



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**JOZILDES VIEIRA LIMA**

**APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO  
ATRAVÉS DO MOVIMENTO DAS MARÉS E DAS  
ONDAS SONORAS**

Mossoró-RN  
08 de julho de 2013

Jozildes Vieira Lima

*APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES SENO E  
COSSENO ATRAVÉS DO MOVIMENTO  
DAS MARÉS E ONDAS SONORAS*

Mossoró - RN

8 de julho de 2013

Jozildes Vieira Lima

*APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES SENO E  
COSSENO ATRAVÉS DO MOVIMENTO  
DAS MARÉS E ONDAS SONORAS*

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-árido-UFERSA, Campus Mossoró, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Elmer Rolando Llanos Villarreal

Co-orientador:

Antonio Ronaldo Gomes Garcia

Mossoró - RN

8 de julho de 2013

Dissertação de Projeto Final de Mestrado sob o título “*APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO ATRAVÉS DO MOVIMENTO DAS MARÉS E ONDAS SONORAS*”, defendida por Jozildes Vieira Lima e aprovada em 8 de julho de 2013, em Mossoró, Estado do Rio Grande do Norte, pela banca examinadora constituída pelos professores:

---

Prof. Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal  
UFERSA  
Orientador

---

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia  
UFERSA  
Co-Orientador

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha  
UFSJ  
Membro Externo

---

Dr. Django Jesus Dantas  
UFERSA  
Membro Externo

# *Dedicatória*

A minha mãe Maria Zilda Vieira Lima que tanto acreditou no meu potencial, ao meu pai João de Oliveira Lima (in memoriam) que com certeza está transbordando de alegria com essa conquista na minha vida profissional. A minha esposa Ana Paula de Moraes Lima e filhos João Pedro de Moraes Lima e João Victor de Moraes Lima que não mediram esforços em compreender o meu sacrifício na busca de uma melhor qualificação e garantir uma melhor e qualidade de vida para todos.

# *Agradecimentos*

A Deus pela oportunidade que ele me proporcionou em concluir mais uma etapa da minha vida profissional. Aos meus amigos que sempre me apoiaram nos momentos mais difíceis. Agradeço ao coordenador do curso PROFMAT- Prof. Dr. Antônio Ronaldo Gomes Garcia que com sua sabedoria me indicou o caminho correto para concluir este trabalho.

## Resumo

Atividades que envolvem Modelagem Matemática implicam na resolução de situações problemas, que, de modo geral, não são resolvidas por meio de procedimentos predefinidos e cujas soluções são previamente conhecidas. Diante desta situação é que estamos desenvolvendo este trabalho tendo como objetivo inserir o estudo das funções circulares através de situações concretas e de recursos tecnológicos, como o Geogebra sendo que este mesmo trabalho pode também vir a ser desenvolvido com o Graphmática. Na aplicação dessas atividades buscamos abordar o tema de maneira problematizada, a fim de despertar interesse nos alunos tanto no conteúdo, quanto na disciplina de Matemática, uma vez que este tipo de trabalho pode ser desenvolvido em outros tópicos da Matemática. A Modelagem Matemática torna-se o ponto inicial para resolver problemas concretos, levando os educandos a compreender os diversos conceitos e propriedades das funções. As situações problemas trabalhadas a partir de exemplos concretos sobre o movimento das marés e da propagação das ondas sonoras, representam uma estratégia pedagógica para dinamizar e tornar as aulas de Matemática mais atrativas e reflexivas, possibilitando um maior interesse nos alunos na busca da melhoria da aprendizagem. Ao final da realização das atividades movimento das marés, com dados da tábua das marés da praia de Canoa Quebrada localizada na cidade de Aracati pesquisado pelos educandos, e das ondas sonoras com a manipulação do Fourier, espera-se que os alunos saibam identificar domínio, período, imagem, contradomínio, valor máximo e mínimo, compreender e identificar os gráficos dessas funções e resolver problemas que envolvam o estudo das funções seno e cosseno. Pretende-se argumentar que aliar teoria e prática através de situações que tenham significado para o aluno tornando o seu aprendizado satisfatório.

**Palavras-Chave:** Modelagem Matemática; Situações Problemas; Aprendizagem; Funções Periódicas; Recursos Tecnológicos.

## Abstract

Activities that involve mathematical modeling involve in solving problem situations, which, in general, are not resolved through predefined procedures and whose solutions are known in advance. Faced with this situation is that we are developing this work aiming to enter the study of circular functions through concrete situations and technological resources, such as Geogebra and this same work can also potentially be developed with Graphmatica. In implementing these activities seek to address the issue so problematic, in order to arouse interest in students both in content, as in mathematics, since this type of work can be developed in other topics of mathematics. The Mathematical Modeling becomes the starting point for solving concrete problems, leading the students to understand the various concepts and properties of functions. Situations problems worked from the concrete example of the movement of the tides and the propagation of sound waves, represent a pedagogical strategy to streamline and make mathematics lessons more attractive, allowing a greater interest in students seeking to improve their learning. At the end of the realization of the activity data with tidal movement of the board of tide of Canoa Quebrada located in Aracaty researched by students and of sound waves with the Fourier manipulation, it is expected that students can identify domain, period, image, codomain, maximum and minimum value, understand and identify the graphs of these functions and solve problems involving the study of sine and cosine functions. Intend to argue that combine theory and practice through situations that are meaningful to the student makes their learning satisfactory.

**Keywords:** Mathematical Modeling; Problem Situations; Learning; Periodic Functions; Technological Resources.



# *Conteúdo*

Resumo . . . . .	
Abstract . . . . .	

## **Lista de Figuras**

<b>Lista de Tabelas</b>	p. 1
-------------------------	------

<b>Introdução</b>	p. 2
-------------------	------

<b>1 Preliminares</b>	p. 4
-----------------------	------

1.1 Modelagem matemática . . . . .	p. 4
------------------------------------	------

1.2 As funções trigonométricas . . . . .	p. 7
--	------

1.2.1 Relações trigonométricas fundamentais . . . . .	p. 7
---	------

1.2.2 As funções seno e cosseno . . . . .	p. 12
---	-------

1.2.3 Outras funções trigonométricas . . . . .	p. 15
--	-------

1.3 As ondas sonoras . . . . .	p. 18
--------------------------------	-------

1.4 Movimento das marés . . . . .	p. 24
-----------------------------------	-------

1.5 Os recursos tecnológicos no estudo das funções trigonométricas . . . . .	p. 24
--	-------

1.5.1 O GeoGebra . . . . .	p. 26
----------------------------	-------

1.5.2 O Fourier . . . . .	p. 28
---------------------------	-------

<b>2 Procedimentos metodológicos</b>	p. 30
--------------------------------------	-------

2.1 O problema da pesquisa . . . . .	p. 30
--------------------------------------	-------

2.2 Caracterização da escola e sujeitos da pesquisa . . . . .	p. 32
---	-------

2.3 Aracati: terra dos bons ventos . . . . .	p. 35
--	-------

2.4 Canoa Quebrada . . . . .	p. 36
------------------------------	-------

2.5 Metodologia aplicada . . . . .	p. 38
------------------------------------	-------

<b>3</b>	<b>Descrição e análise das atividades</b>	p. 43
3.1	Diagnóstico inicial sobre o estudo das funções seno e cosseno . . . . .	p. 43
3.2	Estudo das funções seno e cosseno através das ondas sonoras . . . . .	p. 52
3.3	Utilizando o Geogebra no estudo das funções circulares . . . . .	p. 56
3.4	O movimento das marés e as funções seno e cosseno através do GeoGebra.	p. 62
3.5	Análise da avaliação final . . . . .	p. 69
<b>4</b>	<b>Considerações finais</b>	p. 71
	<b>Referências</b>	p. 73
	<b>Anexos</b>	p. 75
	Anexo 1 - Aplicações das funções circulares . . . . .	p. 75
	Anexo 2 - Avaliação diagnóstica . . . . .	p. 75
	Anexo 3 - Dificuldades encontradas pelos educandos na resolução das questões da avaliação diagnóstica. . . . .	p. 76
	Anexo 4 - Avaliação final . . . . .	p. 77

# *Lista de Figuras*

1.2.1 Triângulos semelhantes. . . . .	p. 8
1.2.2 Triângulos retângulos semelhantes. . . . .	p. 9
1.2.3 Estimativa do raio da Terra. . . . .	p. 10
1.2.4 Círculo orientado unitário. . . . .	p. 11
1.2.5 Gráfico da função seno. . . . .	p. 13
1.2.6 Gráfico da função co-seno. . . . .	p. 14
1.2.7 Paridade das funções seno e cosseno. . . . .	p. 14
1.2.8 Gráfico da função tangente. . . . .	p. 15
1.2.9 Gráfico da função secante. . . . .	p. 16
1.2.10 Gráfico da função cotangente. . . . .	p. 16
1.2.11 Gráfico da função cossecante. . . . .	p. 17
1.3.1 Movimento circular da função seno e cosseno. . . . .	p. 19
1.3.2 Elementos de uma onda senoidal. . . . .	p. 20
1.3.3 Gráfico de $f(x) = \text{sen}(3x)$ . . . . .	p. 22
1.3.4 Gráficos de $f(x) = \text{sen}(6x)$ . . . . .	p. 23
1.3.5 Gráfico de $w(x) = f(x) + g(x)$ . . . . .	p. 23
1.5.1 Interface do Geogebra. . . . .	p. 27
1.5.2 Interface do Fourier. . . . .	p. 28
2.1.1 Recursos utilizados em sala de aula. . . . .	p. 31
2.2.1 Organograma da escola. . . . .	p. 33
2.3.1 Igreja da Matriz. . . . .	p. 36
2.4.1 Símbolo de Canoa Quebrada. . . . .	p. 37
2.4.2 Broadway do Nordeste. . . . .	p. 38

2.5.1 Avaliação diagnóstica feita pelos alunos. . . . .	p. 40
2.5.2 Netinho Ponciano. . . . .	p. 40
2.5.3 Aluno manipulando o fourier. . . . .	p. 41
3.1.1 Relato de um aluno. . . . .	p. 44
3.1.2 Relato de aluno sobre o estudo da matemática. . . . .	p. 45
3.1.3 Resultado da 1 <sup>a</sup> questão. . . . .	p. 46
3.1.4 Resultado da 2 <sup>a</sup> questão. . . . .	p. 47
3.1.5 Resultado da 3 <sup>a</sup> questão. . . . .	p. 48
3.1.6 Gráfico da questão 4 e 5. . . . .	p. 48
3.1.7 Resultado da 4 <sup>a</sup> questão. . . . .	p. 49
3.1.8 Resultado da 5 <sup>a</sup> questão. . . . .	p. 50
3.1.9 Dificuldades encontradas pelos alunos. . . . .	p. 51
3.1.10 Resultado final da avaliação diagnóstica. . . . .	p. 52
3.2.1 Simulação de uma onda senoidal. . . . .	p. 54
3.2.2 Simulação de um som com duas senóides. . . . .	p. 55
3.2.3 Som simulado com onze senóides. . . . .	p. 55
3.3.1 Gráfico de $f(x) = A \text{sen}(x)$ . . . . .	p. 57
3.3.2 Funções do tipo $f(x) = B + \text{sen}(x)$ . . . . .	p. 59
3.3.3 Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(Cx)$ . . . . .	p. 60
3.3.4 Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x + D)$ . . . . .	p. 61
3.3.5 Atividade no laboratório de informática. . . . .	p. 62
3.4.1 Localização das marés no plano cartesiano. . . . .	p. 64
3.4.2 Modelo matemático das marés. . . . .	p. 67
3.4.3 Modelo matemático das marés através da função cosseno. . . . .	p. 68
3.5.1 Resultado final. . . . .	p. 69

## *Lista de Tabelas*

1	Tabela de pontos da função seno. . . . .	p. 13
2	Nota musical x frequência (4 <sup>a</sup> oitava). . . . .	p. 21
3	Tábua da mares da praia de Canoa Quebrada. . . . .	p. 63
4	Dados aproximados das marés alta e baixa . . . . .	p. 63

# *Introdução*

As dificuldades de aprendizagem de Matemática, de um modo geral, despertam o interesse de pesquisadores em Educação Matemática no sentido de solucioná-las, ou buscar novas estratégias de ensino de modo a proporcionar uma melhor qualidade na aprendizagem no aprendente. Repensar o ensino-aprendizagem em Matemática constitui um desafio constante para os educadores. Autores como: D’Ambrósio [13], Bassanezi [5], destacam o uso da Modelagem Matemática como ferramenta para transpor essas barreiras encontradas por educadores na busca da melhoria da qualidade do ensino em Matemática. A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizarmos de estar sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele. A Matemática é uma ciência que também se constitui de idéias abstratas cujas concepções levam a uma prática pedagógica fora do contexto da realidade dos educandos, o que torna o ensino-aprendizagem um processo repleto de acentuadas dificuldades. Com isso, a Modelagem Matemática pode vir a ser uma estratégia pedagógica que contextualize o conhecimento matemático tornando-o dinâmico e amenizando essas dificuldades encontradas pelos educandos e educados, principalmente em Matemática, em particular, no estudo das funções trigonométricas. Dentre as inúmeras dificuldades, destacam-se no contexto deste estudo a aprendizagem das funções trigonométricas seno e cosseno. Visando superar essas dificuldades no estudo das referidas funções é que as atividades executadas foram retiradas e adaptadas de trabalhos feitos por Fonseca [14] que trabalha as ondas sonoras e Almeida [1] com movimento das marés, com o intuito de mostrar um caminho alternativo para facilitar e motivar a aprendizagem dos aprendentes. Os recursos tecnológicos estão, cada dia mais, presentes no nosso cotidiano, constituindo-se num instrumento de trabalho essencial, razão pela qual exercem um papel cada vez mais importante na educação, notadamente na Educação Matemática. Pesquisas sobre o uso dessas tecnologias em sala de aula ressaltam a sua relevância no ensino-aprendizagem em Matemática, assinalando que é de fundamental importância como facilitador da retenção do conhecimento dos educandos. Segundo Ponte ([22], 2000), as TIC’s podem ter um impacto muito significativo no ensino de disciplinas específicas, como a Matemática, pois seu uso pode reforçar a importância da linguagem gráfica e de novas formas de representação, valorizar as possibilidades de realização de

projetos e atividades de modelação, exploração e investigação. Busca-se na Modelagem Matemática um suporte teórico para desenvolver as atividades de formular um modelo matemático referente às oscilações das marés na praia de Canoa Quebrada, situada a 12km da cidade de Aracati. As funções que são encontradas possibilitaram aos educandos resolver situações problemas, validando o nosso modelo. Vamos dar uma geral de como está organizado este trabalho. No Capítulo 1, vamos reunir todos preliminares necessários para o desenrolar os nossos estudos. Na Seção 1.1, conceituaremos Modelagem Matemática. Na Seção 1.2, faremos um estudo das funções trigonométricas destacando as funções seno e cosseno, mostrando seus gráficos, suas propriedades, dando ênfase aos conceitos de periodicidade, domínio, imagem dessas funções. Na Seção 1.3, vamos falar das ondas sonoras, aplicando as definições de período, amplitude e frequência, através de sua forma mais simples que são as senóides. O processo de formação das marés é enfatizada na Seção 1.4 e concluímos o Capítulo 1 mostrando a importância da utilização dos recursos tecnológicos na Seção 1.5 através dos *softwares* Geogebra e Fourier. No capítulo 2 abordaremos os procedimentos metodológicos, onde destaca-se na Seção 2.1 o problema de nossa pesquisa dentro da perspectiva do uso da Modelagem Matemática com apoio na utilização dos recursos tecnológicos. Segue-se na Seção 2.2 a descrição do ambiente no qual estão inseridos os alunos que participaram das atividades. Nas Seções 2.3 e 2.4 serão enfocados os aspectos geográficos, históricos, turísticos e econômicos da cidade de Aracati e da Praia de Canoa Quebrada, respectivamente. A Seção 2.5 se detem a descrever a metodologia aplicada. A descrição e análise das atividades desenvolvidas são abordadas no Capítulo 3, onde na Seção 3.1 faremos uma investigação sobre o que os alunos tem de conhecimento acerca das funções seno e co-seno. O estudo dessas funções são detalhadas na Seção 3.2 através da utilização do *software* Fourier. Na Seção 3.3 mostra a utilização do *software* Geogebra para o estudos dos parâmetros das funções seno e cosseno. O modelo matemático dos movimento das marés é destaque na Seção 3.4. A análise da avaliação final realizada é destaque na Seção 3.5. As considerações finais são abordadas no Capítulo 4 além de destacarmos, os pontos positivos e negativos e nossas perspectivas.

# 1 *Preliminares*

Neste capítulo enfocaremos os conceitos de Modelagem Matemática e suas estratégias que podem facilitar o ensino-aprendizagem de Matemática e um resumo das principais funções trigonométricas, em particular as funções seno e cosseno, descrevendo que é possível obter um modelo matemático referente ao movimento das marés e das ondas sonoras através da utilização dos recursos tecnológicos, especificamente os *softwares* Geogebra e Fourier.

## 1.1 Modelagem matemática

Na tentativa de proporcionar aos educandos uma aprendizagem significativa das funções seno e cosseno busca-se através da aplicação de metodologias modernas, como os softwares, uma alternativa de tornar o estudo dessas funções mais dinâmico, propiciando momentos interativos entre os conteúdos estudados em sala de aula e suas possíveis situações práticas. Nesse sentido, pretende-se demonstrar a realização de duas atividades: o movimento das marés e das ondas sonoras, fundamentado na Modelagem Matemática.

Muitos autores, como D'Ambrósio [13], Caldeira [11], Biembengut [6], Bassanezi [5] tem utilizado a Modelagem Matemática como estratégia de ensino em seus trabalhos.

Modelagem Matemática é um processo dinâmico para utilização e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com finalidade de previsão de tendências. A Modelagem Matemática consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Biembengut ([6], 2003, p. 12) afirma que:

A Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que,



para elaborar um modelo, além de conhecimentos de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

De acordo com as definições apresentadas, a construção de um modelo matemático precisa de um embasamento teórico dos conteúdos matemáticos e com eles buscar resolver situações problemas, e transformá-los conforme a realidade ao qual estão inseridos.

Stewart [15] define modelo como:

Um modelo matemático é a descrição Matemática (frequentemente por meio de uma função ou uma equação) de um fenômeno do mundo real, como tamanho de uma população, a demanda de um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto numa reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução de poluentes. O propósito desses modelos é buscar explicações entender o fenômeno.

Para a obtenção de um modelo matemático, a primeira tarefa é formular um modelo matemático por meio da identificação e especificação das variáveis dependentes e da formulação de hipóteses que simplifiquem o fenômeno estudado, tornando-o matematicamente tratável. Usa-se o conhecimento da situação física envolvida para se obter as equações que relacionam essas variáveis. Já em situações em que não existe uma lei física para guiar, pode ser necessário coletar dados de uma biblioteca, da internet, entrevistas, relatos ou conduzir as próprias experiências e examiná-lo na forma de uma tabela a fim de perceber os padrões. Dessa representação numérica de uma função pode-se estabelecer e obter a sua representação gráfica marcando os dados coletados e com isso sugerir a fórmula algébrica apropriada, em alguns casos.

O segundo estágio é aplicar a matemática que se conhece ao modelo matemático que foi formulado, a fim de tirar conclusões matemáticas como informações sobre o fenômeno original e oferecer explicações ou fazer previsões. A etapa final é testar previsões, comparando-as com os novos dados reais. Se as previsões não se ajustam à realidade, é preciso refinar nosso modelo matemático ou formular um novo, começando novamente o ciclo. Um modelo matemático é uma idealização, porém permite cálculos matemáticos, mantendo precisão suficiente para conclusões significativas. É importante entender que esses fenômenos naturais como o movimento das marés depende da Mãe Natureza.

É preciso superar a abordagem meramente expositiva e fazer uso de experimentos com materiais alternativos que possibilitem ao aluno construir seu próprio conhecimento, através da contextualização, interdisciplinaridade, competências e habilidades. Assim, convém ao professor, enquanto mediador do processo de ensino, estabelecer uma relação entre a Matemática da sala de aula e a realidade do dia-a-dia do estudante. O pretensão deste trabalho é gerar condições para que os educandos adquiram os conhecimentos básicos no estudo dessas funções através do movimento das marés e do estudo das ondas sonoras, criando dentro da sala de aula um ambiente de observação e investigação, através de um modelo científico norteado pelos princípios da Modelagem Matemática.

A realização de atividades que envolvem as funções circulares apresenta-se com um dos inúmeros caminhos para o desenvolvimento de estratégias voltadas para a resolução de problemas através do estudo desses fenômenos. Têm como finalidade propiciar aos educandos um ponto de partida para a construção do conhecimento matemático sobre as funções trigonométricas, levando-os a observarem, manipularem, testarem e levantarem questionamentos sobre os conteúdos estudados.

De acordo com Bean([3], 2001.):

a essência da Modelagem Matemática consiste em um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, e representadas em termos matemáticos (modelos). As hipóteses e as aproximações significam que o modelo criado por esse processo é sempre aberto a crítica e aperfeiçoamento.

Neste mesmo pensamento, Barbosa ([4], 2003, p. 5) afirma que a modelagem matemática é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, [7] 2006) afirma que o ponto de partida não é a definição, mas o problema. No processo de ensino aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, situações contextualizadas em que os alunos precisam desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. A observação de fenômenos periódicos, como o movimento das marés e as ondas sonoras, motivam educadores e educandos a estabelecer relações entre essas experiências e os conteúdos estudados.

Com isso, a utilização da Modelagem Matemática cria uma motivação e possibilita a percepção para professores e alunos sobre a importância de se trabalhar aliando teoria e

prática. Vale destacar que as atividades que envolvem Modelagem Matemática muda a postura tradicional dos educandos, eles se tornam mais ativos e participativos na busca do conhecimento matemático, levando-os a desconstruir a noção que a Matemática é uma disciplina que não tem nenhuma relação com o cotidiano no qual estão inseridos. Através da resolução de problemas é que os alunos perceberão a importância da investigação e elaboração de hipóteses que levam à aquisição de conceitos que tenham uma real significação, facilitando a compreensão dos conteúdos abordados em sala de aula.

