagem do sinal no osciloscópio, Para o caso sobreamortecido fazemos  $\alpha > \omega_0$ , assim encontra-se  $R < 11,8 \Omega$ , coloca-se o potenciômetro no seu valor mínimo ou seja mediu-se seu valor 6,6  $\Omega$ , os resultados foram conforme as figuras :

$$\rightarrow \frac{1}{2RC} < \sqrt{\frac{1}{LC}} \rightarrow R > \sqrt{\frac{L}{4C}} \rightarrow R > \sqrt{\frac{560 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-6}}}$$

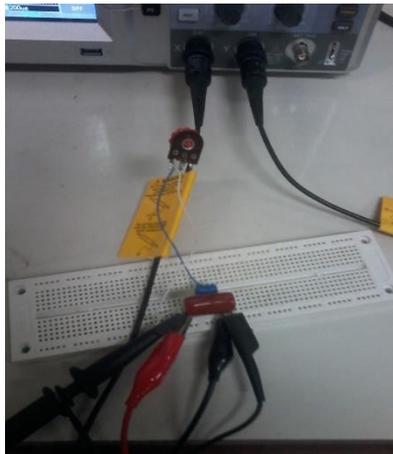


Figura 43: Montagem do circuito RLC paralelo

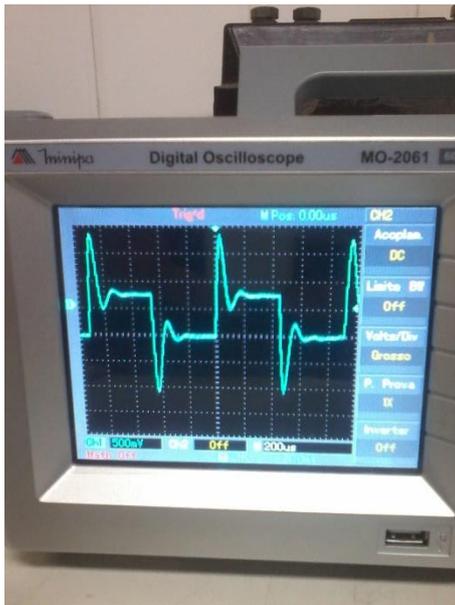


Figura 44: Resultado da tensão encontrada no capacitor para o caso subamortecido.

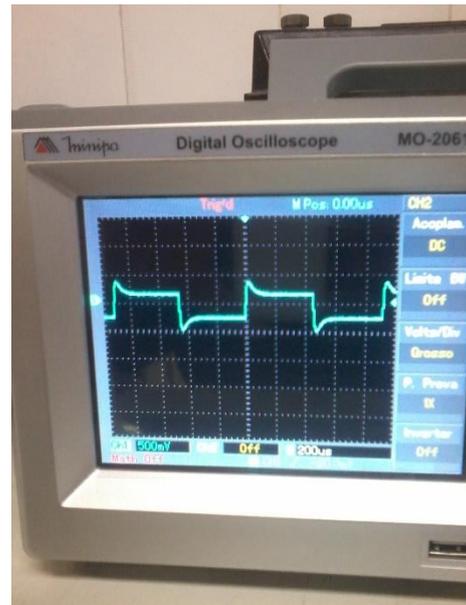


Figura 45: Resultado da tensão encontrada no capacitor para o caso sobreamortecido.

Uma aplicação que serviria para encontrar o valor de indutância ou capacitância desconhecida, através do gráfico obtido no osciloscópio, assim o valor do período encontrado no gráfico da Figura 44 foi de  $T = 115 \mu s$ , fazendo o cálculo da frequência angular  $\omega_d$ , tem-se  $\omega_d = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,115 \cdot 10^{-3}} = 54636 \text{ rad/s}$ . Fazendo os cálculos com os valores dos componentes, tem-se que o coeficiente de amortecimento constante  $\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 220 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 2273 \text{ rad/s}$ , calcula-se a frequência natural sem amortecimento  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{300 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = 57375 \text{ rad/s}$ , assim, obtêm-se o valor da frequência angular  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{57375^2 - 2273^2} = 57690 \text{ rad/s}$ , comparando este valor com o experimental que foi de  $54636 \text{ rad/s}$ , a diferença está dentro da tolerância de erro nos valores dos componentes, resistor, indutor e capacitor, havendo ainda um erro pequeno na observação do sinal. Portanto os valores são bem compatíveis com a realidade prática e teórica, demonstrando assim o quanto a matemática é fantástica.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aplicação da matemática na eletrônica teve resultados satisfatórios no Curso Técnico de Eletrotécnica do CEPEP (Centro de Profissionalização e Educação de Pernambuco Ltda). No Início das aulas foi feita uma sondagem para verificar a dificuldades dos alunos em matemática, com um pequeno teste, explorando a matemática do ensino fundamental e médio, buscando principalmente o embasamento em equações do primeiro grau e funções, e verificou-se um rendimento muito baixo. Após isso foi feita uma revisão sobre estes assuntos e aplicados a eletrônica, no término da disciplina o resultado foi bem melhor, os alunos se interessaram em resolver os exercícios como também pela prática da disciplina exigindo o conhecimento matemático necessário ao entendimento dos circuitos. É bastante edificante quando percebe-se que muitos alunos ficam interessados em participar das atividades de uma disciplina, quando eles fazem isso com prazer e não somente como compromisso em terminar a disciplina, assim quando o professor mostra que a sua disciplina criará novos horizontes, haverá uma grande alegria de ensinar e aprender, e os fatores externos não tenham tanta influência na construção daquele saber. Assim, a matemática aplicada de forma organizada e bem elaborada fazendo a junção entre a teoria e a prática tem-se o objetivo mais próximo do esperado. É necessário os exercícios teóricos, mas quando acompanhados dos exercícios práticos, ficam mais armazenados na memória, algo concreto que eles possam utilizar e perceber a sua importância. Nas escolas existem muitos alunos que dizem não gostar de matemática e é claro que estes vão seguir outros rumos ou por terem talentos em outras áreas do conhecimento, mas se a matemática chegar até eles mostrando um mundo mágico explorando as diversas aplicações, o desinteresse será quebrado, e a busca será mais alegre e não tão sacrificante.

O espaço que a eletrônica dá para a matemática é infinito, todos os assuntos em qualquer nível da matemática são aplicados na eletrônica e como a mesma envolve circuitos, o professor tem algo que ele pode levar facilmente para sala de aula e que pode trabalhar aquele conteúdo junto com os alunos. Para o curso técnico torna-se essencial, já que é diretamente aplicado as atividades do aluno, para o ensino fundamental, médio ou o ensino superior torna-se motivador, pois a matemática faz coisas incríveis.

Assim, para os professores adquirirem este conhecimento precisam fazer um curso de aproximadamente 40h. Dividindo este tempo nas seguintes etapas: no período de 20 h uma preparação para conhecer os principais componentes eletrônicos e suas funções, estudando suas funções num circuito, começando com os resistores fazendo divisor de tensão e divisor de corrente, depois verificando capacitores carregando, e vários tipos de capacitores, depois diodos

com suas polarizações fazendo retificações e estabilizando o sinal com o diodo Zener, os transistores com circuitos polarizadores, analisando suas regiões de trabalho, também algumas portas lógicas, decodificadores e contadores e para finalizar o CI 555. Após o estudo destes componentes, entram os estudos da instrumentação eletrônica como osciloscópio, gerador de sinais, multímetro e protoboard, fundamentais para montagem de circuitos e medições. Durante 10h, seria suficiente para treinar o funcionamento. E durante 10h aplicar os conhecimentos, fazendo as montagens para vários tipos de circuitos, medições, simulações e projetos de circuitos.