Como se pode observar, esta abordagem teórica sobre Modelagem vem contribuir com esse estudo, pois constitui uma ferramenta importante no estudo de problemas concretos envolvendo as funções trigonométricas.

## 1.2 As funções trigonométricas

A presença das funções periódicas nas nossas vidas é percebida quando, por exemplo, observa-se um eletrocardiograma, o lançamento de uma pedra no lago e sinais de ondas de rádio, etc. Estas funções são abordadas inicialmente no ensino médio e são expressas por:

$$f(x) = \text{sen } x \quad (1.2.1)$$

$$f(x) = \text{cos } x \quad (1.2.2)$$

$$f(x) = \text{tg } x \quad (1.2.3)$$

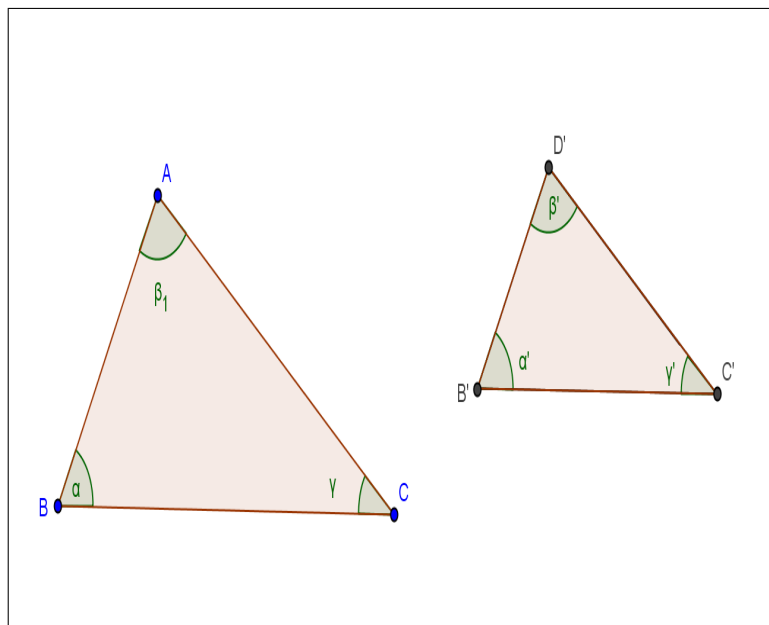
que definem respectivamente as funções seno, cosseno e tangente.

### 1.2.1 Relações trigonométricas fundamentais

No ensino médio e fundamental, as relações do seno, cosseno e tangente de um ângulo derivam de um triângulo retângulo. Estes conceitos introduzem as funções trigonométricas correspondentes. Dois triângulos são semelhantes (ver Figura 1.2.1), se e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais, ou seja,  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

- $\alpha \equiv \alpha'$

- $\beta \equiv \beta'$
- $\gamma \equiv \gamma'$
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$



**Figura 1.2.1:** *Triângulos semelhantes.*  
Fonte :Autor construído com o geogebra

Consideremos os triângulos retângulos semelhantes da Figura 1.2.2:  
pela semelhança escrevemos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad (1.2.4)$$

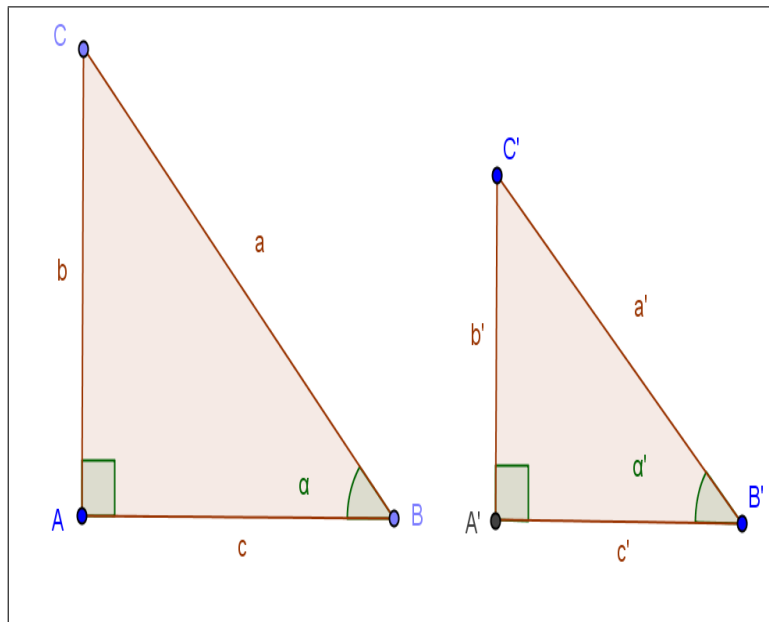
ou ainda

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad (1.2.5)$$

$$\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \quad (1.2.6)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \quad (1.2.7)$$

Pode-se observar que estas relações dependem apenas do ângulo  $\alpha$ , e não dos comprimentos dos lados envolvidos. São portanto, as funções de  $\alpha$ , chamadas de *seno*, *co-seno* e *tangente*.



**Figura 1.2.2:** Triângulos retângulos semelhantes.

Fonte :Autor construído com o geogebra

Assim dado um ângulo  $\alpha$ , em que  $0 < \alpha < 90^\circ$ , definimos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} \quad (1.2.8)$$

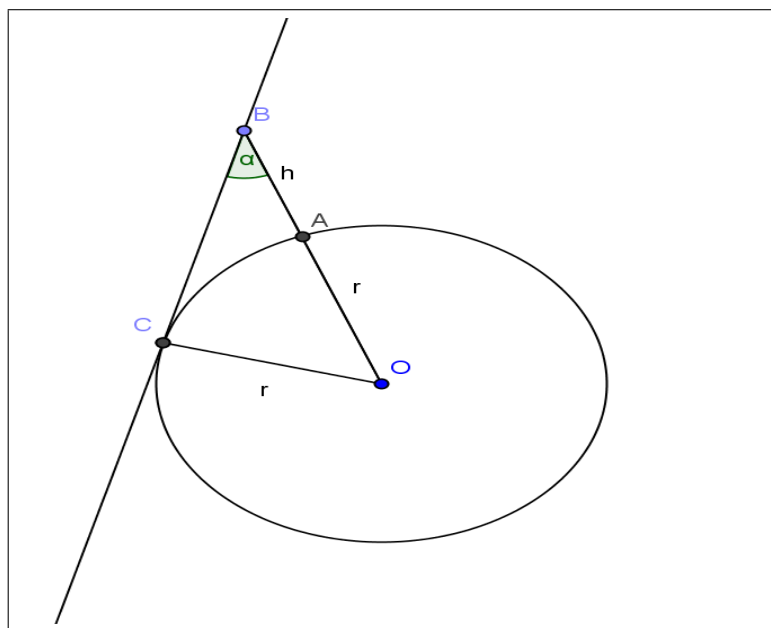
$$\text{cos } \alpha = \frac{c}{a} \quad (1.2.9)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{c} \quad (1.2.10)$$

Portanto, as razões entre estes segmentos definem, no triângulo retângulo, as relações trigonométricas. Os segmentos de reta  $b$  e  $c$  são chamados de cateto adjacente e cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  e o segmento  $a$  é chamado de hipotenusa.

Durante muito tempo, tabelas trigonométricas com os valores de cossenos, senos, e tangentes de diversos arcos ou ângulos, foram utilizadas para consulta. Graças a estas tabelas é que entusiastas conseguiam estimar as medidas de segmentos que não se poderia obter de maneira direta. Por exemplo, os gregos fizeram uma estimativa para o raio da terra.

De uma torre bem alta com base em  $A$  e topo em  $B$ , de altura  $h$ , constrói-se, de forma imaginária, uma reta  $t$  que passa por  $B$  e um ponto  $C$  qualquer do horizonte. Então, era feita uma estimativa da medida do ângulo  $\alpha$  formado pelas retas  $r$  e  $a$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ . Como o prolongamento do segmento  $AB$  passa pelo ponto  $O$  (centro da Terra), obtém-se assim o triângulo  $\triangle OBC$ , retângulo em  $C$ , conforme a Figura 1.2.3.



**Figura 1.2.3:** *Estimativa do raio da Terra.*  
Fonte :Autor construído com o geogebra

Sendo

$$OC = r \quad (1.2.11)$$

$$OB = r + h \quad (1.2.12)$$

em que  $r$  corresponde ao raio da Terra. Portanto:

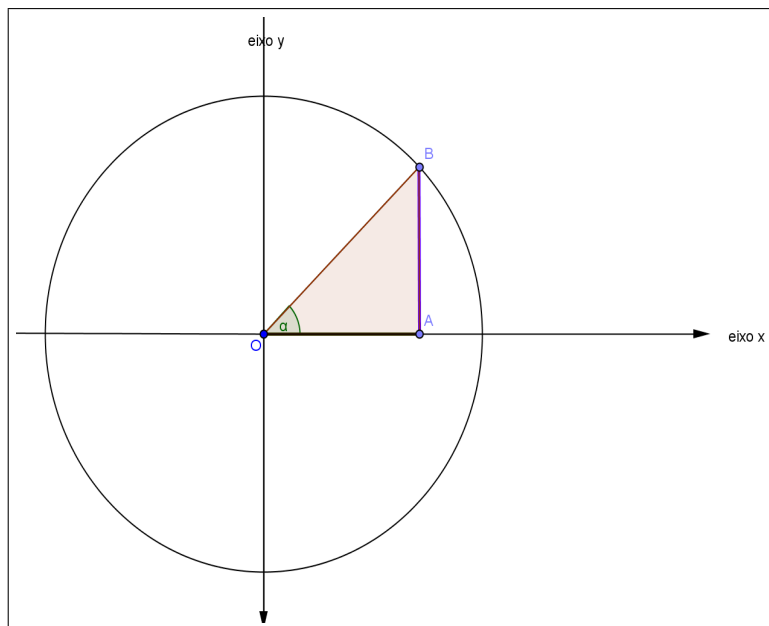
$$\text{sen } \alpha = \frac{r}{r + h} \quad (1.2.13)$$

$$r = \text{sen } \alpha (r + h) \quad (1.2.14)$$

Deseja-se, agora, estender estes conceitos a ângulos de medida qualquer. Observe que as definições, até aqui, baseiam-se todas em ângulos internos de um triângulo retângulo

e, portanto, refere-se única e exclusivamente a ângulos agudos.

Considere, então, um círculo orientado unitário, isto é, de raio  $r = 1$ , a cujos pontos se farão corresponder à medida do ângulo  $\alpha$  nele inscrito, e cujo centro se fará coincidir com a origem de um sistema cartesiano de coordenadas, como na Figura 1.2.4. O triângulo  $AOB$  é retângulo em  $A$ , donde podemos escrever as seguintes relações:



**Figura 1.2.4:** *Círculo orientado unitário.*  
Fonte :Autor construído com o geogebra

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \quad (1.2.15)$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \quad (1.2.16)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \quad (1.2.17)$$

Note que:

i) A hipotenusa  $\overline{OB}$  coincide com o raio do círculo, que possui medida 1 *uc* (unidade de comprimento). Desta forma, pode-se escrever, simplesmente, o *seno* e o *coseno* do ângulo  $\alpha$  como:

$$\text{sen } \alpha = \overline{AB} \quad (1.2.18)$$

$$\cos \alpha = \overline{OA} \quad (1.2.19)$$

ii) Os comprimentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AO}$  coincidem com as coordenadas do ponto  $B$ , no plano, de modo que faz sentido, então, definir:

$$\cos \alpha = x_b \text{ (abscissa do ponto B)}$$

$$\sin \alpha = y_b \text{ (ordenada do ponto B)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ se } \cos \alpha \neq 0.$$

Isto estende os conceitos do seno, do cosseno e da tangente para ângulos de qualquer medida. No que se considera acima, deve ter ficado evidente que o sentido positivo, no círculo, corresponde ao sentido anti-horário, e que o ponto  $A$ , de intersecção com o eixo das abscissas, corresponde ao ângulo  $\alpha = 0$

Comumente é adotado no círculo orientado, uma outra medida para ângulos: o radiano (*rad*) que, a rigor, pode ser assim definido: A medida de um ângulo  $\alpha$  em radianos é dada pela razão entre o comprimento do arco  $\ell$  determinado pelo ângulo, em um círculo cujo centro corresponde ao vértice do ângulo, e o comprimento do raio deste círculo, ou seja,

$$\alpha = \frac{\ell}{r}. \quad (1.2.20)$$

Num círculo de raio unitário, pode-se simplificar esta definição, simplesmente, dizendo que um radiano corresponde, no círculo, a um arco de comprimento 1.

O comprimento  $C$  de uma circunferência é dado em função de seu raio  $r$  através da seguinte relação:

$$C = 2\pi r \quad (1.2.21)$$

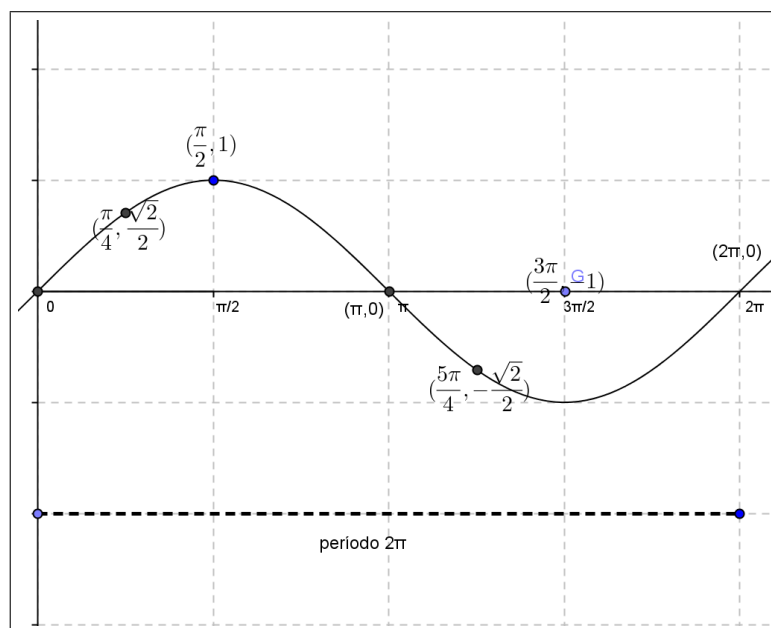
## 1.2.2 As funções seno e cosseno

Começa-se esta consideração examinando as relações entre os lados e ângulos de um triângulo retângulo. Destas relações emergiram os conceitos de seno, cosseno e tangente. Estendem-se, então, estes conceitos, inicialmente, a ângulos compreendidos entre 0 e  $2\pi$  e, em seguida, a arcos cômugos de qualquer valor. Uma vez estabelecida esta correspondência entre os pontos da reta e os pontos no círculo, pode-se, então, definir, as funções seno e cosseno,  $f(x) = \sin x$  e  $f(x) = \cos x$  que atribuem a cada número real  $x$  os valores do seno e cosseno do arco correspondente, no círculo orientado.

Para se obter uma idéia do comportamento global destas funções, é conveniente esboçar o seu gráfico. Antes, porém, vale a pena lembrar que, para valores de  $x$  maiores



que  $2\pi$ , obtemos, no círculo, arcos côngruos da forma  $x + 2k\pi$ , isto é, pontos coincidentes no círculo que, naturalmente, fornecem os mesmos valores para o seno e cosseno. Isto define as funções seno e cosseno como periódicas, de período  $2\pi$ . Em termos simples, diz-se que, a cada intervalo de comprimento  $2\pi$ , os valores destas funções se repetem. Matematicamente, escreve-se  $\text{sen } x = \text{sen}(x + 2k\pi)$  e  $\text{cos } x = \text{cos}(x + 2k\pi)$ .



**Figura 1.2.5:** Gráfico da função seno.  
Fonte :Autor construído com o geogebra

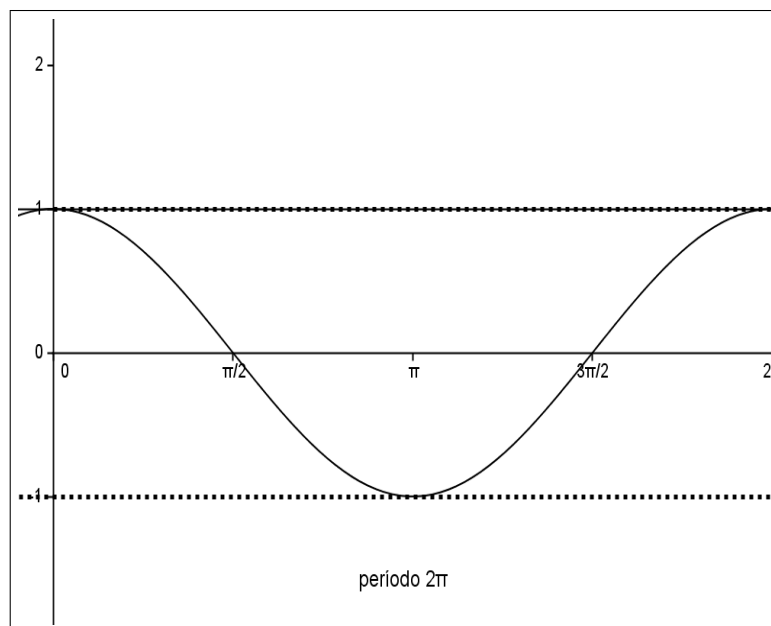
Pode-se, portanto, ter uma boa idéia do comportamento global destas funções se examinarmos seu comportamento no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

Considerando a função  $f(x) = \text{sen } x$  e atribuindo valores a  $x$ ,  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{5\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  e  $2\pi$  para  $x$  obtém-se a Tabela 1 de pontos:

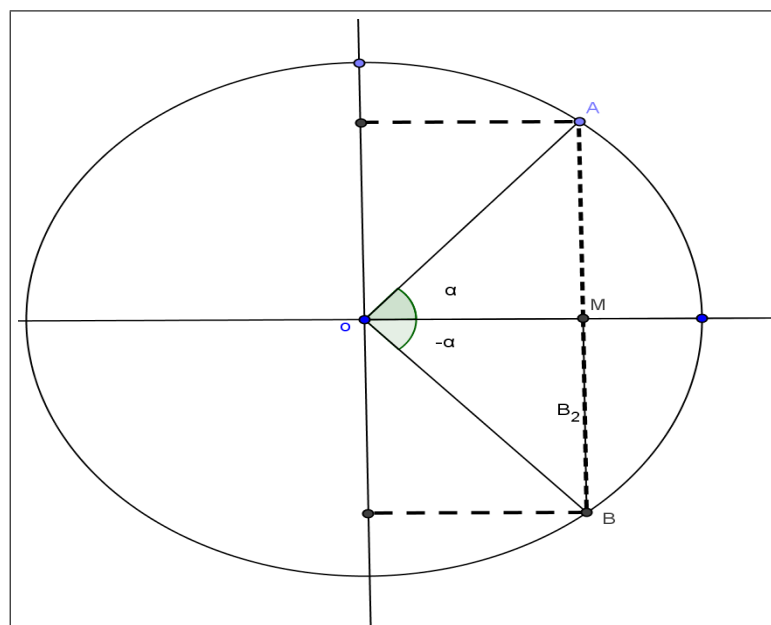
$x$	$0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$f(x) = \text{sen } x$	$0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1$	$0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1$	$0$

**Tabela 1:** Tabela de pontos da função seno.

O seu gráfico para valores restritos a esse intervalo é observado na Figura 1.2.5 e fazendo o mesmo para a função cosseno obtemos o gráfico da Figura 1.2.6.



**Figura 1.2.6:** Gráfico da função co-seno.  
Fonte :Autor construído com o geogebra



**Figura 1.2.7:** Paridade das funções seno e cosseno.  
Fonte :Autor construído com o geogebra

**Observação 1.** (Paridade das funções seno e cosseno). Considere um ângulo  $\alpha$  com extremidade no primeiro quadrante. Naturalmente, vê-se que o ângulo  $\alpha$  está localizado no quarto quadrante, conforme Figura 1.2.7 abaixo. Como os triângulos  $\triangle AOM$  e  $\triangle BON$  são congruentes, observa-se que:

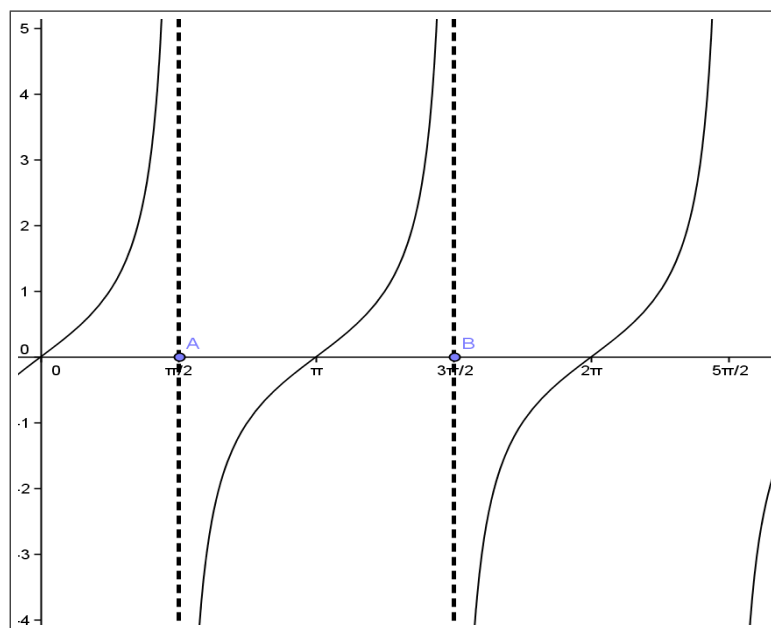
$$\operatorname{sen} \alpha = y_A = -y_B = -\operatorname{sen}(-\alpha) \quad (1.2.22)$$

$$\operatorname{cos} \alpha = x_A = x_B = \operatorname{cos}(-\alpha) \quad (1.2.23)$$

Portanto, a função seno é uma função ímpar e a função cosseno é uma função par.