Os pré-requisitos de conhecimento de circuitos elétricos que todo professor deve ter é a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff. Para os professores de Física fica essencial, pois trabalham com estes assuntos em sala de aula, os professores de Matemática devem fazer uma revisão sobre estes conteúdos de Física.

Os componentes tem baixo custo, os instrumentos de eletrônica somando todos eles teria aproximadamente o preço de um computador, mas pode-se montar laboratórios que servem para as disciplinas de Matemática, Física e Química.

Laboratórios de Física nas universidades que adquirir estas ferramentas podem trabalhar juntamente com os professores de matemática, física e química obter esta preparação para aplicar alguns assuntos que forem necessários a uma demonstração prática que amplie o interesse do aluno pela matéria.

Algumas das experiências como circuitos integradores e derivadores, equações diferenciais de segunda ordem, Séries de Fourier, entre outras experiências, é demonstrada no laboratório de circuitos elétricos do departamento de engenharia elétrica da Universidade Federal de Pernambuco, observa-se que os alunos não só de Engenharia como também da Física e Matemática ficam bastante empolgados quando analisam estes circuitos e verificam como o desenvolvimento da matemática é importante quando bem intencionadas para nossas vidas.

Oficinas de matemática e minicursos podem ser feitos para treinamentos dos professores, tanto das áreas de matemática, como também de física e química nos níveis de Ensino Fundamental, Médio e Superior. Podem ter um impulso inicial de aprendizagem e com o tempo melhorar e aperfeiçoar seus conhecimentos nas demonstrações práticas e trazer para sala mais um degrau no ensino-aprendizagem.

## 6. BIBLIOGRAFIA

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. WALKER, Jearl. **Fundamentos da Física. Eletromagnetismo**. 8ª Edição. Editora LTC, Volume 3.

JOHNSON, E. David; HILBURN, L. John; JOHNSON, R. Johnny. **Fundamentos da Análise de Circuitos Elétricos**. 4ª Edição, Editora Prentice / Hall do Brasil. 556 páginas.

CUTLER, Philip. **Análise de circuitos CA: com problemas ilustrativos**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1976. 351p.

ABIDO, Fátima Ahmade Rabah. **Notas de aula para acompanhar a disciplina de cálculo IV**. São Paulo :UNIMAR, 2010. 53 p.

BOYLASTAD, L Robert. **Introdução à Análise de Circuitos**. 10ª-edição. São Paulo: Pearson Pretince Hall, 2004. 842 p.

TEIXEIRA, Marlene Christel Grams. **A Matemática da Eletrônica**. Novo Hamburgo, 2012. Disponível em: < <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfotIAH/a-matematica-eletronica>>. Acesso em 15 de Mar. de 2015.

SANTOS, Flávio Miranda Dos. **Robótica Educacional – Potencializando O ensino da Matemática**. Universidade Estadual do Norte Fluminense: Rio de Janeiro. 2014.

ARAÚJO, Bruno Lima De. **Aplicabilidade Dos Números Complexos Nos Circuitos Elétricos de Corrente Alternada**. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa.2014.

LOVATEL, Simoni. **Matemática para Eletrônica: Uma Proposta Para o Ensino Técnico**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.2007.

KROPF, Marcelo Albuquerque Lemgruber. **Aplicações dos Logaritmos na Área de Saúde**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro 2014.

LIMA, Jamerson Montenegro. **Uma Proposta para o Ensino das Funções Exponencial, Seno e Cosseno com Auxílio do Software Winplot**. Universidade Federal de Tocantins. Palmas. 2014.

MACIEL, Gedieilton Santos. **A Importância da Modelagem Matemática Como Instrumento Indispensável para o Ensino de Física: Uma Reflexão para o Ensino Médio**. Universidade Estadual de Santa Cruz. Ihéus-BA. 2014.

**Conexões em Série**, Disponível em: <[http://www.dreaminc.com.br/sala\\_de\\_aula/conexoes-em-serie/](http://www.dreaminc.com.br/sala_de_aula/conexoes-em-serie/)> Acesso em 28 de março de 2015.

RODRIGUES, Ilan. **Magnetismo-Campo Magnético**. Disponível em: <<http://slideplayer.com.br/slide/1670844/>>. Acesso em 28 de março de 2015.

SOUSA, Luan. **Potência Elétrica CC**. Disponível em: <<http://clubdoeletrotecnico.blogspot.com.br/>>. Acesso em 28 de março de 2015.

FOGAÇA, Jennifer. **Alessandro Volta**. Disponível em: <<http://www.brasilecola.com/quimica/alessandro-volta.htm>>. Acesso em 28 de março em 2015.

**Leis de Kirchhoff**. Disponível em: <[http://etsua.no.sapo.pt/electronica/teoria/leis\\_de\\_kirchhoff.html](http://etsua.no.sapo.pt/electronica/teoria/leis_de_kirchhoff.html)>. Acesso em 28 de março de 2015.

**Lei de Farady**. Disponível em: <<http://fisica-mentee.blogspot.com.br/2014/08/lei-de-faraday-por-eloisa-capeletto.html>>. Acesso em 28 de março em 2015.

**Fluxo Elétrico**. Disponível em: <<http://slideplayer.com.br/slide/328364/>>. Acesso em 28 de março de 2015.

**Equações de Maxwell**. Disponível em: <<https://moodle.ufsc.br/mod/book/view.php?id=504304&chapterid=2711>>. Acesso em 28 de março 2015.

**Código de Cores de Resistores.** Disponível em: <  
<http://www.arduinoecia.com.br/2013/08/codigo-de-cores-de-resistores.html>>. Acesso em 28  
 de março 2015.

**Tabelas de Capacitores.** Disponível em:  
 <[http://www.labdegaragem.com.br/wiki/index.php?title=Tabelas\\_de\\_Capacitores](http://www.labdegaragem.com.br/wiki/index.php?title=Tabelas_de_Capacitores)>. Acesso  
 em 28 de março 2015.

**Tabela de Capacitores Cerâmicos.** Disponível em:  
 <[http://www.portalrobotica.com.br/site/index.php?option=com\\_content&view=article&id=52:tabela-de-capacitores-ceramicos&catid=19:introducao-a-eletronica&Itemid=4](http://www.portalrobotica.com.br/site/index.php?option=com_content&view=article&id=52:tabela-de-capacitores-ceramicos&catid=19:introducao-a-eletronica&Itemid=4)>. Acesso em  
 28 de março 2015.

**Detalles de Construcción de Circuitos.** Disponível em:  
 < <http://www.pisotones.com/Articulos/Construc.htm>>, acesso em 28 de março de 2015.

LINS, Zanoni Dueri; BELARMINO, Júlio César da Luz. **Apostila de Circuitos Elétricos.**  
 Universidade Federal de Pernambuco. Departamento de engenharia elétrica. Recife, 2000. P  
 50.

**Pesquisa CNI-IBOPE: retratos da sociedade brasileira: educação profissional:** janeiro  
 2014 / Confederação Nacional da Indústria. – Brasília: CNI, 2014. 26 p. : il.

**Polarização e estabilização de transistores.** Disponível em: <  
<http://www.lsi.usp.br/~eletroni/frames3/poli/labelo1/polariza/polariza.html>>. Acesso em 28  
 março 2015.

**Codificadores y decodificadores.** Disponível em:  
 <<http://electronica.ilaweb.com/tag/7448/>>. Acesso em 25 de março de 2015.

**Sistema Educativo Nacional Do Brasil.** Disponível em:  
 <[http://www.oei.es/quipu/brasil/educ\\_profesional.pdf](http://www.oei.es/quipu/brasil/educ_profesional.pdf)>. Acesso em 23 de março 2015.