### 1.2.3 Outras funções trigonométricas

As funções seno e cosseno são, dentre as funções trigonométricas, as mais elementares no seguinte sentido: todas as demais derivam delas a sua definição. Assim, define-se abaixo as funções: tangente, cotangente, secante e cossecante, representando, em seguida, o gráfico correspondente através das Figuras 1.2.8 e 1.2.9.



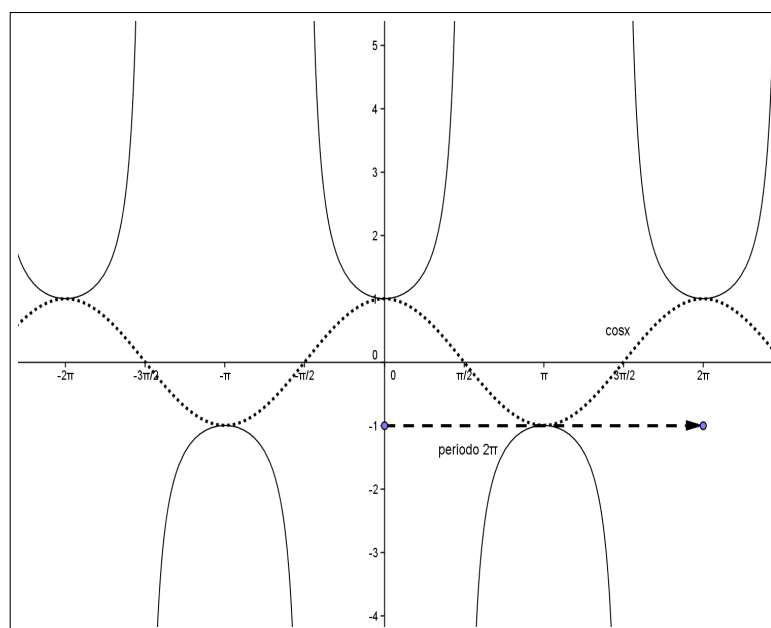
**Figura 1.2.8:** Gráfico da função tangente.  
Fonte :Autor construído com o geogebra

**Definição 1.** As funções tangente e secante são definidas por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \quad (1.2.24)$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} \quad (1.2.25)$$

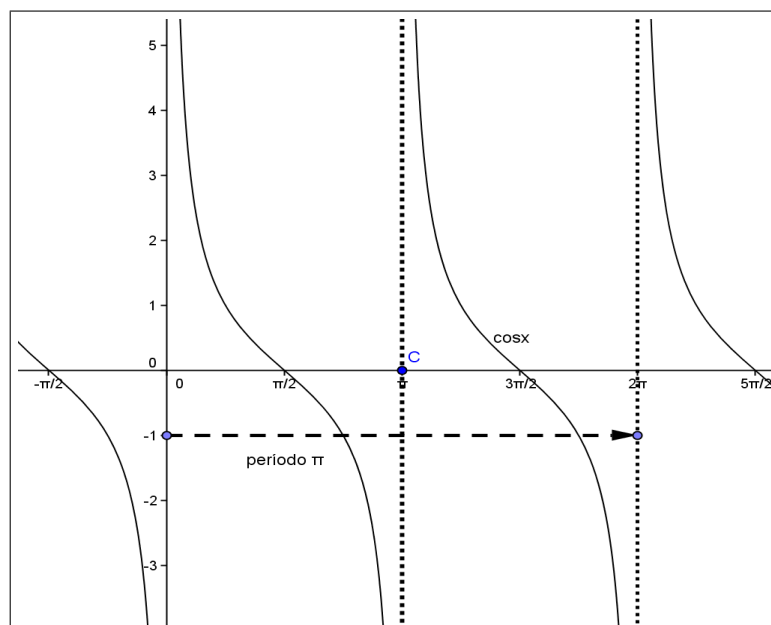
para todo número real  $\alpha$  para o qual  $\operatorname{cos} \alpha \neq 0$ .



**Figura 1.2.9:** Gráfico da função secante.

Fonte :Autor construído com o geogebra

Observa-se que as funções tangente e secante não estão definidas quando  $\cos \alpha = 0$ . Assim sendo, o domínio das funções tangente e secante é o conjunto de todos os números reais exceto os da forma  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , onde  $k$  é qualquer inteiro.



**Figura 1.2.10:** Gráfico da função cotangente.

Fonte :Autor construído com o geogebra

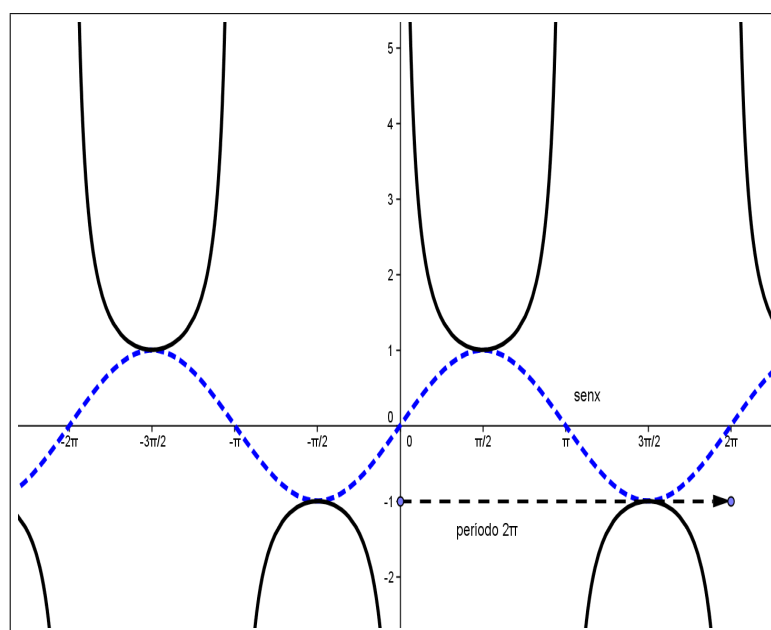
**Definição 2.** As funções co-tangente e cossecante são definidas por

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (1.2.26)$$

$$\operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (1.2.27)$$

para todo número real  $\alpha$  o qual  $\operatorname{sen} \alpha \neq 0$ .

As Figuras 1.2.10 e 1.2.11 mostram os gráficos dessas funções.



**Figura 1.2.11:** Gráfico da função cossecante.  
Fonte :Autor construído com o geogebra

Analogamente, como cotangente e cossecante não estão definidas quanto  $\operatorname{sen} \alpha = 0$ , o domínio das funções  $\operatorname{cotg} \alpha$  e  $\operatorname{cossec} \alpha$  é o conjunto de todos os reais exceto os da forma  $k\pi$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Observação 2.** Da paridade das funções seno e cosseno, deduz-se a paridade das outras funções trigonométricas.

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg}(x) \Rightarrow f(x) = \operatorname{tg}(x) \text{ é ímpar}$$

$$\operatorname{cotg}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\operatorname{sen}(-x)} = \frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} = -\operatorname{cotg} x \Rightarrow f(x) = \operatorname{cotg} x \text{ é ímpar.}$$

$$\operatorname{sec}(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \operatorname{sec} x \Rightarrow f(x) = \operatorname{sec}(x) \text{ é par.}$$

$$\operatorname{cossec}(-x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-x)} = \frac{1}{-\operatorname{sen} x} = -\operatorname{cossec} x \Rightarrow f(x) = \operatorname{cossec} x \text{ é ímpar.}$$

## 1.3 As ondas sonoras

Neste secção, faz-se um breve resumo sobre as ondas sonoras e o movimento das marés no estudo das funções seno e cosseno e suas possíveis aplicações na resolução de situações problemas, despertando o interesse no estudo dessas funções periódicas.

A ondulatória é a parte da Física que estuda os fenômenos os quais se apresentam em formas de ondas. Existem dois tipos básicos de ondas que se comportam dessa maneira: as mecânicas, cujo fenômeno perceptivo associado é o som; e as eletromagnéticas, causadas pelo movimento de partículas subatômicas, cujos fenômenos perceptivos comumente associados são a luz e as cores.

O som é uma qualidade perceptiva resultante da percepção de distúrbios das moléculas de um meio em certo espaço de tempo. Esses distúrbios, por sua vez, apresentam-se em forma de ondas que se propagam pelo meio. Para este fenômeno ocorrer há a necessidade de três elementos relacionados em um sistema: Emissor - Meio - Receptor.

O emissor tem a função de produzir um distúrbio no meio que será percebido pelo receptor. É importante notar que o meio tem influência na qualidade do distúrbio, pois afeta a maneira como este se propaga. Estes distúrbios de natureza mecânica são pequenas e rápidas variações de pressão do meio, causadas pelo movimento das moléculas, caracterizados por compressões e refrações (descompressões, expansões). Tal movimento é sempre relacionado à onda de pressão que se propaga pelo meio. Ondas mecânicas podem ser de dois tipos: longitudinais, cujas moléculas movem-se na mesma direção de propagação da onda; transversais, quando as moléculas movem-se perpendicularmente a essa direção. As ondas de pressão que caracterizam o som podem ser chamadas de ondas sonoras, são do tipo longitudinal que se propagam por uma série de compressões/descompressões em um meio, normalmente o ar. As ondas transversais são usualmente encontradas nas vibrações de certos instrumentos musicais, como nas membranas (peles de instrumentos de percussão) e cordas.

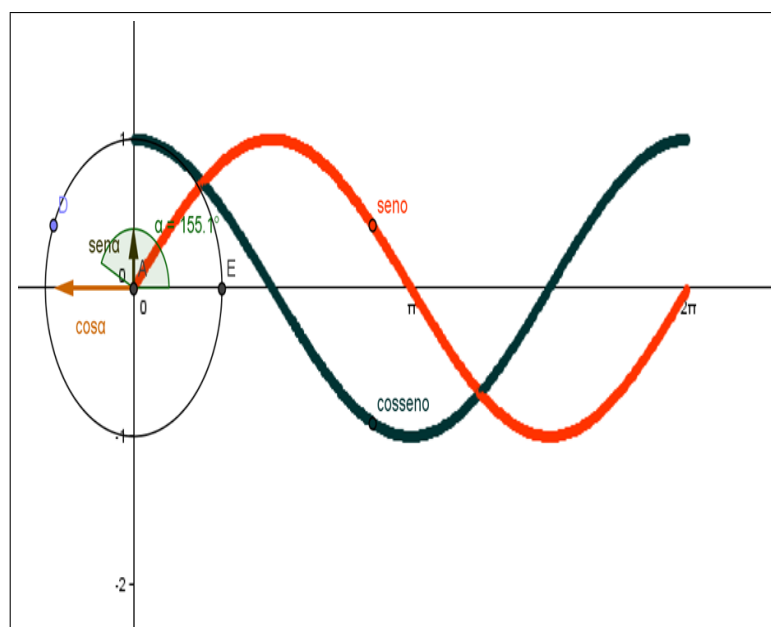
Os fenômenos ondulatórios podem ser estudados em sua forma mais simples, para se obter um entendimento dos seus constituintes mais básicos. A forma mais simples de onda sonora é aquela descrita por funções harmônicas do tipo senoidal, que possui uma característica periódica, isto é, repete-se em certo intervalo de tempo.

Segundo ([16] 1992, p.40) o termo *senóide* ou *senoidal* representa um adjetivo da palavra *seno*:

Era chamado de *jya*, uma das várias grafias para a palavra *onda* em hindu.

Posteriormente os árabes a transliteraram para *jyb*, que depois foi incorretamente lida como *jaby* ( que em árabe significa bolso, golfo ou seio), pelo tradutor Gerardo de Cremona (c.1150). Traduzindo do árabe para o latim, ele usou o equivalente latino *sinus*, o que hoje usamos como *seno*.

Uma onda periódica senoidal pode ser obtida plotando-se em um gráfico do movimento de uma roda (ver Figura 1.3.1), obtendo-se uma representação análoga (similar) a um movimento de partículas em um meio que equivale à onda sonora senoidal. É preciso observar que, imediatamente, nenhum som natural produz uma onda senóide pura, apesar de alguns, como o do diapasão, aproximarem-se muito dessa forma de onda. A senóide é resultado de um movimento circular no tempo.



**Figura 1.3.1:** Movimento circular da função seno e cosseno.

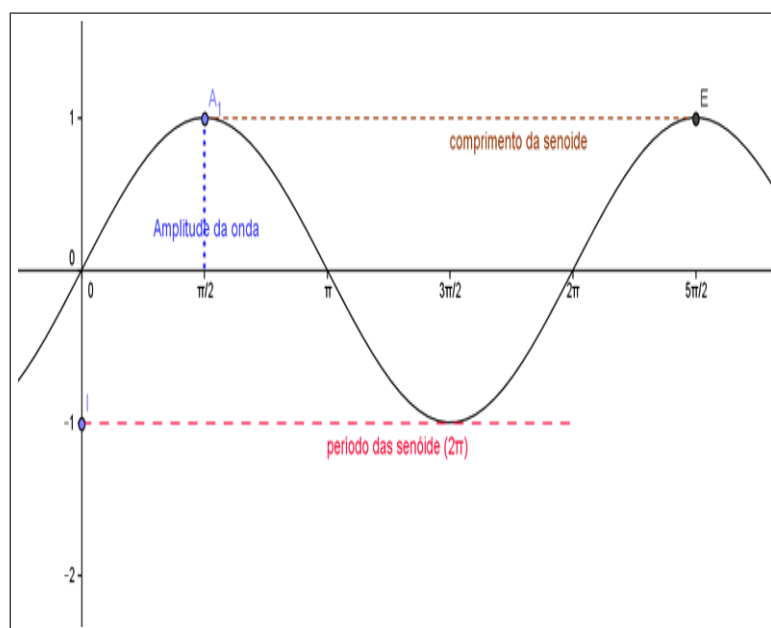
Fonte :Autor construído com o geogebra

Desta senóide pode-se configurar várias incógnitas: ela se repete em um período  $T$  (em segundos, normalmente); ela tem uma amplitude de deslocamento  $A$ , ou seja, ela varia de  $0$  até  $+A$  ou de  $0$  até  $-A$  ; e, quando se propaga no espaço, tem um comprimento, que é a medida de espaço entre dois momentos idênticos da onda (geralmente em metros) . É importante lembrar que, em se tratando de uma onda sonora, ela deverá se propagar pelo meio em uma velocidade constante.

Dizer que esta onda se repete em um período  $T$ , em um raciocínio inverso, é dizer que há uma frequência de acontecimentos ou repetições em um período de tempo. Pode-se dizer que essa frequência de acontecimentos é de uma vez por período, o que traz a

definição de outra quantidade importante para o estudo de ondas: a frequência que é o inverso do período,  $f = \frac{1}{T}$ . Ela é geralmente medida em  $\frac{1}{s}$ , e no caso específico de ondas periódicas como a senóide, em ciclos por segundo, que é a definição da medida chamada *Hertz* ( $Hz$ ). A frequência  $f$  (ou período) e o comprimento de onda relacionam-se através da velocidade de propagação  $V$ .

A última quantidade que deve ser definida quanto às senóides é a que se refere à fase, que determina a posição inicial de uma onda, ou a posição do começo do movimento. Ela é medida em graus ou em radianos, por ser relacionada com o ângulo inicial do movimento. No exemplo observado na Figura 1.3.1, a fase é zero graus, pois o ângulo inicial do movimento, medido do centro da circunferência é zero. Pode-se então observar estas quantidades de uma forma gráfica. Tomando-se uma onda periódica senoidal como modelo (ver Figura 1.3.2), podem-se mapear alguns dos parâmetros apresentados acima com qualidades sensoriais humanas.



**Figura 1.3.2:** *Elementos de uma onda senoidal.*  
Fonte :Autor construído com o geogebra

A amplitude de uma onda de pressão correlaciona-se diretamente com a nossa percepção de intensidades sonoras, por exemplo, sons mais intensos resultam de uma maior amplitude de variação da pressão do meio (ou seja, um deslocamento maior das moléculas). A frequência, e por consequência o período e o comprimento de onda relaciona-se com a percepção de alturas, ou seja, o quão grave ou agudo um som é. Certos valores de frequências são convencionalmente equivalentes às notas musicais ocidentais, por exemplo,  $440Hz$  é o lá de concerto, usado para a afinação de instrumentos.



É possível ouvir o som de uma senóide quando ela estiver numa frequência de 440 *hertz*, ou seja, o período da função deve se repetir 440 vezes. Além disso, os alunos podem observar que uma combinação linear de funções periódicas gera uma nova função periódica, isto é, uma onda mecânica pode ser representada pela função

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad (1.3.1)$$

ou

$$x(t) = A \sin(\omega t), \quad (1.3.2)$$

onde  $A$  é a amplitude da onda e o parâmetro  $\omega$  é a frequência da onda. Esse parâmetro identifica a nota musical que está sendo tocada. Os músicos denominam as notas (ou suas frequências associadas) também de “alturas”. Enquanto a altura é medida em *Hertz*, a intensidade é medida em *Decibéis*. Um som é, relativamente, “agudo” se sua frequência é alta e é dito “grave” se sua frequência é baixa.

A tabela 2 mostra a identificação conhecida pelos músicos desde o tempo que o cientista Helmholtz<sup>[1]</sup> estudou profundamente os sons e suas propriedades, pela primeira vez.

nota musical	dó	ré	mi	fá	sol	lá	si
frequência (Hertz)	262	294	330	349	392	440	494

**Tabela 2:** Nota musical  $x$  frequência ( $4^{\text{a}}$  oitava).

A nota base utilizada pelos músicos para afinação de instrumento é a nota lá ( $440\text{Hz}$ ), tom que se escuta ao telefone antes de iniciar uma chamada (tom de linha). Em teoria musical, duas frequências são ditas relação de “oitava” se a frequência maior é o dobro da frequência menor. Daí a nota “lá” em diferentes oitavas ter as frequências mais altas: 880, 1760, etc, ou as mais baixas 220, 110, e assim por diante.

O objetivo principal do estudo das ondas sonoras é estabelecer uma relação entre ondas e funções periódicas. Nesse sentido, o contexto musical é uma alternativa para se explorar as propriedades das funções trigonométricas.

<sup>1</sup>(Potsdam, 31 de agosto de 1821 — Charlottenburg, 8 de setembro de 1894)foi um médico e físico alemão que contribuiu com teorias da visão, da percepção visual, percepção espacial, visão a cores, sensação de tom sonoro, percepção do som, etc

**Exemplo 1.** Dadas as funções abaixo  $f(x) = \text{sen}(Nx)$  e  $f(x) = \text{sen}(Mx)$ , prove que existe uma função  $w$  tal que  $w(x) = f(x) + g(x)$

As funções  $f(x)$  e  $g(x)$  possuem períodos  $\frac{2\pi}{N}$  e  $\frac{2\pi}{M}$ , ou seja, elas se repetem cada vez que passam por esses valores, mais precisamente, ter-se-á:

*Demonstração.*  $f(\frac{2\pi}{N} + x) = f(x)$  e  $g(\frac{2\pi}{M} + x) = g(x)$

Para se obter a nova senóide  $w(x)$ , seu período será dado por  $p = \frac{2\pi}{\text{mdc}(N,M)}$

Supondo-se que  $\text{m.d.c.}(N, M) = d$ , então, tem-se que:

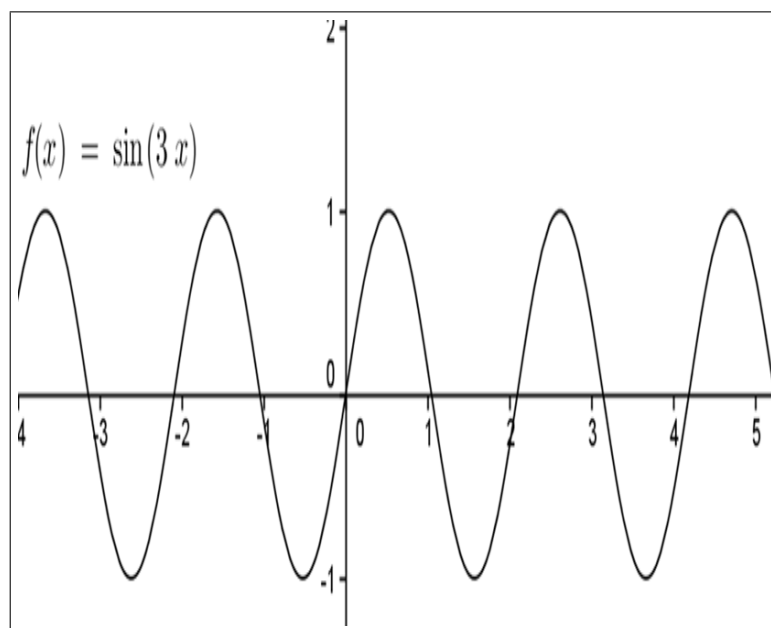
$$w(\frac{2\pi}{d} + x) = \text{sen}(N(\frac{2\pi}{d} + x)) + \text{sen}(M(\frac{2\pi}{d} + x))$$

$$w(x) = \text{sen}(\frac{2\pi}{d} + Nx) + \text{sen}(\frac{2\pi M}{d} + Mx)$$

$$w(x) = \text{sen}(Nx) + \text{sen}(Mx)$$

$$w(x) = f(x) + g(x) \text{ (c.q.d)}$$

□

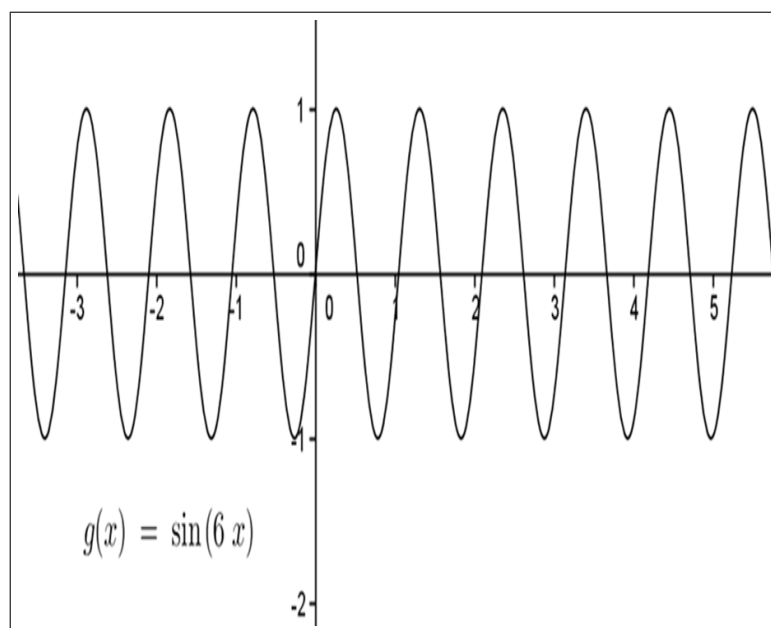


**Figura 1.3.3:** Gráfico de  $f(x) = \text{sen}(3x)$ .

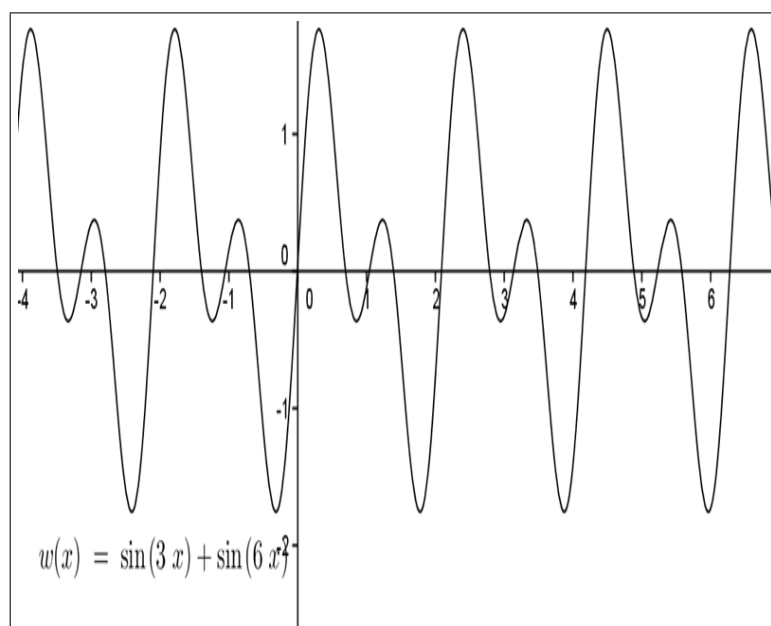
Fonte :Autor construído com o geogebra

Os gráficos das Figuras 1.3.3, 1.3.4 e 1.3.5 abaixo ilustram o comportamento das funções  $f(x) = \text{sen}(3x)$ ,  $g(x) = \text{sen}(6x)$  e  $f(x) + g(x)$ .

Com isso, percebe-se que a soma de duas ou mais funções periódicas resulta em uma nova função periódica e o período da função  $w(x) = f(x) + g(x)$  é dado por  $\frac{2\pi}{3}$ .



**Figura 1.3.4:** Gráficos de  $f(x) = \sin(6x)$ .  
Fonte :Autor construído com o geogebra



**Figura 1.3.5:** Gráfico de  $w(x) = f(x) + g(x)$ .  
Fonte :Autor construído com o geogebra

## 1.4 Movimento das marés

Os movimentos periódicos de elevação dos níveis da água dos oceanos, mares e lagos são provocados pela força gravitacional da Lua e do Sol sobre a Terra. As marés ocorrem em intervalos regulares de 6 horas e 12 minutos. Portanto, a cada 24 horas e 50 minutos, o mar sobe e desce duas vezes, constituindo um fluxo e refluxo das águas.

Assim, à medida que a Terra gira, outras regiões passam a sofrer elevações, como se a subida de nível se deslocasse seguindo o movimento da Lua. No lado oposto da Terra, dá-se o mesmo: as águas também se erguem, de forma que uma elevação compensa a outra. Assim, nas regiões costeiras essas elevações das águas correspondem às marés altas. Enquanto o nível das águas sobe em dois lados opostos na Terra, em outras regiões do globo (diametralmente opostas) ele desce: é a maré baixa.

Embora muito maior que a Lua, o Sol tem menor efeito sobre as marés, porque a sua distância da Terra é muito grande. A elevação das águas, contudo, é bem mais acentuada quando os três corpos estão alinhados, o que é verificado duas vezes por mês, na Lua Cheia e na Lua Nova: são as chamadas marés grandes. Quando o Sol, a Lua e a Terra estão dispostos em ângulo reto (sendo a Terra o vértice) a variação das marés é menor: são as marés mortas.

A diferença entre maré baixa e maré alta é denominada amplitude das marés e se mede por uma régua graduada chamada de marégrafo<sup>[2]</sup>

Assim, o movimento das marés é uma oportunidade de mostrar aos educandos uma aplicação prática que possibilitará a observação desse fenômeno da natureza e encontrar uma função periódica que relacione a altura da maré e o tempo.

## 1.5 Os recursos tecnológicos no estudo das funções trigonométricas

A tecnologia sempre esteve presente nos mais distintos e remotos períodos da História. Para o homem primitivo, a tecnologia foi sintetizada no domínio do fogo para fundição do ferro, facilitando a construção de seus armamentos; na sequência, a construção de utensílios de trabalho possibilitou ao homem produzir o alimento próximo a sua casa sem a necessidade de passar longo tempo afastado de sua família.

---

<sup>2</sup> é o instrumento que registra automaticamente o fluxo e o refluxo das marés em um determinado ponto da costa. Ao registro produzido, sob a forma de gráfico, denomina-se maregrama. Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Atualmente, o computador é um recurso imprescindível na educação, pela contribuição da inclusão dos cidadãos na era digital e pelas oportunidades que apresenta para qualificar os processos de ensino e aprendizagem. Uma escola com laboratório em boas condições de uso e com professores capacitados e motivados compreende a aprendizagem como processo contínuo e colaborativo. Os computadores, com todo o seu arsenal de possibilidades e oportunidades, diversificam as alternativas de criatividade para o educador e educando.

Os computadores, a cada dia, são utilizados em um número maior de tarefas, podendo ser profissionais ou pessoais, como instrumentos auxiliares importantes na busca de informação e de comunicação. A popularização dessas máquinas nos domicílios e escritórios deve-se não apenas à redução gradual de custos para sua aquisição, mas principalmente aos recursos de que se dispõem, agregando diversas mídias, e a possibilidade de utilização de softwares para um conjunto vasto de atividades. (TIC, [23] 2007, p. 33)

No âmbito da Educação, as Tecnologias da Informação e Comunicação TIC's são meios que veiculam conteúdos pedagógicos através de atraentes e coloridos desenhos, sons e animações. Busca-se, assim, discutir algumas questões que possam contribuir para ampliar a reflexão crítica dos alunos acerca do uso das TIC's, concebidos como instrumentos dialógicos de interação e mediação de saberes, os quais conferem significado à comunicação, oferecendo possibilidades de renovar ou mesmo romper com a concepção do modelo tradicional da educação.

São inúmeras as discussões sobre o uso das TIC's na educação, em particular na educação Matemática, pois o interesse dos alunos por essas ferramentas vem motivando professores e pesquisadores a buscarem formas de aliar o uso desses recursos ao ensino e aprendizagem de Matemática.

Borba e Penteadó([21] 2007) apresentam aspectos positivos no uso desses recursos na Educação Matemática apontando aspectos favoráveis ao uso dessas ferramentas.

Pesquisas já feitas em nosso grupo de pesquisa - GPIMEM - Grupo de Pesquisa em Informática, outras mídias e Educação Matemática- apontam para a possibilidade de que se trabalhar com os computadores abre novas perspectivas para a profissão docente. O computador, portanto, pode ser um problema a mais na vida atribulada do professor, mas pode desencadear o surgimento para seu desenvolvimento como um profissional da educação.(BORBA e PENTEAADO, [21] 2007, p.15)

A educação mediatizada pelas Tecnologias da Informação e Comunicação tem gerado novos problemas e desafios para os educadores, requerendo, ainda, muita análise sobre a importância da utilização desses recursos em sala de aula. Portanto, é necessário aprofundar as reflexões sobre o uso dos meios tecnológicos na educação, esquivando-nos das euforias diante do fascínio e do discurso apologético da técnica; pois esses acabam por distorcer o real significado e os fins educativos a que se propõem projetos dessa natureza (BRAGA, [10] 1999).

O computador, nesse contexto, configura-se como um fator primordial para extrapolar as limitações clássicas do modelo preconizado pela Teoria da Informação, baseada na tríade linear emissor-mensagem-receptor.

Essa potencialidade rompe com as características centrais dos modelos tradicionais de comunicação de massa: a unidirecionalidade e a massificação. As diversas mídias, em formato de animação, simulação ou mesmo jogos, trazem oportunidades significativas para o professor tornar as suas aulas mais dinâmicas e envolventes, resultando em ganhos pedagógicos.

As atividades desenvolvidas com os *softwares* Geogebra, e Fourier podem auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem das funções periódicas, na construção de conceitos matemáticos e de estratégias de raciocínio, na compreensão das diversas soluções dos problemas do cotidiano. Uma boa utilização desses recursos na educação passa pela seleção e acompanhamento do professor, dando sentido à atividade, estabelecendo relação com os objetos de estudo e sistematizando os resultados obtidos nos exercícios propostos.

### 1.5.1 O GeoGebra

O GeoGebra é um *software* dinâmico que envolve geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores para aprender e ensinar matemática nas escolas. Fornece três diferentes vistas dos objetos matemáticos: a Zona Gráfica, a Zona Algébrica ou Numérica e a Folha de Cálculo. Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (pontos, gráficos de funções), algebricamente (coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo.

A Zona Gráfica mostra todos os objetos que são construídos através da barra de ferramentas como na Entrada de Comandos possibilitando um ambiente de construção do conhecimento de forma dinâmica e apropriada para definir propriedades e conceitos geométricos.

A interface do Geogebra mostrada na Figura 1.5.1 inicia-se, geralmente, com a Janela de Álgebra sendo mostrada na tela e está posicionada à esquerda na vertical (que é o padrão) ou abaixo na horizontal. Uma das funções dessa janela é exibir as informações algébricas dos objetos que estão na janela de visualização, como equações de retas, circunferências, funções e outras informações.



**Figura 1.5.1:** Interface do Geogebra.  
Fonte :Pesquisa de imagens no google

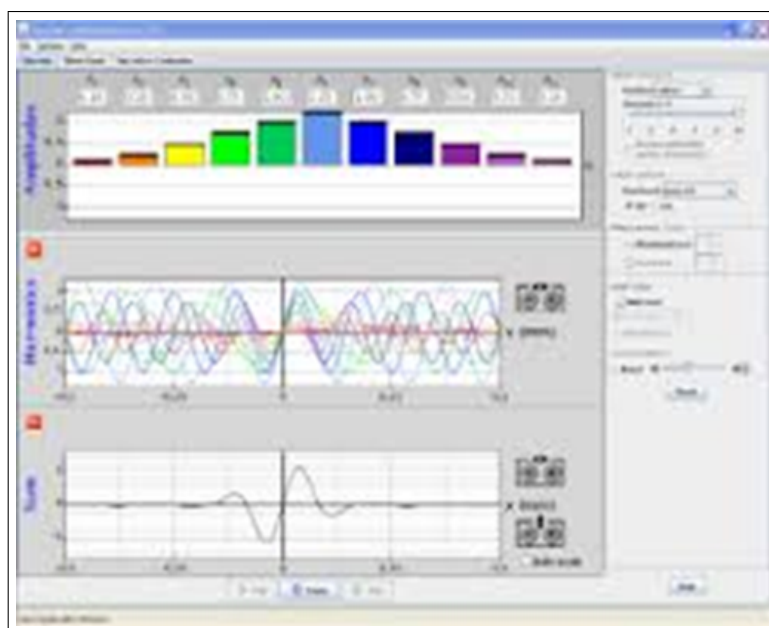
O Campo de Entrada fica no rodapé da interface do Geogebra. Através desse campo, é possível operar com o Geogebra, usando comandos escritos e com isso praticamente todas as ferramentas da Barra de Ferramentas podem ser acessadas através desses comandos, mas existem alguns comandos que só podem ser executados através do Campo de Entrada.

Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas de forma dinâmica e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

Pretende-se, mostrar possíveis aplicações do software Geogebra no ensino da Trigonometria, em particular entre as ondas sonoras e o movimento das marés através de atividades um ambiente de interação na busca das observações dos gráficos das funções trigonométricas e relacionar aos parâmetros das funções definidas por  $f(x) = B + A \sin(Cx + D)$  ou  $f(x) = B + A \cos(Cx + D)$ .

## 1.5.2 O Fourier

O *software* Fourier (ver Figura 1.5.2) é um simulador de som representado pela soma de várias funções seno e cosseno. Esse programa possibilita a criação de ondas de todas as diferentes formas através da adição de várias funções seno ou cosseno, propiciando um ambiente interativo que permite visualizar frequências, períodos e lei de formação, além de fazer com que os educandos alterem esses parâmetros, verifiquem o comportamento dos gráficos e comparem suas expressões matemáticas.



**Figura 1.5.2:** Interface do Fourier.  
Fonte :Pesquisa de imagens no google

Esse *software* tem como objetivo principal estudar o conceito de ondas através das funções seno e cosseno, além de favorecer a compreensão dos conceitos básicos para o estudo dessas mesmas funções.

Com a utilização desse recurso pode-se iniciar o estudo das funções trigonométricas mostrando simulações de sons e suas respectivas funções e introduzir conceitos de período, imagem e frequência. Os aspecto visual chama atenção por oferecer recursos visuais atrativos dessas funções e fazer comparação com suas expressões matemática correspondentes.

O *software* foi desenvolvido por professores da Universidade do Colorado (EUA) e pode ser baixado gratuitamente através do link [www.phetcolorado.edu](http://www.phetcolorado.edu). sendo utilizado para estudar os conceitos de ondas, funções seno e cosseno.



Seus principais objetivos de aprendizagem são:

- (1) Explicar qualitativamente como somar senos e cossenos para produzir funções periódicas arbitrárias;
- (2) Reconhecer os principais elementos de uma onda, como período, amplitude e frequência;
- (3) Reconhecer os sons em termos de ondas senoidais;
- (4) Comparar as expressões matemáticas com os elementos de uma onda senoidal;
- (5) Explicar as funções de Fourier com definição e propriedades.

## *2 Procedimentos metodológicos*

Os procedimentos metodológicos serão detalhados abordando o problema da nossa pesquisa através do auxílio da modelagem Matemática e dos recursos tecnológicos. A caracterização do ambiente escolar são descritos bem como os aspectos geográficos, turísticos, econômicos e históricos de Aracati e da praia de Canoa Quebrada.

### **2.1 O problema da pesquisa**

Diante do que foi exposto referente à Modelagem Matemática, funções trigonométricas, movimento da marés e o uso dos recursos tecnológicos, especificamente o Geogebra e o Fourier é que se propõe o seguinte problema que dará alicerce a toda pesquisa: “Será que o estudo de situações concretas com apoio na Modelagem Matemática e com uso de recursos tecnológicos como o Geogebra e o Fourier oportunizam a melhoria da aprendizagem das funções circulares?”

Esta pesquisa foi voltada ao alunos do Ensino Medio, especificamente, quinze alunos dos 2<sup>o</sup> e quinze alunos dos 3<sup>o</sup> anos, pois os mesmos já estudaram esses conteúdos na série anterior, ou estudam na 2<sup>a</sup> série do Ensino Médio.

A discussão sobre novas práticas pedagógicas acerca do estudo das funções trigonométricas, com base nos conceitos da Modelagem Matemática e no uso dos recursos tecnológicos motivaram a execução desse trabalho. Eis alguns motivos para a a escolha dessa temática:

- (i) primeiro, pela necessidade de buscar novas estratégias que facilitem a aprendizagem dos educandos;
- (ii) segundo, pela possibilidade de amenizar dificuldades de aprendizagem, principalmente quando se trata do estudo das funções trigonométricas;

(iii) finalmente, pelo aprimoramento da prática de ensino na perspectiva de realização de projetos futuros que venham contribuir para a melhoria da aprendizagem em Matemática.

Para verificar o nosso problema da pesquisa foram desenvolvidas duas avaliações, uma diagnóstica e uma final e relatos feitos pelos alunos que participaram das atividades.

O objetivo da avaliação diagnóstica foi verificar o quanto os educandos sabem sobre os conceitos de período, imagem, domínio, valor máximo, valor mínimo e comportamento dos gráficos dessas funções.

A avaliação final tem o propósito de verificar quantitativamente os avanços no estudo dessas funções. Os relatos serviram para que os alunos emitissem seus pensamentos referente aos conteúdos estudados e desmistificar o temor que os alunos tem com relação ao estudo das funções periódicas.



**Figura 2.1.1:** Recursos utilizados em sala de aula.

Fonte :Autor com câmera digital

Para darmos início e chegarmos a uma conclusão de que houve uma melhoria na aprendizagem, foram utilizados dois ambientes: a sala de aula e o laboratório de informática. Os recursos empregados para a execução da atividades em sala de aula foram um notebook (ver Figura 2.1.1), um data show e uma caixa de som amplificada, pois, além de estudar e visualizar os gráficos, escutou-se o som referente a essa função através do software que simula sons, mostra seus gráficos e lei de formação desses gráficos, o Fourier.

No laboratório de informática escolar foram usados os computadores para estudar o comportamento das funções  $f(x) = B + A \operatorname{sen}(Cx + D)$  através dos seus parâmetros. Para essa atividade foi utilizado o Geogebra, softwares de matemática dinâmica que permite visualizar vários gráficos, facilitando a observação e com isso a elaboração de hipóteses sobre a interferência desses parâmetros no comportamento dos gráficos gerados.

Nessa perspectiva, a pesquisa mostrará através do apoio da Modelagem Matemática e com a utilização dos recursos tecnológicos podem contribuir na aprendizagem das funções circulares, especificamente as funções seno e cosseno.

## 2.2 Caracterização da escola e sujeitos da pesquisa

A clientela da pesquisa beneficiarão alunos do 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> séries do Ensino Médio da EEM Beni Carvalho, uma escola pública estadual de Aracati – CE, filhos de comerciantes da própria cidade, de famílias humildes dos distritos e cidades vizinhas, sem perspectivas de vida, principalmente os repetentes, o que dificulta o trabalho dos professores. A maioria do alunado vem das escolas públicas da sede e outra parte dos distritos do município que chegam com um índice de aprendizagem baixo. Outro agravante é que alguns têm uma difícil convivência na sociedade.

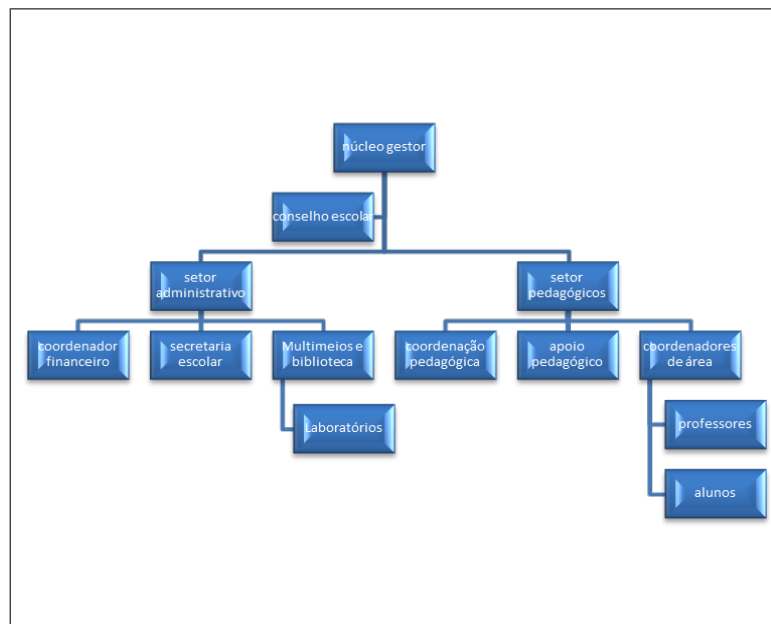
A unidade escolar é constituída por dois níveis de ensino: Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos (EJA), além de um anexo no presídio de Aracati com Educação Prisional e outro na Cacimba Funda, distrito de Aracati. A escola funciona nos turnos manhã, tarde e noite, sendo 18 turmas no período matutino com 773 alunos, 18 turmas no vespertino com 730 e 12 turmas à noite com 648, totalizando assim 2.151 alunos matriculados. O corpo docente é formado por 75 professores, sendo 35 temporários. Os educadores são graduados e pós-graduados, alguns fazendo mestrado e outros ainda estão terminando sua graduação na disciplina que lecionam.

O núcleo gestor é composto pelo diretor Francisco Hélio Rodrigues, com Licenciatura em Matemática e três coordenadores Jerônimo Muniz Galvão, formado em Matemática, professor Luiz Odonil, engenheiro agrônomo e químico e a professora Gláucia Maria Bernardo Sousa, formada em Letras.

Chiavenato (2001, [12] p. 251), declara que “organograma é o gráfico que representa a estrutura formal da empresa”. A escola investigada possui o seu organograma assim representado na Figura 2.2.1.