## APÊNDICE A: CONTRIBUIÇÕES IMPORTANTES

As pessoas que deram contribuições nos estágios iniciais do campo da eletrônica não eram engenheiros eletricitas, eletrônicos, ou de computação tais como os conhecemos hoje. Na maioria dos casos, eram físicos, químicos, matemáticos ou até mesmo filósofos.

### A.1 ANDRÉ MARIE AMPÈRE (1775-1836)

A empolgante declaração do físico dinamarquês Hans Cristian Oerstad de que a corrente elétrica produz um efeito magnético foi apresentada à Academia Francesa de Ciências em 11 de setembro de 1820. Um membro da academia, o professor de matemática francês André Marie Ampère, ficou profundamente impressionado e repetiu o experimento de Oerstad, em uma semana, fornecendo uma explicação matemática para ele e, além disto, descobrindo que correntes elétricas em fios paralelos exercem força magnética mútua.

Àmpere nasceu em Lyon, na França, e leu em criança todos os trabalhos da biblioteca de seu pai. Aos 12 anos começou a frequentar a biblioteca de Lyon, e devido ao fato de a maioria dos livros de matemática ser escrita em latim, tornou-se perito nessa língua em pouca semanas. Apesar de duas fatídicas tragédias pessoais – aos 18 anos presenciou a execução de seu pai, na guilhotina, pelos revolucionários franceses, e mais tarde, sua jovem e amada esposa morreu subitamente, após 4 anos de casamento-, Ampère foi um brilhante e produtivo cientista. Formulou muitas leis da eletricidade e do magnetismo e foi o pai da eletrodinâmica. A unidade de corrente elétrica, o àmpere, foi escolhida em sua homenagem, em 1881.

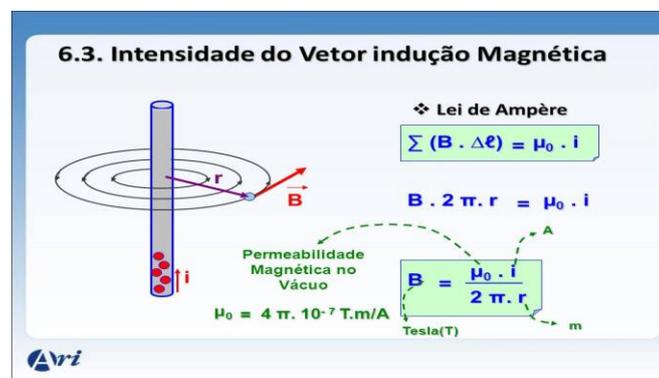


Figura 46: Lei de Ampère: Cálculo da Intensidade do campo magnético a uma distância R do fio reto percorrido por corrente elétrica. (<http://slideplayer.com.br/slide/1670844/>)

## A.2 GEORG SIMON OHM (1787-1854).

A mais básica e mais amplamente aplicada das leis da eletricidade, a lei de Ohm, foi publicada em 1827, pelo físico alemão Georg Simon Ohm, em seu grande trabalho *A corrente Galvânica, Tratada matematicamente*. Sem a lei de Ohm não poderíamos analisar a mais simples corrente galvânica (circuito elétrico).

Ohm nasceu em Erlangen, Bavária, sendo o mais velho de sete crianças em uma família de classe média-baixa. Abandonou cedo a Universidade de Erlangen, mas retornou em 1811 e obteve seu doutorado e o primeiro de uma série de cargos de professor de matemática, posições estas modestas e mal remuneradas. Para melhorar de posição, lançava-se em pesquisas elétricas em toda folga do seu duro trabalho de professor, e seus esforços culminaram na famosa lei. A Sociedade Real de Londres agraciou-o com a medalha de Copley, em 1841, e a Universidade de Munique contratou-o como professor da cadeira de Física, em 1849. Foi também homenageado após sua morte quando o Ohm foi escolhido como unidade de resistência elétrica.

A lei de ohm é dada por  $V = R \cdot I$ , onde  $V$  é a tensão,  $R$  é a resistência e  $I$  é a corrente, assim a figura mostra as outras formulas úteis que podem surgir da lei de ohm.

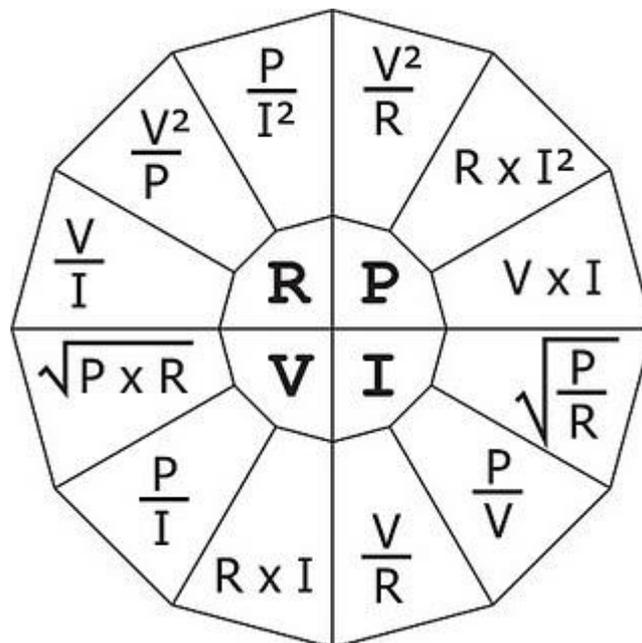


Figura 47: Mostra um dodecágono, onde estar as fórmulas para o cálculo de Resistência elétrica( $\Omega$ ), potência elétrica(W), corrente elétrica(A), Tensão elétrica (V) todas originadas da lei de ohm. Fonte: (<http://clubdoeletrotecnico.blogspot.com.br/> )

### A.3 ALESSANDRO VOLTA (1745-1827)

A teoria de circuito elétrico teve seu início real em 20 de março de 1800, quando o físico italiano Alessandro Volta anunciou sua invenção da bateria elétrica. Esse magnífico dispositivo possibilitou a Volta produzir corrente elétrica. Foi homenageado 54 anos após sua morte, quando a unidade de força eletromotriz foi oficialmente denominada *volt*.



Figura 48: A primeira pilha de 1800, usa-se uma série de discos de zinco e prata, separados por papel cartão embebido em salmoura. (<http://www.brasilescola.com/quimica/alessandro-volta.htm>).

### A.4 GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (1824-1887)

A lei de Ohm é fundamental para circuitos elétricos, mas mesmo para analisar o mais simples circuito, são necessárias duas leis adicionais formuladas em 1847 pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff. Estas leis – Lei de Kirchhoff das correntes e Lei de Kirchhoff das tensões- são notáveis, considerando que o interesse principal de Kirchhoff residia em seu trabalho de espectroscopia com o destacado químico alemão Robert Busen, a quem devemos o bico de Bunsen. Naquele campo formulou outra lei: a lei de radiação de Kirchhoff.

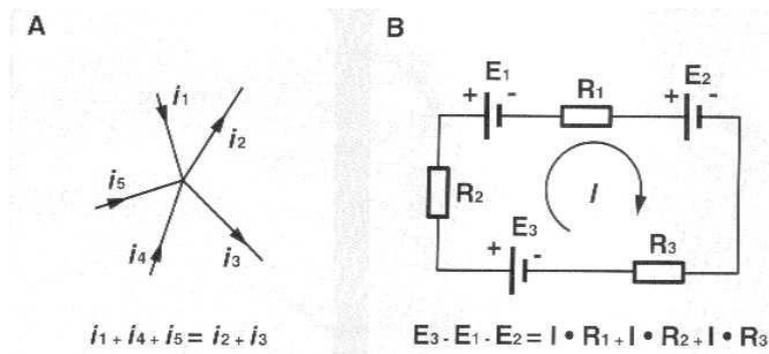


Figura 49: a) Lei das correntes em um nó, b) Lei das tensões em uma malha fechada. (Fonte : [http://etsua.no.sapo.pt/electronica/teoria/leis\\_de\\_kirchhoff.html](http://etsua.no.sapo.pt/electronica/teoria/leis_de_kirchhoff.html))

#### A.5 LEONHARD EULER (1707-1783)

A aplicação das leis de Kirchoff a um circuito com vários nós e laços pode ser extremamente difícil, a menos que usemos um ramo da matemática conhecido como *teoria dos gráficos*. O pai da teoria dos gráficos foi o grande matemático suíço Leonhard Euler, cuja famosa publicação de 1736, *As Sete Pontes de Königsberg*, foi o primeiro tratado dessa matéria. Ele também realizou importantes contribuições originais em todos os ramos da matemática de seu tempo, e a fórmula de Euler é a base do método de fasores para resolução de circuito C.A.

#### A.6 MICHAEL FARADAY (1791-1867)

Em 29 de agosto de 1831, Michael Farady, grande químico e físico inglês, descobriu a indução eletromagnética, ao constatar que o movimento de um ímã através de uma bobina de fio de cobre causava o fluxo de uma corrente no fio. Como o motor e o gerador são baseados neste princípio, a descoberta de Faraday provocou mudanças no curso da história mundial.

Faraday foi talvez o maior experimentalista de todos os tempos, com realizações creditadas em quase todas as áreas da física conhecidas em seu tempo. Para descrever o fenômeno que investigava, ele e um amigo, filósofo e cientista, inventaram novas palavras como eletrólise, eletrolítico, íon, ânodo e catodo. Em sua honra, a unidade de capacitância e denominada *farad*.

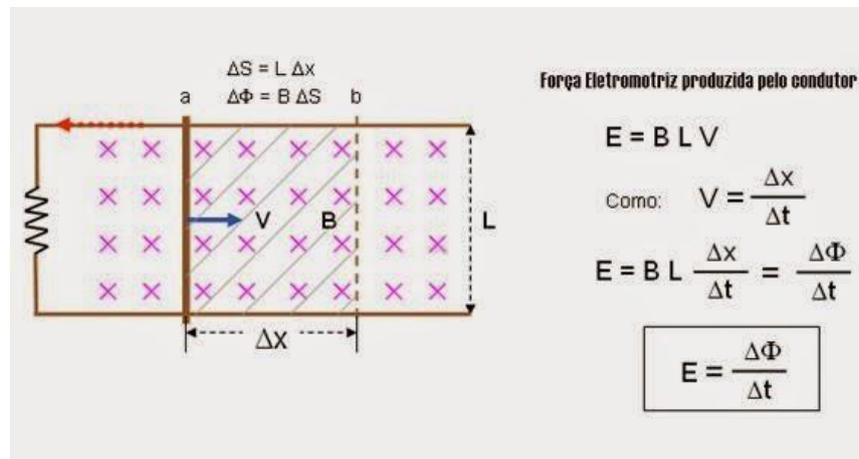


Figura 50: Lei de Faraday, variação de fluxo magnético produz tensão induzida, o condutor em movimento gera em seus terminais uma força eletromotriz E. (Fonte: <http://fisica-mentee.blogspot.com.br/2014/08/lei-de-faraday-por-eloiisa-capeletto.html>)

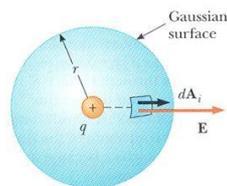
## A.7 JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

Foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica.

### LEI DE GAUSS

Através da Lei de Gauss podemos calcular o campo elétrico para distribuições simétricas de cargas em problemas mais complexos.

Consideramos uma carga pontual positiva  $q$  situada no centro de uma superfície esférica de raio  $r$ .



As linhas do campo irradiam para fora e, portanto, são perpendiculares à superfície em cada ponto

$\vec{\Delta A}_i \rightarrow$  é um vetor que representa um elemento  $\Delta A_i$  local de área

O fluxo através da pequena área é

$$\Delta\Phi_E = \vec{E}_n \cdot \vec{\Delta A}_i = E\Delta A_i \cos 0^\circ = E\Delta A_i$$

O fluxo resultante através de toda a superfície  $\rightarrow \Phi_E = \oint E_n dA = \oint E dA$

Como  $E$  é constante sobre toda a superfície  $\Rightarrow \Phi_E = E \oint dA = EA$

5

Figura 51: Lei de Gauss para o eletromagnetismo.

Fonte: <http://slideplayer.com.br/slide/328364/>

Na física, a lei de Gauss é a lei que estabelece a relação entre o fluxo elétrico que passa através de uma superfície fechada e a quantidade de carga elétrica que existe dentro do volume limitado por esta superfície. A lei de Gauss é uma das quatro equações de Maxwell e foi elaborada por Carl Friedrich Gauss no século XIX.

## A.8 JAMES CLERK MAXWELL

Realizou uma análise matemática exaustiva que desembocou um conjunto de equações conhecidas atualmente como *Equações Maxwell*, coroando os esforços de Faraday para relacionar os efeitos elétricos e magnéticos. Como consequência de suas equações, Maxwell também desenvolveu em 1862, a teoria eletromagnética da luz, segundo a qual todas as ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo à velocidade da luz ( $3 \times 10^8$  m/s).

FORMA INTEGRAL	FORMA DIFERENCIAL
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{encl}}$	$\nabla \cdot \vec{B} = -\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Figura 52: Equações de Maxwell.

Fonte: <https://moodle.ufsc.br/mod/book/view.php?id=504304&chapterid=2711>.

Baseando-se nos estudos de Michael Faraday, Maxwell unificou, em 1864, todos os fenômenos elétricos e magnéticos observáveis em um trabalho que estabeleceu conexões entre as várias teorias da época, derivando uma das mais elegantes teorias já formuladas.

## APÊNDICE B: COMPONENTES ESPECIAIS

Aqui é citado alguns componentes utilizados nas experiências, uma maior profundidade sobre seu funcionamento se encontra nos livros de eletricidade ou eletrônica.

### B.1 RESISTOR

Resistores são fabricados a partir de vários materiais e estão disponíveis em diversos tamanhos e valores. Suas características incluem um valor nominal de resistência, uma precisão com que a resistência real se aproxima do valor nominal (conhecida como tolerância).

A figura 49 mostra código de cores para resistores, para decodificar considera-se que uma das extremidades terá somente um anel indicando a tolerância, já na outra extremidade haverá três ou quatro anéis os dois ou três anéis será os algarismos significativos e o terceiro ou quarto anel será o multiplicador.

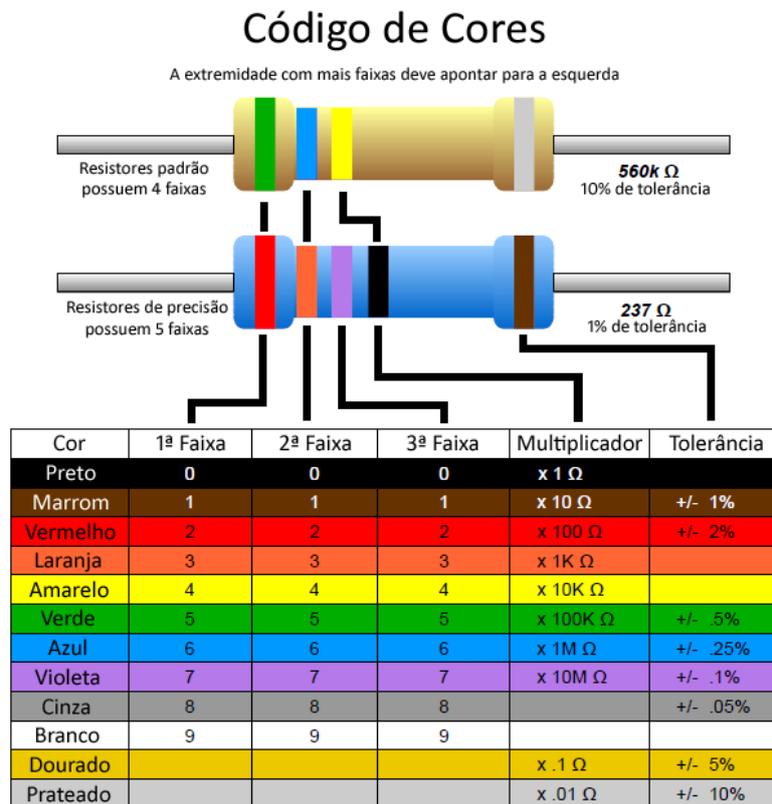


Figura 53: Código de Cores para Resistores. Fonte: <http://www.arduinoocia.com.br/2013/08/codigo-de-cores-de-resistores.html>