A autonomia da escola para uma gestão participativa também está prevista no art.17

da LDB[9], que afirma: "Os sistemas de ensino assegurarão às unidades escolares públicas de educação básica que os integram progressivos graus de autonomia pedagógica, administrativa e financeira, observadas as normas gerais de direito financeiro público". Nesse



**Figura 2.2.1:** *Organograma da escola.*

Fonte :Pesquisa direta

contexto participativo, a escola tem em sua filosofia político-pedagógica a democracia como ponte entre as relações interna e externa da escola. A LDB [9] é mais precisa neste sentido de autonomia, quando no seu art.14, e incisos I e II afirma que: Os sistemas de ensino definirão as normas da gestão democrática do ensino público na educação básica de acordo com os seguintes princípios: I – participação dos profissionais da educação na elaboração do projeto pedagógico da escola; II – participação das comunidades escolares e local em conselhos escolares ou equivalentes”.

O Conselho Escolar da entidade tem papel decisivo na democratização e participação. Todos os meses, os seus membros contribuem decisivamente para a criação de um novo cotidiano escolar, momentos em que a escola e a comunidade se identificam no enfrentamento dos desafios escolares imediatos e dos graves problemas sociais vividos na realidade brasileira e local.

A escolha dos membros dos Conselhos Escolares deve-se pautar pela possibilidade de efetiva participação: o importante é a representatividade, a disponibilidade e o compromisso; é saber ouvir e dialogar, assumindo a responsabilidade de acatar e representar as decisões da maioria, sem nunca desistir de dar

opiniões e apresentar as suas propostas, pois os Conselhos Escolares são, acima de tudo, um espaço de participação, de exercício de liberdade (CONSELHOS ESCOLARES, [8] 2004, p. 45).

A seleção dos integrantes do Conselho Escolar segue as diretrizes do sistema de ensino. A escola pública estadual tem definido aspectos importantes para a escolha dos conselheiros, que é feita através da convocação da Assembleia-Geral, com mandato de dois anos.

O Conselho Escolar é constituído de quatorze (14) membros titulares (deliberativos) e quatorze (14) suplentes, entre eles funcionários, pais, alunos, professores, representante civil, representante do núcleo gestor. Todos os componentes, colegiados em geral, conhecem as normas e funções do Conselho Escolar, órgão que fiscaliza a gestão democrático-participativa das unidades escolares, visando construir, efetivamente, uma educação de qualidade social.

Para se ter uma educação de qualidade, democrática e participativa faz-se imprescindível a inclusão do grêmio estudantil na escola. A Lei Federal de nº 7.398/95 garante a organização de grêmios estudantis como entidades autônomas para representar os estudantes em qualquer escola pública ou particular do país. O grêmio da escola constitui uma representação legítima e democrática dos estudantes. Vale salientar que a escola possui grêmio e nela há espaço para este atuar.

O estabelecimento de ensino trabalha com parcerias que contribuem para o desenvolvimento das atividades escolares como Polícia Militar; Receita Federal; psicólogos; instituições universitárias; Secretária da Fazenda (SEFAZ); Caixa Econômica; empresas da cidade, Empresa de energia eólica entre outras.

A unidade escolar executa projetos educativos interdisciplinares, como: Feira de Ciências; Consciência Negra; Feira Literária; Xadrez; Olimpíadas (Física, Química, Matemática, Língua Portuguesa, Astronomia e Astronáutica), Competição Nacional de sites educativos na área de Física.

O estabelecimento de ensino contribui de forma decisiva para o avanço de nossa sociedade, aliando-se às novas tecnologias, interagindo com a sociedade através do blog que descreve as atividades realizadas no dia-a-dia ou comunicando-se com a escola através da rede social Hotmail. Esta prática vem demonstrando a todos que a educação é uma chave que possibilita transformar o homem, modificar a realidade, provocando rupturas necessárias e aglutinando forças que garantam a sustentação do espaço onde o novo seja a busca de construção do conhecimento refletido.

## 2.3 Aracati: terra dos bons ventos

Aracati<sup>[1]</sup> é um município do estado do Ceará, no Brasil. É conhecido nacional e internacionalmente pela Praia de Canoa Quebrada, que foi considerada a 5ª praia mais conhecida do mundo. Teve o núcleo urbano sede do município tombado em 2000 pelo Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional como patrimônio Nacional. É a terra onde nasceu o Revolucionário Eduardo Angelim, e também do romancista Adolfo Caminha, o primeiro bispo cearense, Dom Manuel do Rego Medeiros, o abolicionista Dragão do Mar, o ator Emiliano Queiroz e o pianista clássico Jacques Klein.

Segundo o dicionário Aurélio, Aracati é o nome do vento que sopra na Região Nordeste do Brasil, especialmente no estado do Ceará, de nordeste para sudoeste.

Sua denominação original era Cruz das Almas, Arraial de São José dos Barcos do Porto dos Barcos do Jaguaribe, depois, em 1766, Santa Cruz de Aracati e, desde 1842, Aracati.

A economia conta com sua base na agricultura, no cultivo do caju, coco-da-baía, cana-de-açúcar, mandioca, milho, feijão e maricultura (criação de camarões em cativeiro), na agropecuária: bovino, suíno e avícola. O sal e a extração mineral de argila são outras importantes fontes de renda do município.

A cidade conta com centenas de indústrias dos mais diversificados ramos: (no setor de perfumaria, sabão e velas, de produtos minerais não metálicos, de madeira, de produtos alimentícios, de vestuário, calçados e artesões de tecidos, couros e peles, de bebidas, gráfica, de extração mineral, de diversos serviços de construção, revendedoras de carros e motocicletas, redes de supermercados, web-designer, entre outras.

Uma das principais fontes de economia do município é o Turismo. Aracati é o segundo destino mais procurado no estado do Ceará. Majorlândia e Quixaba também recebem destaque como praias secundárias.

Aracati conta com Patrimônio Arquitetônico importante, edificações do século XVIII e residências que ainda guardam na fachada com seus azulejos na antiga Rua Coronel Alexandrino (Rua Grande), a herança da colonização portuguesa.

Em abril de 2000, a cidade foi tombada pelo IPHAN (Instituto do Patrimônio Histórico e Antropológico Nacional) como Patrimônio Histórico Nacional. Os principais monumentos de Aracati são a Igreja de Nosso Senhor do Bonfim, Nossa Senhora do Rosário dos Pretos, a Igreja dos Prazeres, de 1854, a Igreja Nossa Senhora do Rosário dos Brancos

---

<sup>1</sup>texto retirado e adaptado do site <http://pt.wikipedia.org/wiki/Aracati>

(ver Figura 2.3.1) localizada na Matriz, a Casa da Câmara, a Biblioteca Municipal e a antiga Rua Grande com suas lindas casas coloridas. O Instituto do Museu Jaguaribano também merece uma visita.



**Figura 2.3.1:** *Igreja da Matriz.*  
Fonte :Autor com máquina digital

A cidade de Aracati apresenta peculiaridades que à destacam-se das demais cidades. A cidade possui a 4 maior bacia de petróleo em terras do Brasil, a Fazenda Bélem. Também é o município que recebe mais Royalties do petróleo no Ceará, superando a capital Fortaleza. O maior parque eólico do Ceará encontra-se instalado em Aracati, o parque eólico Bons Ventos que distribui atualmente a melhor energia gerada por aerogeradores do mundo.

## 2.4 Canoa Quebrada

Canoa Quebrada<sup>[2]</sup>: localizada em uma região privilegiada na América do Sul, possui um clima estável durante todo o ano. Durante o decorrer do ano, o céu resplandece em um azul invejável e seus moradores sorriem com a satisfação de quem sabe ser dono de um pequeno paraíso. As dunas, as falésias são uma atração à parte e atraem turistas do mundo inteiro na busca do símbolo que representa Canoa Quebrada (ver Figura 2.4.1).

A origem desta antiga vila de pescadores é do ano mil seiscentos e cinquenta e transformou-se num ponto turístico em meados dos anos 70, por um grupo de hippies que se apaixonou pela beleza paradisíaca e a hospitalidade dos nativos que habitavam a

---

<sup>2</sup>texto retirado e adaptado do portal <http://www.portalcanoaquebrada.com.br/>



vila. Este cenário cinematográfico fica a apenas 165km ao leste de Fortaleza, capital do Estado do Ceará.



**Figura 2.4.1:** *Símbolo de Canoa Quebrada.*

Fonte :Pesquisa de imagens no google

Hoje, além da paisagem única e exuberante, as atrações mais procuradas para aproveitar o sol forte são os mais de 80 excelentes hotéis em Canoa Quebrada e as excursões pelos pontos turísticos da região e pelas praias vizinhas: Ponta Grossa, Garganta do Diabo, Rio Jaguaribe e o Parque de Dunas e Lagoas. Vale a pena reservar um dia para fazer um passeio de jangada ou à cavalo e ficar em contato com a natureza do lugar. Para os mais aventureiros tem passeios de parapente, buggy e quadriciclo.

Canoa Quebrada possui características geográficas particulares, correntes ascendentes de ar quente, nas falésias, cria um ambiente ideal para prática de vôo com parapente e ventos vindos do leste de até 30 nós com águas calmas são perfeitos para prática e aprendizagem de Kitesurf, uma modalidade que vem crescendo rapidamente na região. Para perceber um pouco de cultura brasileira turistas podem receber aulas de capoeira na sua estada em Canoa. No alto da maior duna de Canoa, pode se apreciar um dos maiores espetáculos do nordeste, o Pôr do sol de Canoa. Para os mais místicos o Pôr do sol visto desde a maior duna de Canoa Quebrada tem uma energia diferente aos outros locais.

Depois de todo este SPA energético, convém recuperar o fôlego, porque ainda se pode curtir o que á de mais quente no Ceará, A noite da Broadway (rua principal de Canoa Quebrada).

O tempero de Canoa Quebrada: se durante o dia o prato principal gira em torno

de lagostas, peixes, arraiaias, camarões, ostras e caranguejos, à noite, além de todos estes frutos do mar, muitas outras delícias estão fumegando nas panelas, que em breve estarão à postos para o seu bel-prazer. Para isso, a Broadway será quase sempre o seu destino; da única rua de Canoa Quebrada que ao mesmo tempo é point e endereço da maioria dos bares, boates e restaurantes do vilarejo. Para degustar as maravilhas da cozinha regional e uma carne assada que se derrete a cada garfada, recomenda-se o famoso trio da casa, um prato com lagosta, camarão e peixe, tão farto que dá para três pessoas comerem bem.



**Figura 2.4.2:** *Broadway do Nordeste.*  
Fonte :Autor com máquina digital

O agito da Broadway do Nordeste começa (ver Figura 2.4.2) por volta das 22h e só termina quando o dia já raiou. Aqui, Bob Marley é deus e os drinques quentes são o manjar dos deuses. Forró, Reggae, dance, rock e axé se misturam nas boates, abertas até às 5h da manhã. Depois, só resta ver o sol nascer na praia e desmaiar na cama da Pousada, porque no espaço de mais algumas horas começa tudo outra vez..

## 2.5 Metodologia aplicada

Conforme já descrito no início da Seção 2.2, as atividades foram desenvolvidas ao longo de cinco semanas, sendo que os encontros aconteciam no turno da tarde, ou seja, no contra turno, para não comprometer o horário normal da escola e ficaram divididas da seguinte forma:

- 1ª semana: Aplicação de uma avaliação diagnóstica e logo após um questionário

sobre as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução da avaliação. No encontro seguinte foi iniciado o estudo das funções periódicas através das ondas sonoras assistindo o vídeo “Desenhando Ondas”.

- 2ª semana: Retomaram-se as atividades sobre ondas sonoras e foi apresentado aos alunos o software Fourier, simulador de sons e gerador de gráficos envolvendo soma de funções senoidais, mostrando seu comportamento e estudo de definições importantes como período, imagem, domínio, frequência, amplitude e suas leis de formação.
- 3ª semana: Apresentação do Geogebra aos educandos e construções de gráficos das funções circulares, dando destaque aos conceitos e domínio, imagem e período dessas funções. Essa atividade foi aplicada no Laboratório de Informática Escolar, tendo uma média de 30 computadores em perfeito funcionamento. Na aula seguinte, utilizou-se novamente o Geogebra para estudar os parâmetros das funções  $f(x) = B + A \sin(Cx + D)$  e  $f(x) = B + A \cos(Cx + D)$ .
- 4ª semana: Utilização do Geogebra para iniciar o estudo dessas funções através do movimento da marés e construção do modelo matemático representado pela função  $f(x) = B + A \sin(Cx + D)$  e  $f(x) = B + A \cos(Cx + D)$  do vai e vem das marés num determinado dia da Praia de Canoa Quebrada.
- 5ª Semana: Aplicação de uma avaliação final para verificar se essas atividades realizadas com o apoio da Modelagem Matemática e o uso de recursos tecnológicos Geogebra e Fourier favoreceram a melhoria da aprendizagem dos educandos referente ao estudo das funções periódicas, em particular das funções seno e cosseno.

Para averiguar o nível de aprendizagem dos alunos em relação às funções seno e cosseno aplicou-se, inicialmente, uma avaliação diagnóstica. Essa avaliação diagnóstica (ver Figura 2.5.1) envolve cinco questões básicas retratando situações que os alunos devem ser capazes de resolver, como: determinar o período, imagem, valor máximo e mínimo e lei de formação das funções periódicas, através da interpretação visual dos gráficos, ou da lei de formação de uma função seno ou cosseno.

Após a avaliação diagnóstica foi feito um questionário com os educandos para detectar as dificuldades encontradas na resolução das questões propostas, cujos dados coletados foram postos em tabela para nortear os estudos dessas funções periódicas e suas aplicações.

Para a realização da atividade sobre ondas sonoras foi assistido um vídeo que mostra de maneira clara e objetiva como as funções seno e cosseno podem ser estudadas através



**Figura 2.5.1:** Avaliação diagnóstica feita pelos alunos.

de situações concretas e como a Matemática pode estar presente em qualquer assunto, até mesmo na música. Para que os alunos pudessem perceber a presença da Matemática através do estudo das ondas sonoras, foram entrevistados dois músicos profissionais da cidade que relataram como a Matemática está presente na música e em que momento se pode constatar essa presença.



**Figura 2.5.2:** Netinho Ponciano.  
Fonte: Arquivo do próprio músico

Um dos músicos que colaborou através de seu relato sobre a importância da Matemática dentro do contexto musical foi Netinho Ponciano (ver Figura 2.5.2), fundador da Banda Os Espaciais, que fez sucesso e embalou os sábados da juventude aracatiense e de todo o Vale do Jaguaribe nas décadas de 70, 80 e 90.

Utilizou-se, posteriormente, o aplicativo Fourier que simula diversos sons e suas diversas representações gráficas obtidas através da vibração desses sons. A Figura 2.5.3 mostra um dos alunos fazendo a simulação de um som através da manipulação de frequências e observação dos seus gráficos correspondentes.

Esse procedimento motivou os alunos, deixando-os curiosos e atentos. Através da manipulação dessa mídia tecnológica puderam vivenciar e perceber o quanto a Matemática e as ondas sonoras se relacionam entre si.



**Figura 2.5.3:** Aluno manipulando o fourier.

Fonte: Autor através da câmera digital

Sequencialmente, os alunos foram levados ao Laboratório de Informática da própria escola, que dispõe de quarenta computadores, o que facilitou a dinâmica da atividade. Foi usado o software Geogebra, recurso pedagógico que os alunos desconheciam, para desenvolver atividades de observação e elaboração de hipóteses a respeito das funções do tipo  $f(x) = B + A\text{sen}(Cx + D)$  e  $f(x) = B + A\text{cos}(Cx + D)$ . Durante as observações, verificou-se como se comportam essas funções através da manipulação dos parâmetros  $A, B, C$  e  $D$  e que mudanças acarretam quando se alteram essas variáveis.

Após essa atividade, iniciou-se o estudo dessas funções através do movimento das marés. Foram utilizados para sua execução os seguintes procedimentos:

- (i) Leitura de um texto informativo sobre o processo de formação das marés;
- (ii) Pesquisa da tábua das marés na praia de Canoa Quebrada, em um determinado dia;
- (iii) Utilização do software Geogebra para dar início ao processo de construção de uma função seno ou cosseno referente aos dados coletados pelo alunos da tábua das marés;
- (iv) Verificação do modelo matemático, ou seja, da função encontrada para determinar o movimento das marés;
- (v) Resolver situações problema com esse modelo, tais como: determinar a altura da maré em uma determinada hora do dia, a velocidade com que a maré cresce ou decresce, qual a hora em que a maré se encontra em uma determinada altura.

Através desse aprofundamento teórico e das dinâmicas proporcionadas pelo uso desses recursos é que se viabilizou a execução dessas atividades, tendo como objetivo principal proporcionar aos educandos um ambiente mais dinâmico, participativo, tornando-os agentes ativos na aquisição do conhecimento e com isso garantir uma melhoria na qualidade de ensino da Matemática, principalmente no estudo das funções circulares e suas propriedades.

## ***3 Descrição e análise das atividades***

A descrição e análises das atividades são relatadas nesse capítulo, abordando os aspectos dos conhecimentos prévios que os alunos possuem sobre as funções trigonométricas, as atividades desenvolvidas no decorrer do trabalho na busca de amenizar as dificuldades de aprendizagem dos docentes sobre as funções circulares, culminado com a realização e análise de uma avaliação final.

### **3.1 Diagnóstico inicial sobre o estudo das funções seno e cosseno**

Faz-se agora um relato das atividades desenvolvidas com os alunos sobre o estudo das funções seno e cosseno, cuja atividade foi retirada e adaptada da pesquisa feita por Fonseca [14], que introduz o assunto das funções trigonométricas relacionando com o estudo das ondas sonoras. A segunda atividade foi retirada de um dos artigos de Almeida [1], que mostra uma atividade envolvendo o movimento da marés e com isso introduzirmos e aprofundarmos as propriedades e conceitos básicos para o estudo dessas funções. Essas atividades foram aplicadas com 30 alunos da Escola de Ensino Médio Beni Carvalho, da rede pública estadual, localizada no município de Aracati.

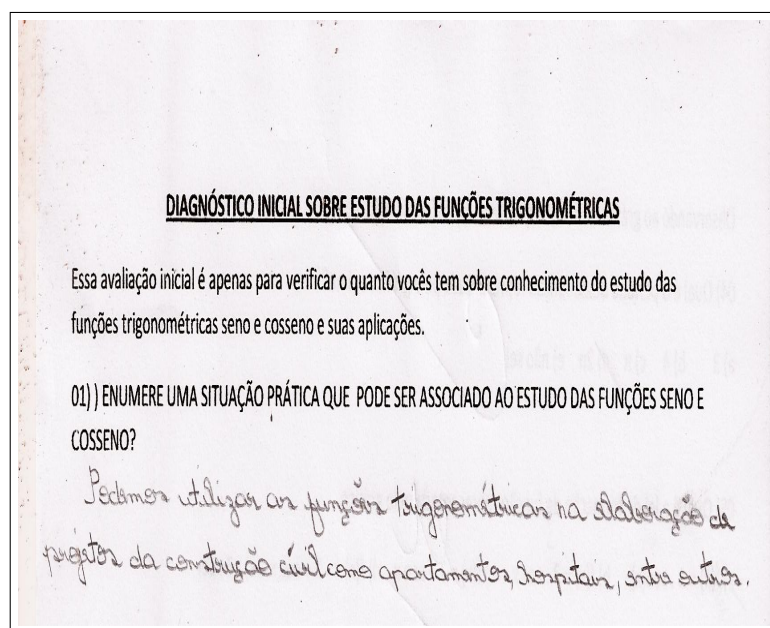
No momento inicial dessa pesquisa, fez-se um diagnóstico sobre o estudo das funções seno e cosseno, cujos dados coletados serviram de parâmetro para identificar as dificuldades dos alunos. Verificou-se durante as atividades que a aplicação dos recursos tecnológicos contribuiu consideravelmente para uma melhor assimilação das funções estudadas.

Nessa perspectiva, BARBOSA ([4], 1999) comenta sobre a importância da experimentação para o ensino de ciências:

Percebe-se na experimentação um elemento importante para o ensino de Ciências uma vez que esta é também uma dimensão dessa própria ciência. Dessa forma,

buscamos a experimentação como uma das técnicas capazes de proporcionar ao aluno eficiência na construção e aprendizagem de conceitos e de modelos científicos e não simplesmente como um elemento de motivação para os alunos.

O instrumental utilizado para diagnosticar o conhecimento prévio sobre o estudo das funções seno e cosseno foi uma avaliação contendo uma questão subjetiva e cinco questões objetivas, onde são cobrados conhecimentos específicos do estudo das funções, tais como: determinação do período, domínio, imagem, contradomínio, valores máximo e mínimo de uma função seno ou cosseno, determinação da lei de formação através de seu gráfico. A questão subjetiva “ENUMERE UMA SITUAÇÃO PRÁTICA QUE PODE SER ASSOCIADA AO ESTUDO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO” tem como objetivo realizar uma sondagem para identificar o quanto os alunos associam ou relacionam as funções seno e cosseno a situações concretas. Nesse contexto, destaca-se na Figura 3.1.1 o relato de um dos alunos.



**Figura 3.1.1:** Relato de um aluno.

Fonte: Autor através da câmera digital



Com esse relato podemos observar que os alunos associam a trigonometria com aplicações na construção civil, e que é uma temática para os profissionais dessa área, como os arquitetos e engenheiros. Mas um dos relatos (ver Figura 3.1.2) que mais chamou atenção é que uma boa parte dos alunos acha que os conteúdos de Matemática só tem aplicação nos bancos escolares, ou seja, não possui nenhuma ligação com o mundo que os cerca.