### B.2 CAPACITOR

A propriedade que estes dispositivos têm de armazenar energia elétrica sob a forma de um campo eletrostático é chamada de capacitância ou capacidade ( $C$ ) e é medida pelo quociente

da quantidade de carga ( $Q$ ) armazenada pela diferença de potencial ou *tensão* ( $V$ ) que existe entre as placas:<sup>8</sup>

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Pelo Sistema Internacional de Unidades (SI), um capacitor tem a capacitância de um farad ( $F$ ) quando um coulomb de carga causa uma diferença de potencial de um volt ( $V$ ) entre as placas (ou armaduras). O farad é uma unidade de medida considerada muito grande para circuitos práticos, por isso, são utilizados valores de capacitâncias expressos em microfarads ( $\mu F$ ), nanofarads ( $nF$ ) ou picofarads ( $pF$ ).

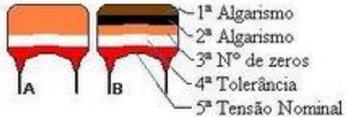
A equação acima é exata somente para valores de  $Q$  muito maiores que a carga do elétron ( $e = 1,6021 \times 10^{-19} C$ ). Por exemplo, se uma capacitância de  $1 pF$  fosse carregada a uma tensão de  $1 \mu V$ , a equação perderia uma carga  $Q = 10^{-19} C$ , mas isto seria impossível já que seria menor do que a carga em um único elétron. Entretanto, as experiências e as teorias recentes sugerem a existência de cargas fracionárias.

A capacitância de um capacitor de placas paralelas constituído de dois eletrodos planos idênticos de área  $A$  separados à distância constante  $d$  é aproximadamente igual a:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

onde

- $C$  é a capacitância em farad
- $\epsilon_0$  é a permissividade eletrostática do meio (vácuo ou espaço livre)
- $\epsilon_r$  é a constante dielétrica ou permissividade relativa do isolante utilizado.



	1º Algarismo	2º Algarismo	3º Nº de zeros	4º Tolerância	5º Tensão
PRÉTO	0	0	-	± 20%	-
MARROM	1	1	0	-	-
VERMELHO	2	2	00	-	250V
LARANJA	3	3	000	-	-
AMARELO	4	4	0000	-	400V
VERDE	5	5	00000	-	-
AZUL	6	6	-	-	630V
VIOLETA	7	7	-	-	-
CINZA	8	8	-	-	-
BRANCO	9	9	-	± 10%	-

Figura 54: mostra tabela para código de cores para capacitores de Poliéster. Fonte : ([http://www.labdegaragem.com.br/wiki/index.php?title=Tabelas\\_de\\_Capacitores](http://www.labdegaragem.com.br/wiki/index.php?title=Tabelas_de_Capacitores))



Figura 55: Código para capacitores de cerâmica .Fonte ( [http://www.portalrobotica.com.br/site/index.php?option=com\\_content&view=article&id=52:tabela-de-capacitores-ceramicos&catid=19:introducao-a-eletronica&Itemid=4](http://www.portalrobotica.com.br/site/index.php?option=com_content&view=article&id=52:tabela-de-capacitores-ceramicos&catid=19:introducao-a-eletronica&Itemid=4))

### B.3 DIODO LED

O diodo emissor de luz, também conhecido pela sigla em inglês LED (Light Emitting Diode), é usado para a emissão de luz em locais e instrumentos onde se torna mais conveniente a sua utilização no lugar de uma lâmpada. Especialmente utilizado em produtos de microeletrônica como sinalizador de avisos, também pode ser encontrado em tamanho maior, como em alguns modelos de semáforos. Também é muito utilizado em painéis de led, cortinas de led e pistas de led .

A luz emitida não é monocromática, mas a banda colorida é relativamente estreita. A cor, portanto, dependente do cristal e da impureza de dopagem com que o componente é fabricado. O led que utiliza o arsenieto de gálio emite radiações infravermelhas. Dopando-se com fósforo, a emissão pode ser vermelha ou amarela, de acordo com a concentração. Utilizando-se fosfeto de gálio com dopagem de nitrogênio, a luz emitida pode ser verde ou amarela. Hoje em dia, com o uso de outros materiais, consegue-se fabricar leds que emitem luz azul, violeta e até ultravioleta. Existem também os leds brancos, mas esses são geralmente leds emissores de cor azul, revestidos com uma camada de fósforo do mesmo tipo usado nas lâmpadas fluorescentes, que absorve a luz azul e emite a luz branca. Com o barateamento do preço, seu alto rendimento e sua grande durabilidade, esses leds tornam-se ótimos substitutos para as lâmpadas comuns, e devem substituí-las a médio ou longo prazo.

Em geral, os leds operam com nível de tensão de 1,6 a 3,3V, sendo compatíveis com os circuitos de estado sólido. É interessante notar que a tensão é dependente do comprimento da onda emitida. Assim, os leds infravermelhos geralmente funcionam com menos de 1,5V, os vermelhos com 1,7V, os amarelos com 1,7V ou 2.0V, os verdes entre 2.0V e 3.0V, enquanto

os leds azuis, violeta e ultravioleta geralmente precisam de mais de 3V. A potência necessária está na faixa típica de 10 a 150 mW, com um tempo de vida útil de 100.000 ou mais horas.

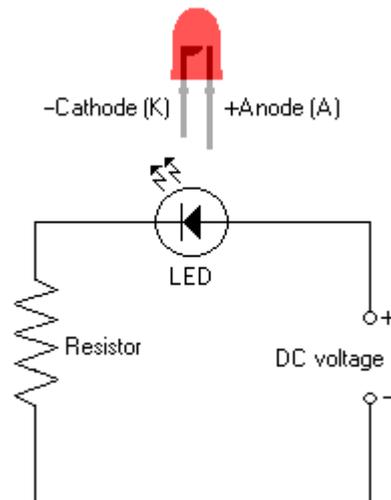


Figura 56: Mostra o esquema de um Led ligado ao circuito, quando ligado seguindo a corrente convencional ou seja do positivo para o negativo o Led acende, caso contrário fica apagado e não conduz corrente.

Fonte: <http://www.pisotones.com/Articulos/Construc.htm>

#### B.4 LDR

LDR (do inglês *Light Dependent Resistor*), em português Resistor Dependente de Luz ou Fotorresistência é um componente eletrônico passivo do tipo resistor variável, mais especificamente, é um resistor cuja resistência varia conforme a intensidade da luz (iluminamento) que incide sobre ele. Tipicamente, à medida que a intensidade da luz aumenta, a sua resistência diminui. O LDR é construído a partir de material semicondutor com elevada resistência elétrica. Quando a luz que incide sobre o semicondutor tem uma frequência suficiente, os fótons que incidem sobre o semicondutor libertam elétrons para a banda condutora que irão melhorar a sua condutividade e assim diminuir a resistência.

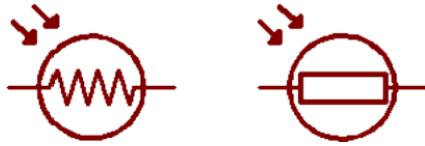


Figura 57: Símbolos do LDR utilizadas em esquemas eletrônicos. À esquerda a simbologia americana e à direita a europeia.

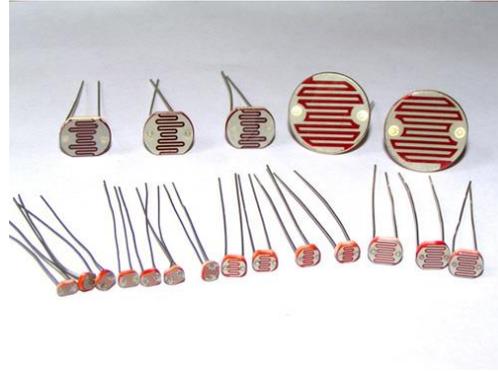


Figura 58: Tipos de LDR.(Fonte: <http://www.robotix.in/tutorials/category/auto/lfr>)

Um multímetro pode ser usado para encontrar a resistência na escuridão ou na presença de luz intensa. Os resultados típicos para um LDR poderão ser:

- Escuridão: resistência máxima, geralmente mega ohms.
- Luz muito brilhante: resistência mínima, geralmente dezenas de ohms.

## B.5 TRANSISTOR

O transístor ou transistor é um componente eletrônico que começou a popularizar-se na década de 1950, tendo sido o principal responsável pela revolução da eletrônica na década de 1960. São utilizados principalmente como amplificadores e interruptores de sinais elétricos, também são usados como retificadores elétricos em um circuito podendo ter variadas funções. O termo provém do inglês *transfer resistor* (resistor/resistência de transferência), como era conhecido pelos seus inventores.

O transistor é considerado por muitos uma das maiores descobertas ou invenções da história moderna, tendo tornado possível a revolução dos computadores e equipamentos eletrônicos. A chave da importância do transistor na sociedade moderna é sua possibilidade de ser produzido em enormes quantidades usando técnicas simples, resultando preços irrisórios.

É conveniente salientar que é praticamente impossível serem encontrados circuitos integrados que não possuam, internamente, centenas, milhares ou mesmo milhões de transistores, juntamente com outros componentes como resistores e condensadores. Por exemplo, o microprocessador Cell do console Playstation 3 tem aproximadamente 234 milhões de transistores, usando uma arquitetura de fabricação de 45 nanômetros, ou seja, a porta de controle de cada transistor tem apenas 45 milionésimos de um milímetro.

Os materiais utilizados na fabricação do transistor são principalmente o Silício (Si), o Germânio (Ge), o Gálio (Ga) e alguns óxidos. Na natureza, o silício é um material isolante elétrico, devido à conformação das ligações eletrônicas do seu átomo, gerando uma rede eletrônica altamente estável. Atualmente, o transistor de germânio é menos usado, tendo sido substituído pelo de silício.

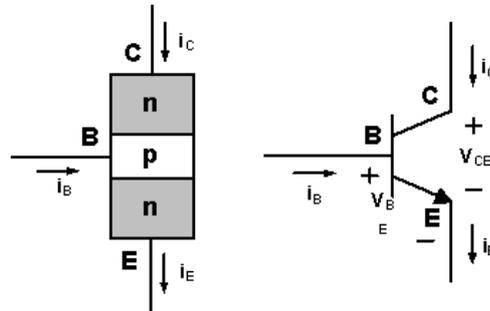


Figura 59: Mostra a estrutura do transistor NPN e o seu Símbolo. Fonte :[http://macao.communications.museum/por/exhibition/secondfloor/moreinfo/2\\_10\\_3\\_How TransistorWorks.html](http://macao.communications.museum/por/exhibition/secondfloor/moreinfo/2_10_3_How TransistorWorks.html)

A figura abaixo mostra uma das polarizações do transistor como também a curva de carga.

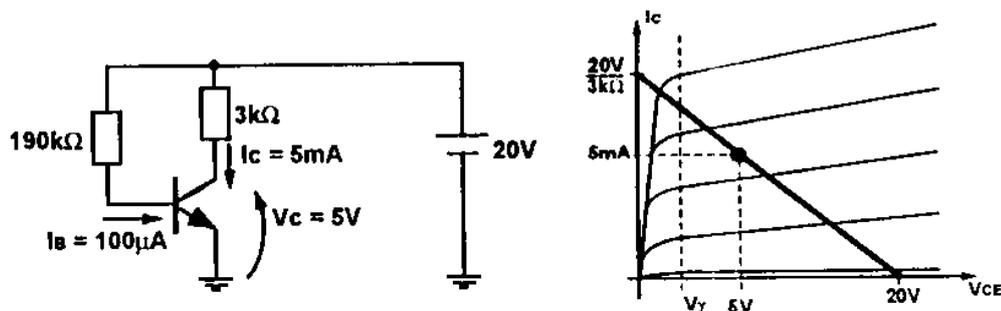


Figura 60: Polarização do transistor e sua curva de carga, o transistor é NPN. Fonte :(<http://www.lsi.usp.br/~eletroni/frames3/poli/labelo1/polariza/polariza.html>)

O transistor tem três tipos de correntes, corrente da base, corrente do coletor e a corrente do emissor, além disso o ganho do transistor depende do tipo e é representado por  $\beta$  ou  $h_{FE}$ .

O seu funcionamento e aplicações são bastante explorados no livro dispositivos eletrônicos (autor: Boylastad).

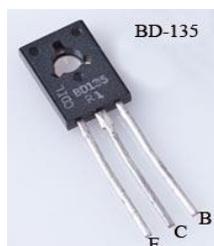


Figura 61: Transistor BD 135 utilizado na montagem do sensor de luz, importante saber os terminais, C (coletor) B (base) e E (emissor).

### B.6 CI 7448 (decodificador de 7 segmentos)

O Circuito integrado sn 7448 é utilizado para converter do binário para o decimal ou seja é ligado juntamente com o display de 7 segmento, a figura abaixo mostra a sua *pinagem*.



Figura 62: Diagrama do CI 7448

Fonte: <http://electronica.ilaweb.com/tag/7448/>



Figura 63: CI 7448 com 16 pinos.

### B.7 DISPLAY DE 7 SEGMENTOS

Um display de sete segmentos, é um tipo de *display* (mostrador). Utiliza-se em cada pino um resistor que varia de 100  $\Omega$  à 220. É do decodifica geralmente ligado a um decodificador, o da experiência aqui foi o CI 7448, pois as 7 saídas do mesmo são ligadas as 7 entradas do display que são a,b,c,d,e,f e g, são pequenos leds, que quando acesos e combinados forma o número desejado, também deve-se ter cuidado com o tipo de display, que pode ser Anodo comum ou Catodo comum, isso dependerá do decodificador, o 7448 é usado com Catodo Comum, ou seja os pinos 3 ou 8 devem ser aterrados, ou ligados no polo negativo.

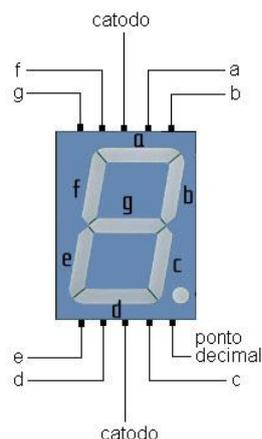


Figura 64: Diagrama do Display de 7 segmentos.