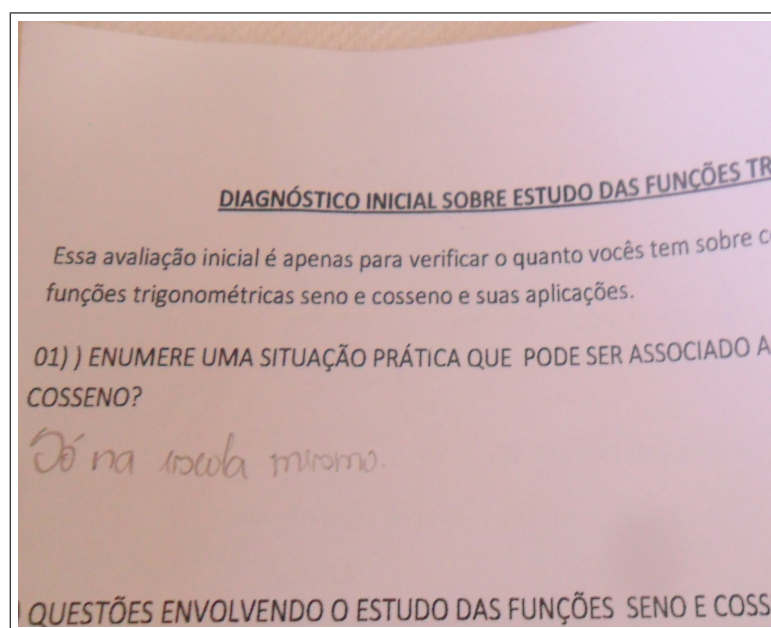


Figura 3.1.2: Relato de aluno sobre o estudo da matemática.

Fonte: Autor através da câmera digital

Esse momento inicial deve proporcionar ao educador buscar alternativas que possam mudar o pensamento desses alunos em relação ao aprendizado de Matemática, proporcionando um ambiente de interação com os conteúdos estudados e os problemas que tenham significado. As atividades que serão propostas com o auxílio da Modelagem Matemática e dos recursos tecnológicos devem motivar os educandos a buscar uma postura participativa e crítica na busca das soluções dos diversos problemas.

Após essa atividade, aplicou-se uma prova objetiva contendo cinco questões abordando os conceitos de período, imagem, valor máximo e mínimo, lei de formação e interpretação de gráficos de funções trigonométricas. O objetivo dessa avaliação é verificar o que os educandos realmente sabem sobre esses conceitos essenciais para o estudo das funções circulares.

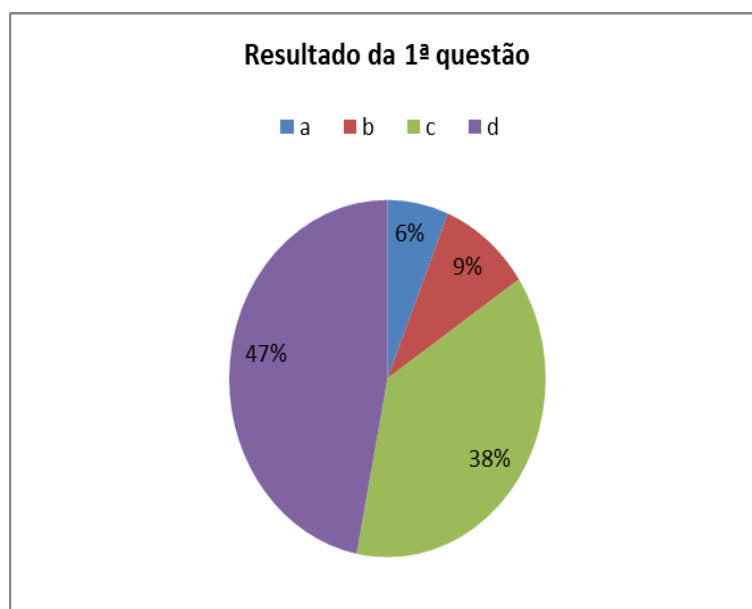
Análise da primeira questão: Qual é o período da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -2 \sin x$ ?

Solução. Essa questão aborda o conceito de período de uma função, que por definição

é  $p = \frac{2\pi}{k}$ , sendo  $k \neq 0$ .

Na função dada o período será  $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ . A resposta dessa questão é dada pela alternativa a.

O que se pode observar nessa questão, é que a maioria dos alunos, 94% (ver Figura 3.1.3) não conseguiram chegar ao resultado correto, pois não conhecem o conceito de período de uma função e não souberam determinar através da sua lei de formação. Apenas 6% dos alunos conseguiram chegar a alternativa correta. Os levantamentos dos dados observados nesse ítem pressupõe uma mudança na prática docente e inserindo esses conceitos de forma dinâmica através de situações concretas que levem aos educandos a relacionar e compreender o conceito de período e sua importância no comportamento dos gráficos de uma função circular.



**Figura 3.1.3:** Resultado da 1ª questão.

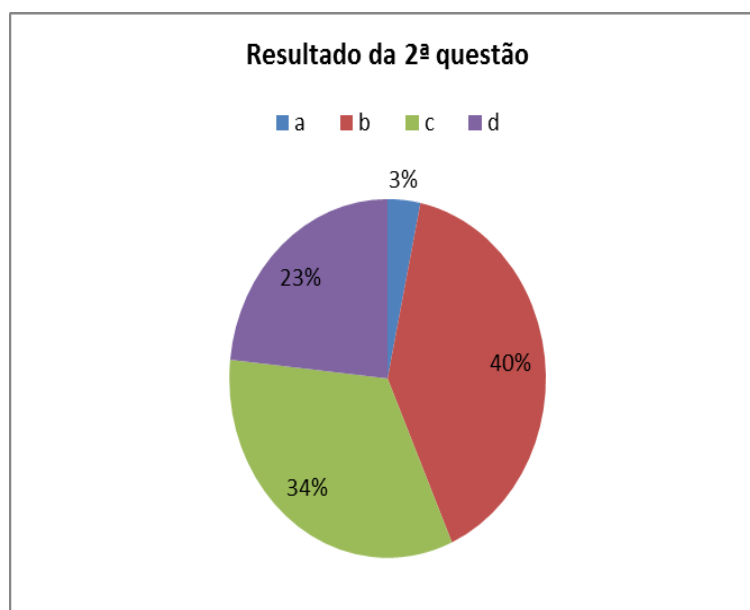
Fonte: Pesquisa direta

Análise da segunda questão: Qual é o valor máximo da função definida por  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \cos \frac{x}{3}$  ?

Solução.: Como  $\frac{x}{3}$  representa um arco qualquer, para  $x$  real, então pode-se concluir que a sua imagem é dada através do intervalo  $[-1, 1]$ , sendo os extremos dados o valor mínimo  $-1$  e valor máximo  $1$ . Portanto a alternativa correta é a letra a.

Essa questão da prova objetiva era para determinar o valor máximo da função definida por  $f(x) = \cos(\frac{x}{3})$ . Os alunos deveriam compreender o conceito de imagem de uma função seno para encontrar o seu valor máximo. Observou-se que 97% dos alunos (ver Figura

3.1.4) não conseguiram encontrar esse resultado. Deduz-se com isso que a maioria desses alunos não tiveram nenhum contato com essa temática em sua vida escolar até o momento.



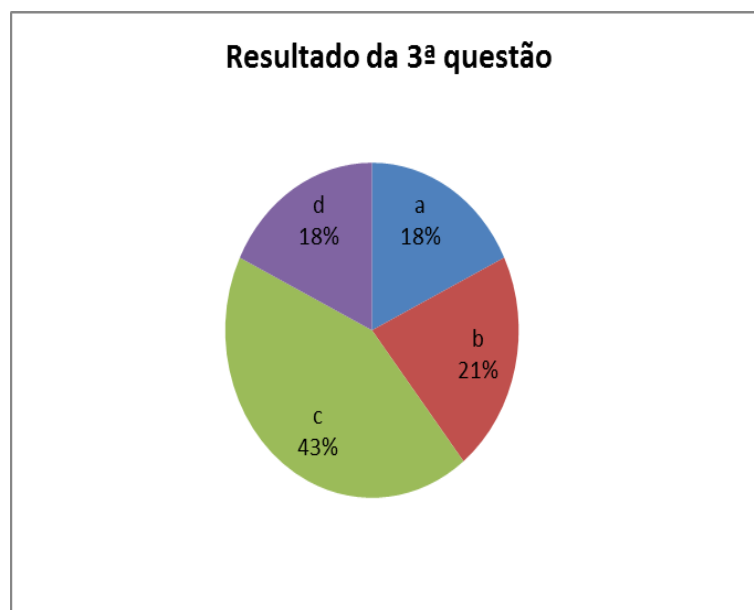
**Figura 3.1.4:** Resultado da 2ª questão.  
Fonte: Pesquisa direta

Análise da terceira questão: Uma função trigonométrica tem como valor mínimo  $-3$  e valor máximo  $3$ . Qual das funções abaixo possui esses valores?

- a)  $f(x) = \text{sen}(3x)$
- b)  $f(x) = \text{cos}(3x)$
- c)  $f(x) = 3 + \text{sen } x$
- d)  $f(x) = 3 \cdot \text{cos } x$

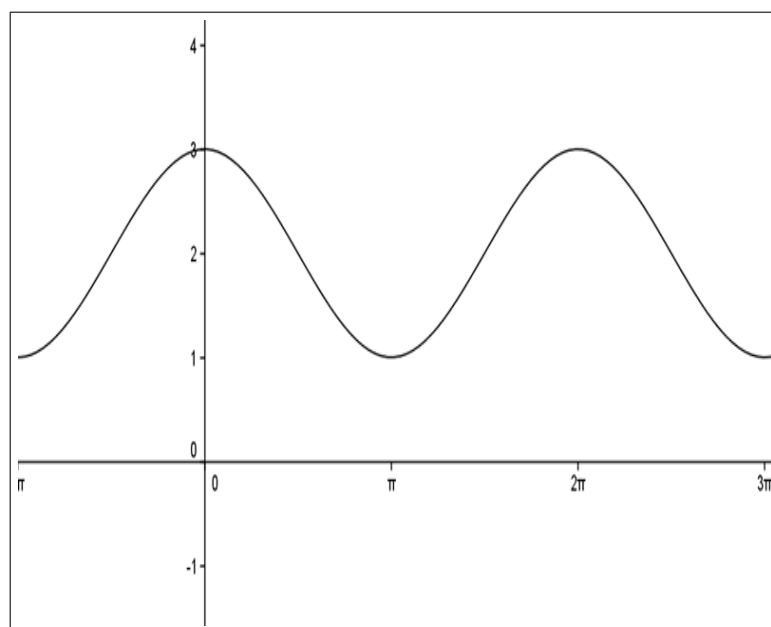
Solução. Essa questão envolve o conceito de imagem de uma função, ou seja, diz respeito ao parâmetro  $A$  de uma função do tipo  $f(x) = A \text{sen } x$  ou  $f(x) = A \cdot \text{cos } x$ . Nesses tipos de funções, sabe-se que a imagem é dada por  $[-A, A]$ , sendo o parâmetro  $A$  chamado de amplitude. Tem-se então  $[-3, 3]$  a imagem da função, logo o valor de  $A$  é  $3$ . Portanto a solução dessa questão é dada pela alternativa d.

Essa questão era para determinar a lei de formação de uma função seno ou cosseno a partir de valores do intervalo  $[-3, 3]$ , ou seja, partindo de sua imagem. Pôde-se perceber no desenvolvimento desta atividade que  $82\%$  dos alunos (ver Figura 3.1.5) possuem enormes dificuldades em determinar a lei de formação de uma função seno ou cosseno a partir de sua imagem.



**Figura 3.1.5:** Resultado da 3ª questão.  
Fonte: Pesquisa direta

Análise da quarta questão: Qual o período da função representada pelo gráfico da Figura 3.1.6?

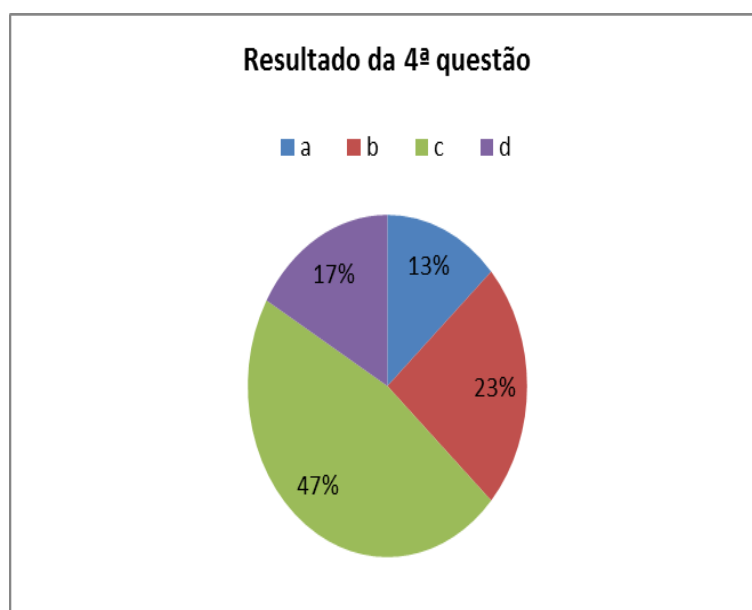


**Figura 3.1.6:** Gráfico da questão 4 e 5.  
Fonte: Autor contruído com o geogebra

- a) 2
- b)  $-2$
- c)  $2\pi$
- d)  $-2\pi$

Solução. Solução das questões 4 e 5 . Nessa questão pode-se considerar uma função do tipo  $f(x) = B + A \sen x$  ou  $f(x) = B + A \cos x$ , sendo os parâmetros  $A$  e  $B$ , amplitude e deslocamento sobre o eixo  $y$ . Assim, para encontrar o parâmetro  $A$ , temos a imagem  $[1, 3]$ , mas a função do tipo  $f(x) = A \sen x$ , tem-se para imagem  $[-A, A]$  o valor da amplitude é dado por  $A = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} =$ , logo fazendo uma analogia com a imagem  $[1, 3]$ , o valor de  $A = \frac{3-1}{2} = 1$ . Agora deve-se determinar o parâmetro  $B$ , onde o deslocamento  $B$  muda a imagem  $[-A, A]$  da função  $f(x) = A \sen x$  ou  $f(x) = A \cos x$ . Tem-se agora a seguinte imagem  $[-A + B, A + B] = [1, 3]$ . Resolvendo essa igualdade encontraremos o valor do parâmetro  $B$ , ou seja,  $-1 + B = 1$ , logo  $B = 2$ . Conclui-se que a função tem imagem  $[1, 3]$  é dada pela lei de formação  $f(x) = 2 + \cos x$  ou  $f(x) = 2 + \sen x$  e o período é dado por  $2\pi$ .

Para realizar a quarta atividade, os alunos deveriam através de um gráfico de uma função periódica determinar o seu período. Essa foi a questão com maior quantidade de acertos, ou seja, 47% dos alunos, conforme indicado na Figura 3.1.7)



**Figura 3.1.7:** Resultado da 4ª questão.  
Fonte: Pesquisa direta

Análise da 5ª questão: Qual é das funções abaixo que representa a lei de formação da função representada pelo gráfico da questão anterior?

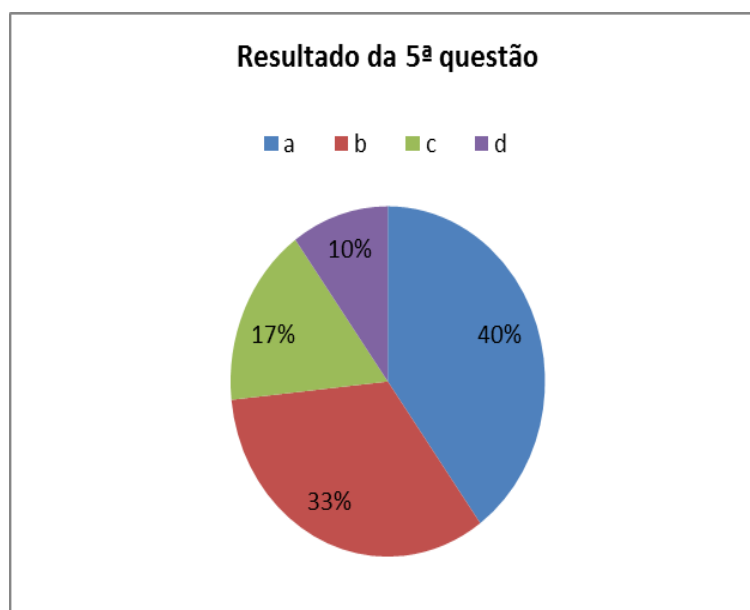
a)  $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$

b)  $f(x) = 3 \cdot \text{cos } x$

c)  $f(x) = 2 + \text{sen } x$

d)  $f(x) = 2 \cdot \text{cos } x$

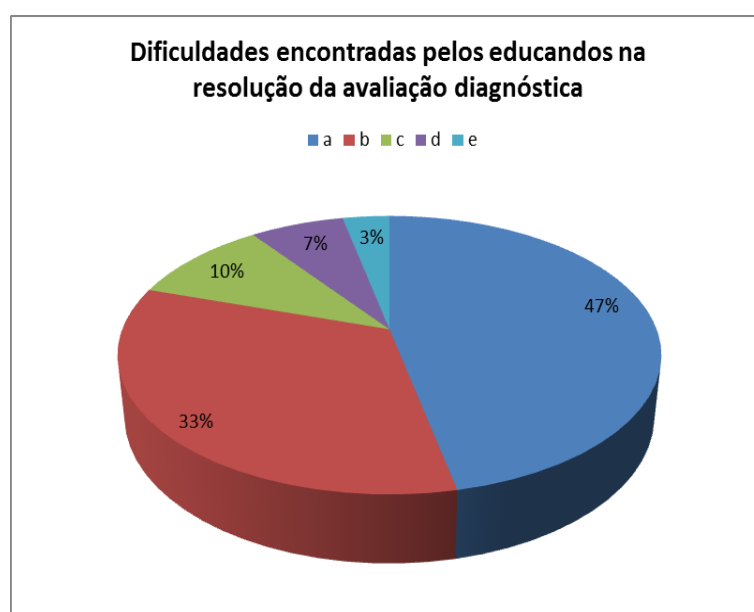
A questão final (ver Figura 3.1.8) dessa sondagem inicial mostra que é possível determinar a lei de formação de uma função seno ou cosseno através de seu gráfico. Apenas 17% dos alunos conseguiram chegar a solução dessa questão, e, 83% dos alunos participantes dessa sondagem ainda não estão preparados para fazer essa relação entre gráfico e lei de formação, habilidade de fundamental importância para a construção da aprendizagem sobre funções circulares.



**Figura 3.1.8:** Resultado da 5ª questão.  
Fonte: Autor através da câmera digital

Assim, esse diagnóstico inicial confirma a necessidade de se modificar a prática pedagógica no que diz respeito ao estudo das funções trigonométricas. É imprescindível que o estudo das funções trigonométricas tenha aplicações em situações concretas. Caso essa prática não seja mudada os professores terão enormes dificuldades em trabalhar essa temática e fazer com que os educandos compreendam conceitos fundamentais e essenciais para o estudo dessas funções.

Após a realização das questões objetivas, os educandos responderam a um questionário (ver anexo 3) sobre quais dificuldades eles encontraram em resolver as questões propostas na avaliação diagnóstica. Os resultados são mostrados no gráfico da Figura 3.1.9 abaixo, assim distribuídos: 47% dos alunos (14 alunos) afirmaram que não tinham nenhum conhecimento sobre o estudo das funções seno e cosseno; 33% (10 alunos) declararam que sentem dificuldades em encontrar o período; 10% (3 alunos) tiveram dificuldades em encontrar sua imagem, ponto máximo e mínimo; 7% (2 alunos) admitiram que não souberam encontrar lei de formação de uma função; e 3% (1 aluno) não encontrou dificuldades em resolver a avaliação diagnóstica.



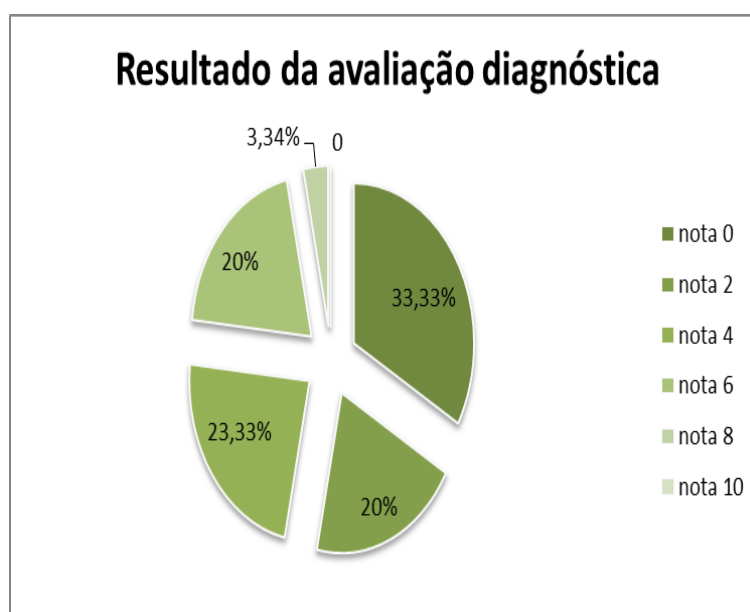
**Figura 3.1.9:** Dificuldades encontradas pelos alunos.  
Fonte: Pesquisa direta

Pode-se observar que o gráfico desse relato feito pelos alunos envolvidos nessa sondagem inicial retrata a realidade das dificuldades de aprendizagem no estudo das funções periódicas. Por isso, salienta-se que para se obter um maior aproveitamento no estudo das funções seno e cosseno essas duas atividades podem servir como suporte para amenizar as dificuldades encontradas, possibilitando aos professores uma ferramenta pedagógica que possa auxiliar na construção do processo de ensino aprendizagem.

Após a aplicação e análise dos resultados de cada questão da avaliação diagnóstica foi feita uma análise geral dos resultados obtidos pelos alunos envolvidos nesse trabalho.