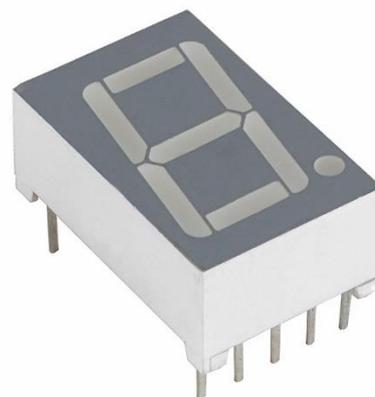


Figura 65: Display de 7 segmentos com 10 pinos.

## APÊNDICE C: EQUIPAMENTOS ESPECIAIS

### C.1 OSCILOSCÓPIO

O osciloscópio é um instrumento (de medição) que permite visualizar graficamente sinais elétricos. Na maioria das aplicações, o osciloscópio mostra como é que um sinal elétrico varia no tempo. A utilidade do osciloscópio não se limita ao mundo da eletricidade/eletrônica. Com o transdutor apropriado, o osciloscópio poderá utilizar-se para visualizar e medir qualquer tipo de grandeza física. Um transdutor é um dispositivo que cria um sinal elétrico a partir de um estímulo de outro tipo de grandeza, tal como som, luz. Embora os osciloscópios digitais permitam analisar sinais transitórios, o osciloscópio é, por princípio, um instrumento de medição adequado a medir (analisar) sinais periódicos. Podem ver-se a forma senoidal da tensão disponível numa tomada de energia, os impulsos (digitais) que circulam no interior de um computador, os sinais elétricos do sistema elétrico de um automóvel (do sistema de ignição, por exemplo) e a onda em dente de serra utilizada para fazer o varrimento horizontal num televisor.

Basicamente tem dois canais X e Y, tem a escala de tensão para cada canal e tem a escala de tempo. As demais funções habitua-se com pouco treino e analisando o manual.

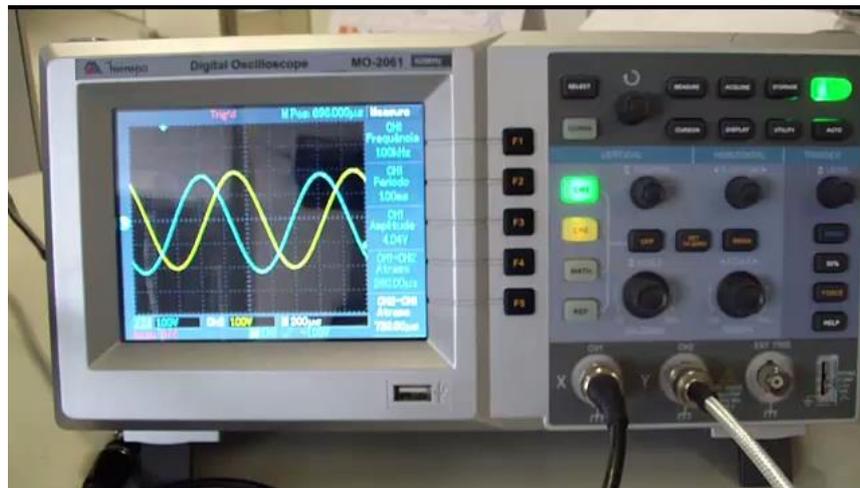


Figura 66: Osciloscópio digital da minipa, utilizado nas experiências.

Para consultar o manual, está disponível em:

<http://www.minipa.com.br/Content/Manuais/MO-2025-2032-2061-2100-2200-1103-BR.pdf>.

## C.2 GERADOR DE SINAIS

Um gerador de funções é um aparelho eletrônico utilizado para gerar sinais elétricos de formas de onda, frequências (de alguns Hz a dezenas de MHz) e amplitude (tensão) diversas. São muito utilizados em laboratórios de eletrônica como fonte de sinal para teste de diversos aparelhos e equipamentos eletrônicos.

Um gerador de funções deve poder gerar sinais senoidais, triangulares, quadrados, dente-de-serra, com sweep (frequência variável), todos com diversas frequências e amplitudes. Tem um frequencímetro tem dois botões que faz essa função, tem a seleção de sinais, que pode ser senoidal, triangular ou retangular. Tem a saída do sinal que é conectada onde tem  $50 \Omega$ , tem a regulagem de amplitude e vai até 20 V pico a pico com o mostrador desta voltagem, essas são as principais funções, as demais consulta-se o manual.



Figura 67: Gerador de Sinais, INSTRUTHERM, modelo GF-200

### C.3 PROTOBOARD

Uma placa de ensaio ou matriz de contato, (ou protoboard, ou breadboard em inglês) é uma placa com furos (ou orifícios) e conexões condutoras para montagem de circuitos elétricos experimentais. A grande vantagem da placa de ensaio na montagem de circuitos eletrônicos é a facilidade de inserção de componentes, uma vez que não necessita soldagem. As placas variam de 800 furos até 6000 furos, tendo conexões verticais e horizontais. A conexão em série de componentes é exemplificado na figura 57, onde tem-se três leds e um resistor, tem uns fios fazendo as ligações e uma bateria alimentando a trilha de cima ficando toda a parte horizontal com este potencial.

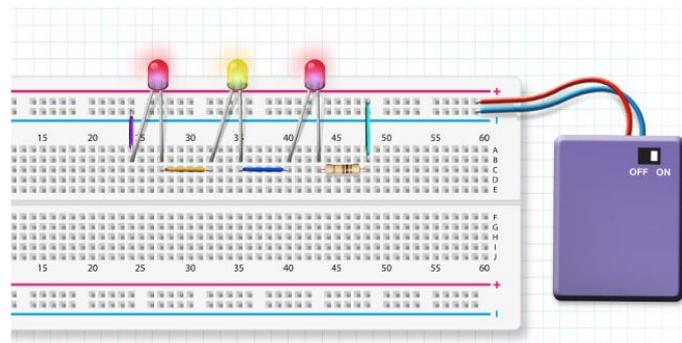


Figura 68: Mostra três leds e um resistor ligados em série no protoboard, como também uma bateria. Fonte: [http://www.dreaminc.com.br/sala\\_de\\_aula/conexoes-em-serie/](http://www.dreaminc.com.br/sala_de_aula/conexoes-em-serie/).

## APÊNDICE D: RELAÇÕES MATEMÁTICAS

### D.1 VALOR MÉDIO QUADRÁTICO (rms) PARA UMA ONDA SENOIDAL.

Temos que o valor eficaz ou rms (root mean square) é dado por:  $V_{rms} = \sqrt{\frac{\int f(x)dx}{T}}$ , onde  $T$  é o período do sinal, assim temos que  $f(t) = V_P^2 \text{sen}^2(\omega t)$ , onde queremos a média da potência elétrica, que está em função da tensão ao quadrado, logo teremos que resolver a seguinte integral:  $\int_0^\pi V_P^2 \text{sen}^2 \theta d\theta$ , sabemos que  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta$ , ou  $\cos 2\theta = 1 - 2\text{sen}^2 \theta$ , assim fica  $\text{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ , substituindo na integral fica:  $\int_0^\pi V_P^2 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{V_P^2}{2} \pi$ , assim o valor eficaz para sinal senoidal vai ser dado por  $V_{rms} = \sqrt{\frac{\frac{V_P^2}{2} \pi}{\pi}} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}$ , como exemplo se quisermos saber o valor da tensão de pico da rede elétrica fica  $V_p = V_{rms} \cdot \sqrt{2} = 220 \cdot \sqrt{2} = 311,12V$ .

### D.2 REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

As equações algébricas do tipo  $x^2 = -3$  não possuem soluções no campo dos números reais. Tais equações podem ser resolvidas somente com a introdução de uma unidade *imaginária* ou operador *imaginário*, que representamos pelo símbolo  $j$ . Por definição  $j = \sqrt{-1}$ . O produto de um número real por um operador *imaginária* é chamado de *número imaginário* e a soma de um número real e um número imaginário é chamada *número complexo*. Assim, um número com a forma  $a + jb$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais, é um *número complexo*.

O *número complexo* é representado por:

$$\hat{A} = a + jb \quad (3.1)$$

O *número complexo*  $\hat{A}$  é descrito como tendo uma componente real  $a$  e uma componente *imaginária*  $b$ , que podem ser representadas por:

$$\Re[\hat{A}] = a \quad (3.2)$$

$$\Im[\hat{A}] = b \quad (3.3)$$

A componente imaginária de  $\hat{A}$  não é  $jb$ . Por definição, a componente imaginária é um número real.

Existem quatro formas de representação dos números complexos:

1. Forma retangular ou cartesiana
2. Forma exponencial
3. Forma polar
4. Forma trigonométrica

Os números complexos representados pela Equação [3.1](#) estão na forma *retangular ou cartesiana*.

Para representar na forma *exponencial* utilizamos a identidade de *Euler*, ou seja:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\operatorname{sen}\theta \quad (3.4)$$

Multiplicando ambos os membros da identidade de *Euler* pelo número real,  $A$  temos:

$$Ae^{j\theta} = A\cos\theta + jA\operatorname{sen}\theta \quad (3.5)$$

Comparando a Equação [3.5](#) com a Equação [3.1](#) temos:

$$A\cos\theta = a \quad (3.6)$$

$$A\operatorname{sen}\theta = b \quad (3.7)$$

Elevando as Equações [3.6](#) e [3.7](#) ao quadrado e somando, temos:

$$A^2 = a^2 + b^2 \quad (3.8)$$

e

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.9)$$

Dividindo a Equação [3.7](#) pela Equação [3.6](#):

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tan}\theta \quad (3.10)$$

$$\theta = \operatorname{arctan}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (3.11)$$

A representação de um número complexo na forma *polar* é essencialmente a mesma da forma *exponencial*, exceto por uma pequena diferença de simbologia, ou seja:

$$\hat{A} = A \angle \theta \quad (3.12)$$

Fonte : <http://www.dsee.fee.unicamp.br/~sato/ET515/node29.html>.

## D3) ALGUMAS INTEGRAIS E DERIVADAS

**Derivadas e Integrais**

Na tabela de derivadas e integrais abaixo, considere que:

- 1-  $x$  é a variável independente,
- 2-  $u$  e  $v$  são funções de  $x$ ,
- 3-  $A$  e  $M$  são constantes arbitrárias e  $N$  é uma constante inteira.

Para cada integral indefinida, existe uma constante de integração. Você pode encontrar tabelas mais completas, por exemplo, em:

- *Handbook of Chemistry and Physics*, (CRC Press Inc.),
- *Handbook of Mathematical Functions*, Abramowitz & Stegun (Dover).

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\frac{dx}{dx} = 1</math></li> <li>2. <math>\frac{d}{dx}(Au) = A \frac{du}{dx}</math></li> <li>3. <math>\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}</math></li> <li>4. <math>\frac{d}{dx}x^M = Mx^{M-1}</math></li> <li>5. <math>\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}</math></li> <li>6. <math>\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}</math></li> <li>7. <math>\frac{d}{dx}e^x = e^x</math></li> <li>8. <math>\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x</math></li> <li>9. <math>\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x</math></li> <li>10. <math>\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x</math></li> <li>11. <math>\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{csc}^2 x</math></li> <li>12. <math>\frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x</math></li> <li>13. <math>\frac{d}{dx} \operatorname{csc} x = \cot x \operatorname{csc} x</math></li> <li>14. <math>\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}</math></li> <li>15. <math>\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx}</math></li> <li>16. <math>\frac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\int dx = x</math></li> <li>2. <math>\int Au \, dx = A \int u \, dx</math></li> <li>3. <math>\int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx</math></li> <li>4. <math>\int x^M \, dx = \frac{x^{M+1}}{M+1}</math> (para <math>M \neq -1</math>)</li> <li>5. <math>\int \frac{dx}{x} = \ln x </math></li> <li>6. <math>\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx</math></li> <li>7. <math>\int e^x \, dx = e^x</math></li> <li>8. <math>\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x</math></li> <li>9. <math>\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x</math></li> <li>10. <math>\int \tan x \, dx = \ln \sec x </math></li> <li>11. <math>\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x</math></li> <li>12. <math>\int e^{-Ax} \, dx = \frac{1}{A}e^{-Ax}</math></li> <li>13. <math>\int x e^{-Ax} \, dx = -\frac{1}{A^2}(Ax+1)e^{-Ax}</math></li> <li>14. <math>\int x^2 e^{-Ax} \, dx = -\frac{1}{A^3}(A^2x^2 + 2Ax + 2)e^{-Ax}</math></li> <li>15. <math>\int x^N e^{-Ax} \, dx = -\frac{N!}{A^{N+1}}</math></li> <li>16. <math>\int x^{2N} e^{-Ax^2} \, dx = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2N-1)}{2^{N+1} a^N} \sqrt{\frac{\pi}{A}}</math></li> </ol>
--	---

#### D4) EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Muitas vezes em física, engenharia e outros ramos técnicos, há necessidade de encontrar uma função incógnita. Em muitos casos esta pesquisa leva a uma equação envolvendo derivadas (ou diferenciais) da função incógnita. Tais equações envolvendo derivadas (ou diferenciais) são chamadas **equações diferenciais**, em que a incógnita não é um número, mas uma função.

Se a função incógnita depende apenas de uma variável, temos uma *equação diferencial ordinária*. Se depender de mais de uma variável, temos uma *equação diferencial parcial*.

Uma solução particular pode ser obtida se forem dadas certas condições iniciais. Uma *condição inicial* de uma equação diferencial é uma condição que especifica um valor particular de  $y$ ,  $y_0$ , correspondente a um valor particular de  $x$ ,  $x_0$ . Isto é, se  $y = f(x)$  pode ser uma solução da equação diferencial, então a função deve satisfazer a condição:  $y_0 = f(x_0)$ . O problema de ser dada uma equação diferencial com condições iniciais é chamado um *problema de valor inicial*.

São equações da forma

$$a y'' + b y' + c y = f(x) \quad (\text{NH})$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  são constantes reais. A equação

$$a y'' + b y' + c y = 0, \quad (\text{H})$$

é chamada equação **homogênea** associada à **não-homogênea**.

**Teorema:** Sejam  $u(x)$  e  $v(x)$  soluções LI de (H). Então, a solução geral de (H) é dada por:

$$y_H(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x).$$

Além disso, a solução de (NH) é da forma

$$y_{\text{NH}}(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x) + y_P(x),$$

Onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes genéricas e  $y_P(x)$  é uma solução particular de (NH).

**OBS:** A busca da solução geral de uma EDO linear de 2º ordem envolve dois estágios: a determinação da solução geral da equação homogênea (H) e uma solução particular da não-homogênea (NH).

**Teorema** *Solução geral de uma equação linear homogênea (H)*

\* Raízes Reais Distintas Se  $r_1 \neq r_2$  são raízes reais distintas da equação característica, então a solução geral é:

$$y = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x}.$$

\* Raízes Reais Iguais Se  $r_1 = r_2$  são raízes reais iguais da equação característica, então a solução geral é:

$$y = c_1 \cdot e^{r x} + c_2 \cdot x \cdot e^{r x} = (c_1 + c_2 \cdot x) e^{r x}.$$

\* Raízes Complexas Se  $r_1 = \alpha + \beta i$  e  $r_2 = \alpha - \beta i$  são raízes complexas da equação característica, então a solução geral é:

$$y = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x.$$