De acordo com o gráfico da Figura 3.1.10, constata-se que 33,33% não acertaram as questões; 20% acertaram apenas uma questão; 23,33% dos alunos acertaram duas questões obtendo nota final quatro; 20% acertaram três questões e obtiveram nota seis; e 3,34% dos

alunos acertaram quatro questões e ficaram com nota oito. Com esse resultado, apenas 23,34% estariam aprovados já que a média exigida para que o aluno seja aprovado é seis. Diante do que foi observado nessa avaliação diagnóstica inicial, faz-se necessária uma intervenção imediata para amenizar essas enormes dificuldades encontradas pelos educandos no que se refere ao estudo das funções seno e cosseno e suas propriedades.



**Figura 3.1.10:** Resultado final da avaliação diagnóstica.  
Fonte: Pesquisa direta

Sabe-se que os conteúdos de trigonometria são explorados na maioria dos livros didáticos do Ensino Médio, mas não fica claro para os docentes para que serve este abundante material, deixando-os desmotivados, aumentando as dificuldades de aprendizagem. Em função disso, propõe-se o aprendizado dessas funções através do estudo das ondas sonoras com o uso do Fourier e do movimento das marés com o auxílio do Geogebra, isto é, situações concretas e criando estratégias para que os conteúdos estudados tenham uma abordagem mais contextualizada para os educandos melhorando a sua aprendizagem.

## 3.2 Estudo das funções seno e cosseno através das ondas sonoras

Após a realização do diagnóstico, iniciou-se o estudo das funções seno e cosseno através de situações envolvendo ondas sonoras. Essa atividade foi retirada e adaptada do livro de Laerte Fonseca ver [14] Funções Trigonométricas. Esse estudo foi iniciado através de um vídeo Desenhando Ondas disponível através do link [www.youtube.com/wacth](http://www.youtube.com/wacth), que



aborda conceitos de funções periódicas e soma dessas funções, mais precisamente, mostra de maneira bem clara e sucinta como a música se relaciona com a Matemática através do conceito de onda sonora e sua forma senoidal.

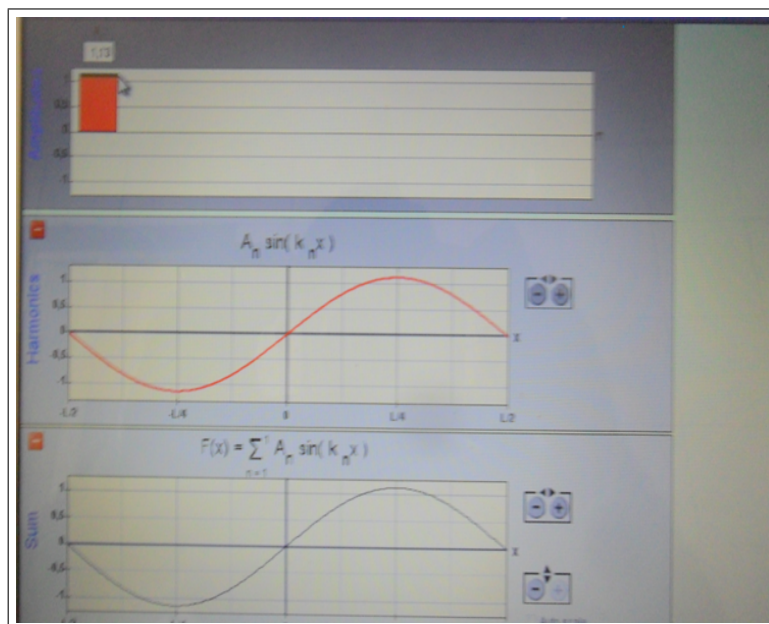
Para tornar a atividade mais interessante aos alunos, dois músicos profissionais relataram sobre como eles viam a importância da Matemática na música. O intuito de pontuar o que pensa um músico profissional sobre esse tema foi de mostrar aos educandos a presença da Matemática numa situação concreta e o quanto ela é importante para o desenvolvimento de qualquer área do conhecimento humano, até mesmo na música. Abaixo seguem os relatos dos músicos que comprovam essa importância.

Músico 1 – A música é arte de manifestar os sentimentos da alma através das notas musicais, ou seja, é algo divino, pois trata dos sentimentos da alma que é fonte de toda a inteligência humana. Resumindo, música é ritmo e som, uma combinação de sons executados em determinada cadência. A Matemática está presente na música desde a concepção mais fundamental do que é som e de que é ritmo, pois os sons com os quais podemos criar nossas músicas constituem o que chamamos de escalas musicais e são definidas através de relações matemáticas muito precisas que quando combinado de determinadas maneiras podem produzir resultados agradáveis aos nossos ouvidos. Essas relações matemáticas estão presentes através das vibrações sonoras que são a base da harmonia na superposição das notas musicais. A maneira como encadeamos os sons em nossas músicas também seguem regras com fundamentos matemáticos.

Músico 2 – A música é sentimento que são gerados através de sons e ritmos através das notas musicais gerando uma combinação de sons através das suas escalas musicais e com isso a importância da Matemática está relacionada com essas combinações que geram essas escalas musicais que produzem os sons que escutamos e o interessante é que esses elementos como som, ritmos estão presentes na maioria das crianças, onde muitos já tem percepção intuitiva da periodicidade do ritmo. Percebemos a presença da Matemática através desse repetição de ritmos, nas escalas musicais e suas composições e relações, portanto a Matemática exerce sim um papel fundamental como instrumento base da música, na divisão dos ritmos ou sons que são organizados em escalas, fórmulas e formas sonoras de realizar música, tornando a relação ente a matemática e a música inseparável.

Após mostrar esses relatos aos educandos, foi iniciada a primeira atividade através de um vídeo que mostra de maneira clara, dinâmica e objetiva a definição de período de uma função seno ou cosseno e como relacioná-la com a formação de um som através de sua frequência.

Em seguida, usou-se o *software* Fourier, para simular sons (ver Figura 3.2.1) que sejam representados pelas somas de várias funções seno e cosseno. Esse programa possibilita a criação de ondas de diferentes formas através da adição de várias funções seno ou cosseno, possibilitando visualizar frequências, períodos e lei de formação, além de fazer com que os educandos alterem esses parâmetros, verifiquem o comportamento dos gráficos e comparem suas expressões matemáticas.



**Figura 3.2.1:** Simulação de uma onda senoidal.

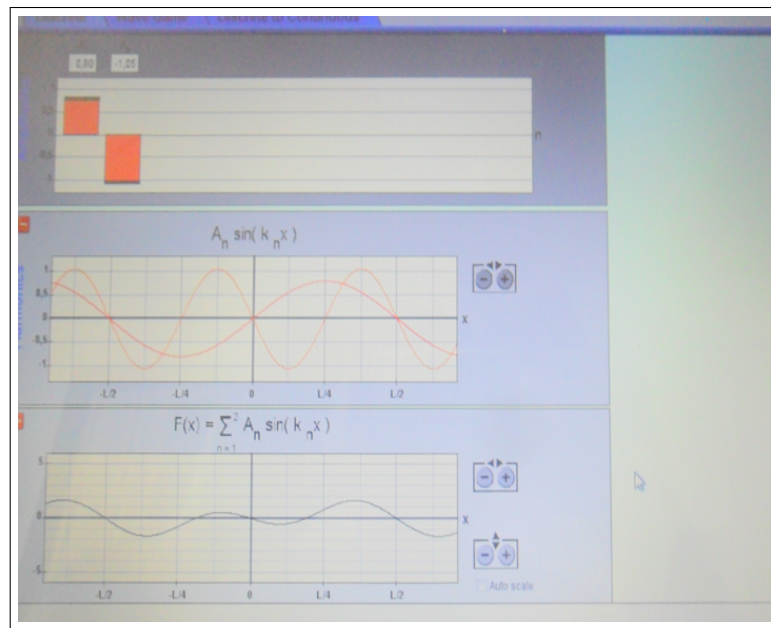
Fonte: Autor através da câmera digital

Esse *software* tem como objetivo principal estudar o conceito de ondas através das funções seno e cosseno e de favorecer a compreensão dos conceitos básicos para o estudo dessas funções.

Essa atividade foi realizada em sala de aula através da projeção de slides, uma caixa amplificadora e um notebook. Com essas ferramentas mostramos simulações de sons e suas representações gráficas correspondentes.

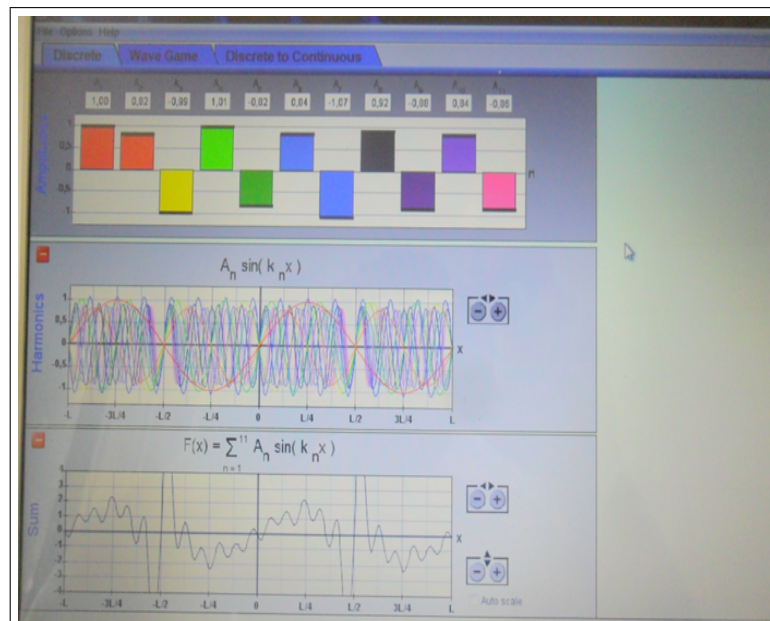
O programa oferece a oportunidade de se observar o comportamento de uma senóide na sua forma mais simples, através da manipulação da sua amplitude e obter a função correspondente a essa função harmônica simples.

Simulando-se no Fourier o som com duas funções seno e observa-se que aparecem na parte superior dois retângulos da Figura 3.2.2 que representam as amplitudes de cada função, sendo que a manipulação dessas amplitudes acarreta na mudança dessas funções e de seu som gerado. Tem-se duas funções definidas por :



**Figura 3.2.2:** Simulação de um som com duas senóides.  
Fonte: Autor através da câmera digital

- (i)  $f_1(x) = 0,80 \text{ sen}(k_1 x)$ , com  $k_1$  a frequência da onda.
- (ii)  $f_2(x) = -1,06 \text{ sen}(k_2 x)$ , com  $k_2$  a frequência da onda.



**Figura 3.2.3:** Som simulado com onze senóides.  
Fonte: Autor através da câmera digital

Essas funções são observadas na segunda janela e na terceira janela de visualização cujo gráfico gerado pela soma das duas funções, de maneira geral é dada por

$F(x) = \sum_1^n A_n \text{sen}(k_n x)$ , sendo  $A_n$  a amplitude e  $k_n$  a frequência.

A função gerada é dada por  $f(x) = 0,80 \text{sen}(k_1 x) - 1,06 \text{sen}(k_2 x)$ , sendo  $k_1$  e  $k_2$  frequências das referidas ondas sonoras.

O Fourier pode simular sons e suas representações gráficas com onze funções harmônicas. Na Figura 3.2.3 podemos visualizar essa simulação e cuja lei de formação é dado pela soma das onze funções seno.

Ao final dessa atividade com o Fourier, os alunos fizeram discussões a respeito dos assuntos abordados sobre o estudo das funções através das ondas sonoras. De acordo com os depoimentos coletados observa-se o quanto a dinâmica dessa atividade proporcionou um ambiente de aprendizagem mais atrativo, fazendo-os perceber o quanto a Matemática é importante para se entender as diversas situações concretas que foram apresentadas com o estudo das funções periódicas através das ondas sonoras. Eis os relatos que os educandos fizeram após a realização dessa atividade:

Aluno 1 – o estudo foi interessante e bom para o aprendizado, pois explicou como o som é formado e como são suas formas, e também ficou claro a questão das funções seno e cosseno, que possuem formas a partir do som;

Aluno 2 – Muito interessante, pois aprendemos para que serve as funções trigonométricas em nosso cotidiano e na música;

Aluno 3 – A aula foi interessante, pois mostra exemplos de atividades que são usados no cotidiano. É de extrema importância por que ajuda o aluno a criar interesse no assunto estudado em sala de aula;

Diante desses depoimentos, pode-se perceber que a maioria dos alunos acharam essa atividade interessante. Declararam que quando a associam a assuntos estudados em sala de aula fica mais fácil a sua compreensão.

### 3.3 Utilizando o Geogebra no estudo das funções circulares

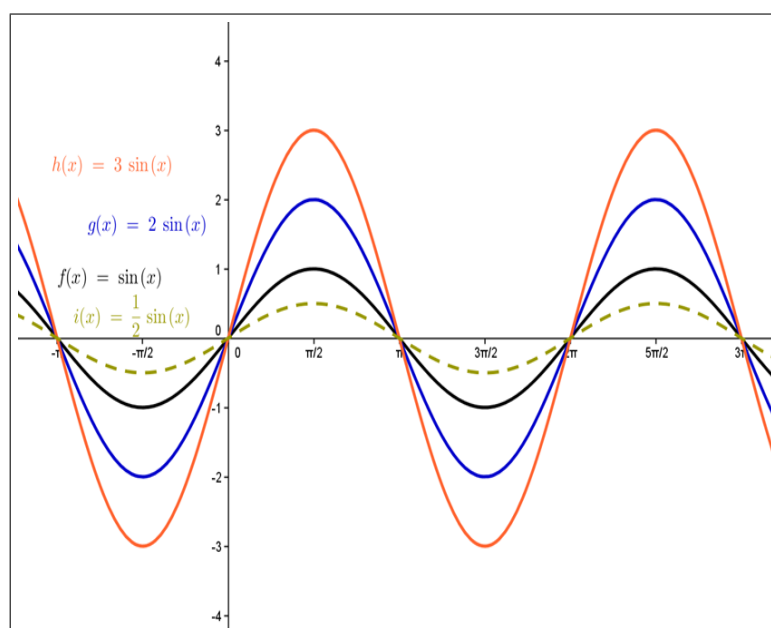
Essa etapa do trabalho tem como finalidade discutir e verificar o comportamento dos gráficos das funções seno e cosseno, observando os parâmetros de uma função definida por  $f(x) = B + A \cdot \text{sen}(Cx + D)$  manipulando-os e verificando as deformações gráficas decorrentes dessas mudanças.

Essas atividades foram realizadas no Laboratório de Informática Escolar, onde os alunos irão manipular esses parâmetros utilizando o software Geogebra, sendo que eles

terão um contato inicial com esse recurso, irão manusear livremente e conhecer seus principais comandos para que possam construir gráficos das funções definidas por  $f(x) = B + A \operatorname{sen}(Cx + D)$ .

Neste sentido, parte-se de uma sucessão arbitrária de valores e analisa-se cada parâmetro separadamente, atribuindo valores a esses coeficientes, através da realização de cinco atividades. O objetivo dessa atividade inicial com o software é fazer os alunos perceberem a influência dos parâmetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  na formação desses gráficos e suas possíveis modificações sofridas com as mudanças desses parâmetros.

O primeiro parâmetro analisado é a amplitude ( $A$ ) da função definida por  $f(x) = B + A \operatorname{sen}(Cx + D)$  e que mudanças ocorrem no comportamento do gráfico dessas funções. Com esse intuito de verificar e observar o que acontece com o gráfico de uma função seno o cosseno é que se realizou a seguinte atividade: digite no comando de entrada do Geogebra as seguintes funções:



**Figura 3.3.1:** Gráfico de  $f(x) = A \operatorname{sen}(x)$ .

Fonte: Autor construído com o geogebra

- (i)  $f(x) = \operatorname{sen} x$ , sendo  $B = 0, C = 1, D = 0$  e  $A = 1$ ;
- (ii)  $g(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x$ , sendo  $B = 0, C = 1, D = 0$  e  $A = 2$ ;
- (iii)  $h(x) = 3 \cdot \operatorname{sen} x$ , sendo  $B = 0, C = 1, D = 0$  e  $A = 3$ ;
- (iv)  $i(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$ , sendo  $B = 0, C = 1, D = 0$  e  $A = \frac{1}{2}$ ;

O objetivo principal dessa atividade é mostrar que o parâmetro  $A$  deforma o gráfico fazendo mudar sua imagem, ou seja, seus pontos máximo e mínimo e que relação se poderia estabelecer entre esse parâmetro e a lei de formação dessa função. Observando os gráficos plotados no Geogebra na Figura 3.3.1 vê-se claramente essa deformação, porém o seu período se mantém constante.

Tem-se na Figura 3.3.1 acima as seguintes funções definidas por  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = 2 \sin x$ ,  $h(x) = 3 \sin x$  e  $i(x) = \frac{1}{2} \sin x$ . Observando esses gráficos verifica-se claramente que o período de cada um deles é dado por  $2\pi$ , e os educandos puderam verificar que a mudança parâmetro  $A$  não muda o período, mas, esse parâmetro estica a função, acarretando na mudança de seus pontos máximo e mínimo, ou seja, na sua imagem. Logo, que relação se pode estabelecer entre esse parâmetro com a sua lei de formação? Os alunos fizeram suas conjecturas e a maioria concluiu que o valor desse parâmetro para as funções do tipo  $f(x) = A \sin x$  era o coeficiente de  $\sin x$ . Com essa atividade definiu-se a amplitude( $A$ ) de uma onda como sendo à distância do eixo de simetria até o ponto máximo ou mínimo, que de maneira geral pode ser calculado pela seguinte relação

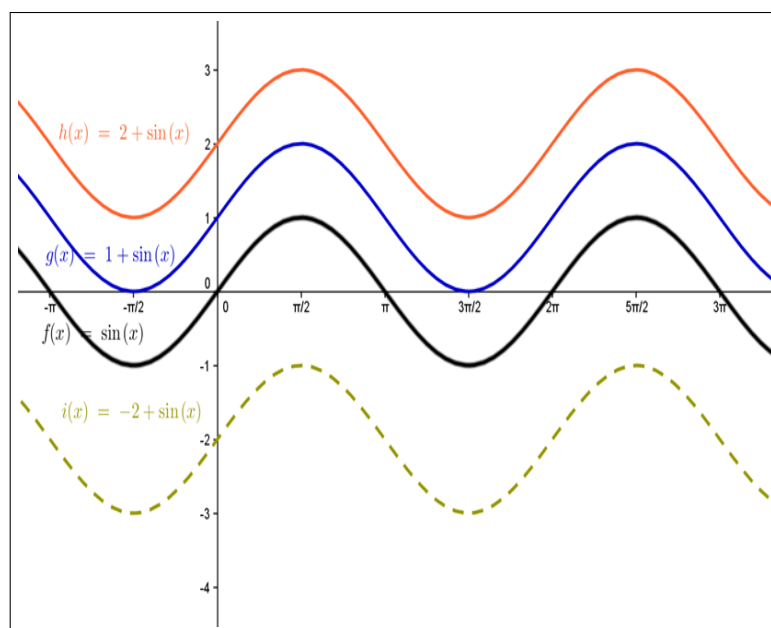
$$A = \left( \frac{y_{max} - y_{min}}{2} \right) \quad (3.3.1)$$

Após a análise do parâmetro  $A$ , e seguindo a mesma estratégia de execução, os alunos digitaram as seguintes funções:

- (i)  $f(x) = \sin x$ , sendo  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$  e  $D = 0$ .
- (ii)  $g(x) = 1 + \sin x$ , sendo  $A = 1$ ,  $B = 1$ ,  $C = 1$  e  $D = 0$ .
- (iii)  $h(x) = 2 + \sin x$ , sendo  $A = 1$ ,  $B = 3$ ,  $C = 1$  e  $D = 0$ .
- (iv)  $i(x) = -2 + \sin x$ , sendo  $A = 1$ ,  $B = -2$ ,  $C = 1$  e  $D = 0$ .

e com o auxílio do Geogebra fizeram as suas observações e conclusões sobre o parâmetro  $B$ .

A observação desses gráficos (ver Figura 3.3.2) levou a maioria dos alunos a perceber que as funções do tipo  $f(x) = B + A \sin(Cx + D)$  para  $A = 1$ ,  $C = 1$  e  $D = 0$  não mudam o período dessas funções, ou seja, o período é sempre  $2\pi$ . Outra observação feita é que os gráficos se movimentam paralelamente em relação ao eixo  $x$ , ou seja, a alteração desse parâmetro movimenta o gráfico em  $B$  ou  $-B$  unidades em relação ao eixo das ordenadas e como determinar esse parâmetro através de sua imagem?



**Figura 3.3.2:** Funções do tipo  $f(x) = B + \text{sen}(x)$ .

Fonte: Autor construído com o geogebra

Um dos objetivos dessa atividade é mostrar como esse parâmetro influencia no comportamento dos gráficos gerados e encontrar uma relação entre esse parâmetro com a imagem da função. Assim, pode-se verificar que a imagem da função  $f(x) = B + A \text{sen}(Cx + D)$  é dada por  $[-A + B, A + B]$ .

Depois da constatação de que os parâmetros  $A$  e  $B$  não mudam o período da função, faz-se necessário analisar qual parâmetro mudará o período de uma função seno ou cosseno. Com isso, será analisado junto com os alunos o parâmetro  $C$  e como se comporta graficamente as funções quando se altera o valor desse coeficiente. Usando novamente o Geogebra, digitam-se as funções abaixo:

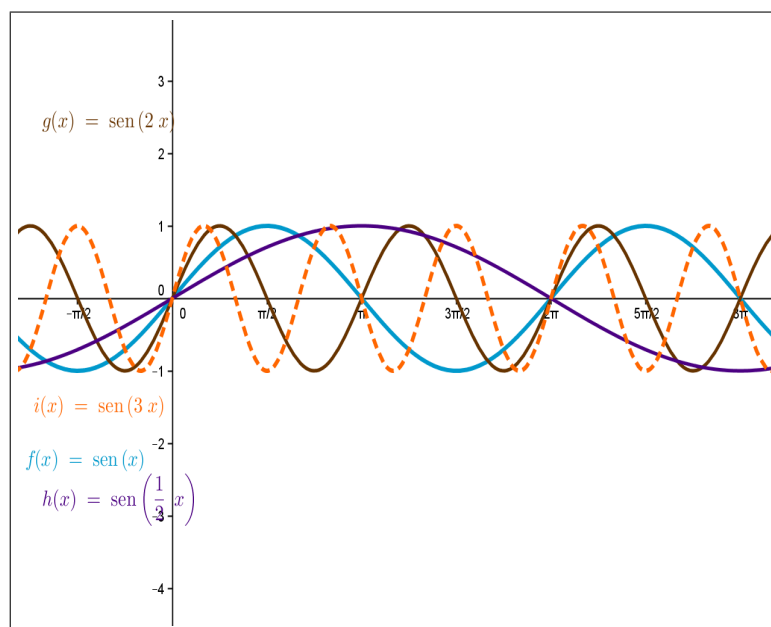
- (i)  $f(x) = \text{sen } x$ , para  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$  e  $D = 0$
- (ii)  $g(x) = \text{sen}(2x)$ , para  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 2$  e  $D = 0$
- (iii)  $h(x) = \text{sen}(\frac{1}{2}x)$ , para  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = \frac{1}{2}$  e  $D = 0$
- (iv)  $i(x) = \text{sen}(3x)$ , para  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 3$  e  $D = 0$

Através da observação dos gráficos gerados os alunos puderam constatar que a imagem não foi alterada, mas houve um esticamento ou encolhimento relacionado ao eixo  $x$ , influenciando no período da função.

Sabe-se que o período é o nome dado ao menor valor positivo  $p$  para o qual é verdade que  $f(x) = f(x + p)$ . Assim, verifica-se através dos gráficos gerados pelo Geogebra que o período de  $f(x) = \text{sen } x$  é igual a  $2\pi$  e portanto  $C = 1$ ; para  $g(x) = \text{sen}(2x)$  temos um período igual a  $\pi$ , onde  $C = 2$ ; para a função  $h(x) = \text{sen}(\frac{x}{2})$  o seu período é igual a  $4\pi$  com  $C = \frac{1}{2}$  e finalmente para  $i(x) = \text{sen}(3x)$  o seu período é igual a  $\frac{2\pi}{3}$ , sendo  $C = 3$ . Assim, os alunos puderam perceber que o período de uma função seno ou cosseno pode ser determinado usando a relação:

$$C = \frac{2\pi}{p} \quad (3.3.2)$$

com  $p \neq 0$ .



**Figura 3.3.3:** Gráfico da função  $f(x) = \text{sen}(Cx)$ .

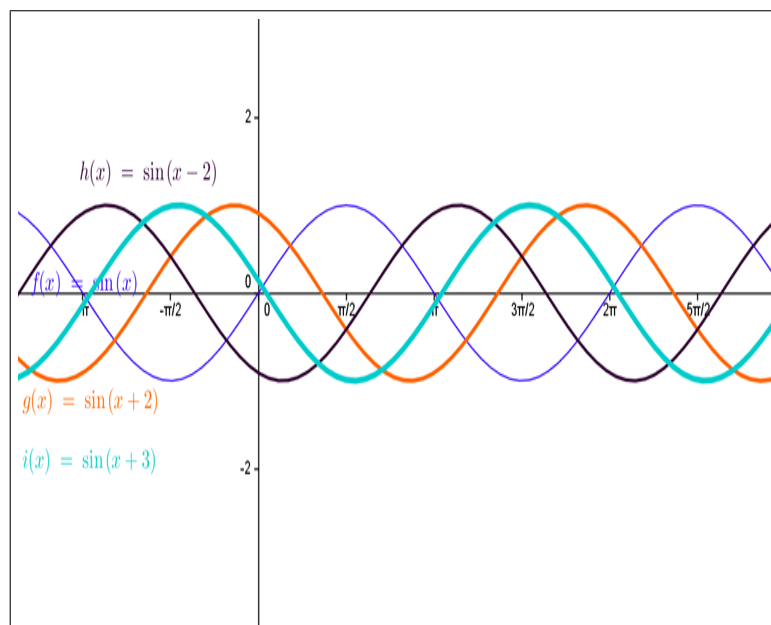
Fonte: Autor contruído com o Geogebra

Usando a mesma estratégia de observação dos parâmetros anteriores, analisou-se a influencia do parâmetro  $C$  no comportamento dos gráficos das funções  $f(x) = B + A \text{sen}(Cx + D)$ . Com isso, digitam-se as seguintes funções do tipo  $f(x) = B + A \text{sen}(Cx + D)$  para  $A = 1$ ,  $B = 0$  e  $C = 1$

- (i)  $f(x) = \text{sen } x$ , sendo  $D = 0$ ;
- (ii)  $g(x) = \text{sen}(x + 2)$ , sendo  $D = 2$ ;
- (iii)  $h(x) = \text{sen}(x - 2)$ , sendo  $D = -2$ ;
- (iv)  $i(x) = \text{sen}(x + 3)$ , sendo  $D = 3$ .



Novamente não há influências desse parâmetro sobre a imagem da função (ver Figura 3.3.4), no entanto, acontece um deslocamento horizontal em relação à função  $f(x) = \sin x$ . Na função  $g(x) = \sin(x+2)$ , o deslocamento é de duas unidades para a direita em relação a função  $f(x) = \sin x$ , em  $h(x) = \sin(x-1)$  o deslocamento é de uma unidade à esquerda de  $f(x) = \sin x$  e  $i(x) = \sin(x+3)$  acontece um deslocamento de três unidades para a direita.



**Figura 3.3.4:** Gráfico da função  $f(x) = \sin(x + D)$ .

Fonte: Autor construído com o geogebra

Essa atividades de observação dos parâmetros  $A, B, C$  e  $D$  das funções do tipo  $f(x) = B + A \sin(Cx + D)$  no Geogebra facilitou a compreensão dos conceitos de período, imagem, domínio, valor máximo, valor mínimo, amplitude o que seria praticamente inviável se tivéssemos utilizados quadro e giz.

Observa-se que a participação dos educandos é mais intensa, a dinâmica oferecida pela manipulação do software substitui a prática tradicional adotada pela maioria dos professores sem perder rigor científico dos conceitos e propriedades, ou seja, o recurso tecnológico torna-se um facilitador da aprendizagem. A Figura 3.3.5 mostra essa interação entre os alunos e o recurso utilizado para reconhecimento desses parâmetros.

O reconhecimento dos parâmetros das funções servirão de suporte para a realização da próxima atividade, movimento das marés, além de fornecer um embasamento teórico sobre definição de período e imagem de uma função, requisitos fundamentais para o estudos das funções periódicas e como as ondas sonoras podem constituir uma alternativa de aliar

a teoria à prática e tornar o estudo das funções seno e cosseno mais atrativo e assim constituir uma ferramenta indispensável para dar significação aos conteúdos abordados em sala de aula.



**Figura 3.3.5:** *Atividade no laboratório de informática.*

Fonte: Autor com câmera digital

### 3.4 O movimento das marés e as funções seno e cosseno através do GeoGebra.

Para o desenvolvimento dessa atividade usou-se como ferramenta tecnológica o software GeoGebra e os conceitos verificados sobre imagem, período, deslocamento horizontal e vertical através das funções do tipo  $f(x) = B + A\text{sen}(Cx + D)$  ou  $f(x) = B + A\text{cos}(Cx + D)$  para encontrar uma função matemática que expresse o movimento das marés da Praia de Canoa Quebrada em um determinado dia.

A princípio, foi proposto aos educandos se seria possível fazer a estimativa da altura da maré de um determinado dia em uma determinada hora do dia. Qual função matemática pode-se obter para a altura de uma maré em uma determinada hora do dia? Que horas do dia poderia ter uma maré de determinada altura?

Sabe-se que os movimentos das marés são também considerados movimentos periódicos, e com essa hipótese pode-se construir uma função seno ou cosseno. Mas, como chegar a essa função? O que é preciso saber? Como determinar essa altura?.

Para se chegar a essa solução, foi proposto aos alunos que pesquisassem sobre como acontecem o movimento do vai e vem das marés e a tábua das marés da Praia de Canoa Quebrada referente ao dia 10 de Abril de 2013. Através desses dados coletados deu-se início ao estudos das funções através do movimento da marés e chegou-se à determinação dessa função que relaciona a altura com o tempo. A Tabela 3 mostra a tábua das marés referente ao dia 10 de Abril de 2013.

Hora	Tipo	Altura (m)
3:50	1 <sup>a</sup> maré	2,3
10:00	2 <sup>a</sup> maré	0,2
16:10	3 <sup>a</sup> maré	2,5
22:25	4 <sup>a</sup> maré	0,3

**Tabela 3:** Tábua da mares da praia de Canoa Quebrada.  
Fonte: <http://www.tabuademares.com/br/ceara/aracati>

Analisando os dados coletados, os alunos observaram que essa tábua tem duas marés altas e duas marés baixas diferentes. Para construir um modelo que se aproxime da realidade dessa situação era preciso fazer alguns ajustes. Um desses ajustes foi calcular a média aritmética das marés altas e das marés baixas e deixar a grandeza tempo em horas. Com isso, obtém-se:

$m_a = \frac{m_1+m_3}{2} = \frac{2,3+2,5}{2} = 2,4$ , sendo  $m_a$  = maré alta e  $m_1$  e  $m_3$  as 1<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> marés , respectivamente.

$m_b = \frac{m_2+m_4}{2} = \frac{0,2+0,3}{2} = 0,25m$ , sendo  $m_b$  = maré baixa e  $m_2$  e  $m_4$  as 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> marés, respectivamente.

$$3h50min = 3h + \frac{50}{60}h = 3h + 0,83h = 3,83h.$$

$$16h10min = 16h + \frac{10}{60}h = 16h + 0,16h = 16,16h.$$

$$22h25min = 22h + \frac{25}{60}h = 22h + 0,41h = 22,41h.$$

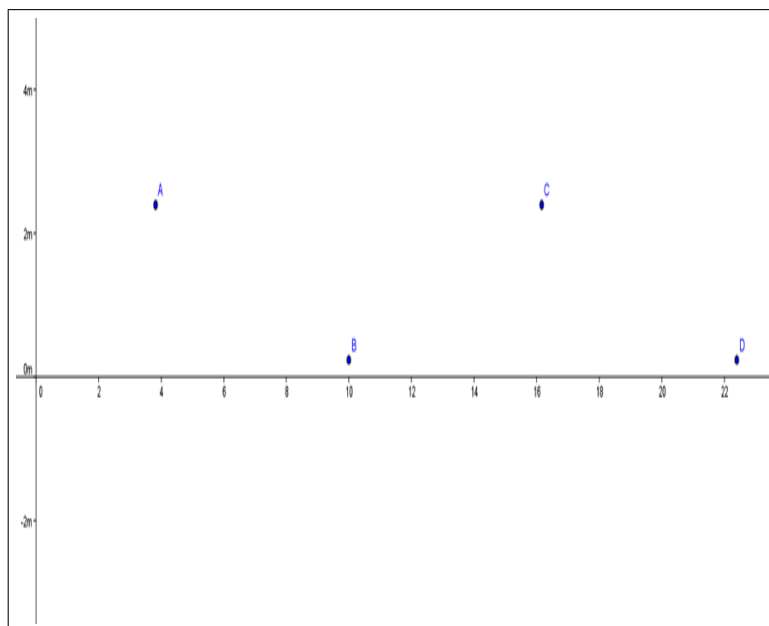
Com esses novos dados obtém-se a Tabela 4:

tempo (horas)	altura da maré (m)
3,83	2,4
10	0,25
16,16	2,4
22,41	0,25

**Tabela 4:** Dados aproximados das marés alta e baixa

Com o auxílio do Geogebra marca-se cada ponto obtido, onde se tem  $A(3.83, 2,4)$ ,

$B(10, 0.25)$ ,  $C(16.16, 2, 4)$  e  $D(22.41, 0, 25)$ . Observando esses pontos na Figura 3.4.1 pode-se concluir que o modelo de função seno ou cosseno terá como imagem  $[0.25, 2, 4]$ .



**Figura 3.4.1:** Localização das marés no plano cartesiano.

O objetivo é encontrar uma lei de formação, fazendo com que seu gráfico passe pelos pontos acima. Para que se possa chegar a essa função, precisamos encontrar os parâmetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , de acordo com o que foi estudado no capítulo anterior com o auxílio do Geogebra.

A amplitude  $A$  pode ser calculada usando a relação dada por

$$A = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{2,4 - 0,25}{2} = \frac{2,15}{2} = 1,075 \quad (3.4.1)$$

Com a determinação desse valor tem-se uma função definida por:

$$f(x) = B + 1,075 \text{sen}(Cx + D) \quad (3.4.2)$$

Os parâmetros  $A$  e  $B$  modificam apenas a imagem da função seno ou cosseno e o parâmetro  $B$  determina o deslocamento em relação ao eixo  $y$  e pode ser calculado através da igualdade

$$[1,075 + B, 1,075 + B] = [0.25, 2.4] \quad (3.4.3)$$

pois o valor máximo de  $\text{sen}(Cx + D)$  é igual a 1 e seu valor mínimo  $-1$ . Resolvendo

essa equação, encontra-se o valor de  $B$ , ou seja,

$$-1,075 + B = 0,25 \quad (3.4.4)$$

$$B = 1,325 \quad (3.4.5)$$

Com a determinação desse parâmetro fica-se com a função definida por

$$f(x) = 1,325 + 1,075 \operatorname{sen}(Cx + D) \quad (3.4.6)$$

Observa-se que os parâmetros  $A$  e  $B$  mudam a imagem de uma função seno ou cosseno. Para continuar na busca da função que representará a altura da maré em função do tempo, deve-se encontrar o parâmetro  $C$ . Verificou-se anteriormente que ele modifica apenas o período da função, ou seja, a imagem não sofrerá nenhuma influência na alteração desse coeficiente. Para determiná-lo usa-se a seguinte relação, isto é,

$$C = \frac{2\pi}{p} \quad (3.4.7)$$

com  $p \neq 0$ .

Observando o comportamento do movimento das marés, o período é determinado entre uma maré alta e a outra maré alta ou entre uma maré baixa e a outra maré baixa, com essa informação pode-se dizer que o período de nossa função periódica é dado por  $p = 16,16 - 3,83 = 12,33h$  (entre as marés altas) e  $p = 22,41 - 10 = 12,41$ . Logo, com períodos diferentes, deve-se fazer um novo ajuste para se obter um modelo que realmente se aproxime da realidade, ou seja, calcula-se a média aritmética desses períodos, ou seja,

$$p = \frac{12,33 + 12,41}{2} = \frac{24,74}{2} = 12,37 \quad (3.4.8)$$

De acordo com a relação entre o período e o parâmetro  $C$ , calcula-se esse valor, logo,

$$C = \frac{2\pi}{12,37} \quad (3.4.9)$$

A função será definida por

$$f(x) = 1,325 + 1,075 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12,37}x + D\right) \quad (3.4.10)$$

Diante da função definida acima, falta encontrar o parâmetro  $D$ . Conforme foi visto esse valor não muda a imagem e nem o período da função, a alteração que o gráfico sofre

é apenas o deslocamento em relação ao eixo horizontal do sistema cartesiano. Para se determinar esse deslocamento é preciso ter um ponto qualquer que pertença ao gráfico dessa função definida. Sabe-se que um dos pontos é dado por  $(10, 0.25)$ . Substituindo-se o valor de  $x$  por 10 e  $f(x)$  por 0,25 na função, resulta a seguinte igualdade:

$$0,25 = 1,325 + 1,075 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12,37} \cdot 10 + D\right) \quad (3.4.11)$$

$$0,25 - 1,325 = 1,075 \operatorname{sen}\left(\frac{20\pi}{12,37} + D\right) \quad (3.4.12)$$

$$-1,075 = 1,075 \operatorname{sen}\left(\frac{20\pi}{12,37} + D\right) \quad (3.4.13)$$

$$1 = \operatorname{sen}\left(\frac{20\pi}{12,37} + D\right) \quad (3.4.14)$$

Sabe-se que  $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$ .

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{20\pi}{12,37} + D\right) \quad (3.4.15)$$

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{20\pi}{12,37} + D \quad (3.4.16)$$

$$D = \frac{3\pi}{2} - \frac{20\pi}{12,37} \quad (3.4.17)$$

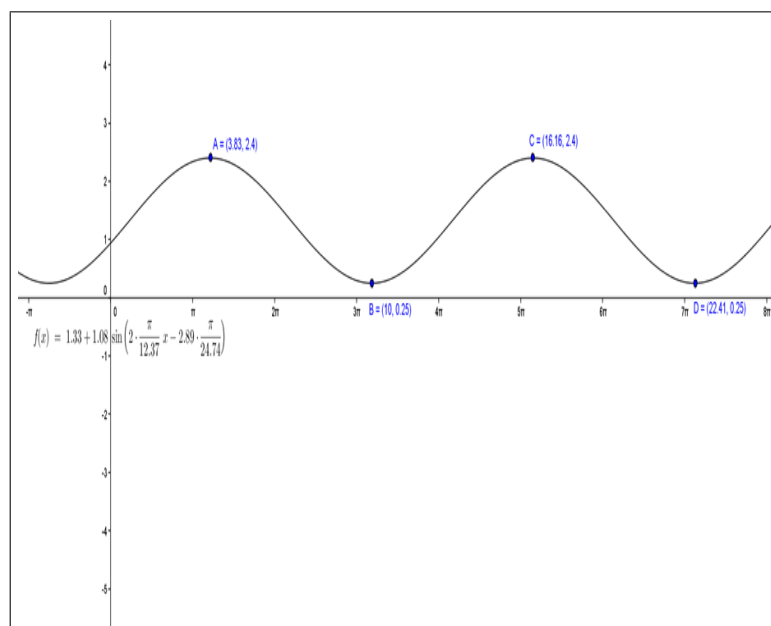
$$D = -\frac{2,89\pi}{24,74} \quad (3.4.18)$$

Com esse valor encontrado fica-se com a função que define as marés para esse dia dada por

$$f(x) = 1,325 + 1,075 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12,37} \cdot x - \frac{2,89}{24,74}\right), \quad (3.4.19)$$

com  $0 \leq x \leq 24$ .

Observando o gráfico da Figura 3.4.2 construído com o auxílio do Geogebra verifica-se que esse modelo passa exatamente pelos pontos iniciais do problema levantado.



**Figura 3.4.2:** Modelo matemático das marés.

Agora, será construído o gráfico da função cosseno para fazer uma comparação com a função seno obtida. Para isso, retorna-se ao parâmetro  $D$  determinado na função seno, seguindo a mesma estratégia utilizada obtendo as seguintes equações equivalentes, tendo como referência o ponto  $B(10, 0,25)$ .

$$0,25 = 1,325 + 1,075 \cos\left(\frac{2\pi}{12,37} \cdot 10 + D\right) \quad (3.4.20)$$

$$0,25 - 1,325 = 1,075 \cos\left(\frac{20\pi}{12,37} + D\right) \quad (3.4.21)$$

$$-1,075 = 1,075 \cos\left(\frac{20\pi}{12,37} + D\right) \quad (3.4.22)$$

$$1 = \cos\left(\frac{20\pi}{12,37} + D\right) \quad (3.4.23)$$

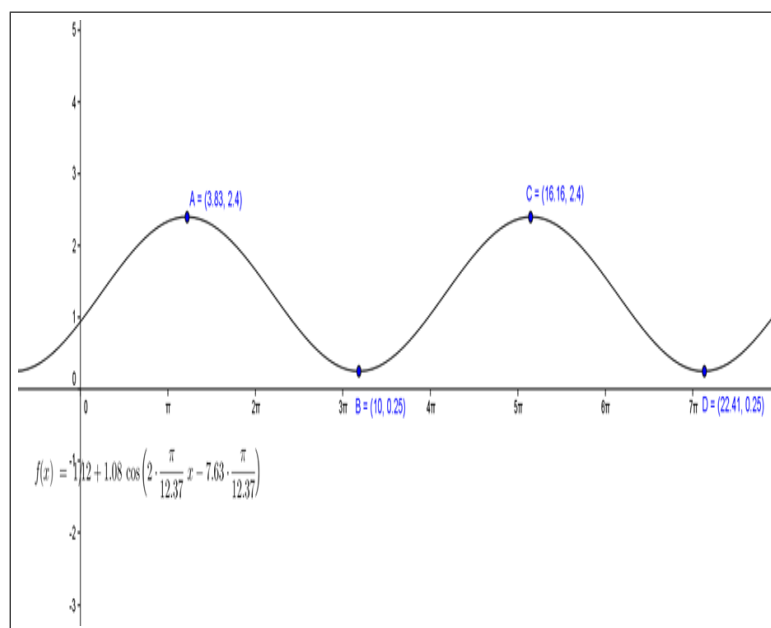
Sabe-se que  $\cos \pi = -1$ .

$$\cos \frac{3\pi}{2} = \cos\left(\frac{20\pi}{12,37} + D\right) \quad (3.4.24)$$

$$\pi = \frac{20\pi}{12,37} + D \quad (3.4.25)$$

$$D = \pi - \frac{20\pi}{12,37} \quad (3.4.26)$$

$$D = -\frac{7,63\pi}{12,37} \quad (3.4.27)$$



**Figura 3.4.3:** Modelo matemático das marés através da função cosseno.

O modelo para o movimento das marés será dado por

$$f(x) = 1,325 + 1,075 \cos\left(\frac{2\pi}{12,37} \cdot x - \frac{7,63}{12,37}\right) \quad (3.4.28)$$

com  $0 \leq x \leq 24$ .

Observe o gráfico da Figura 3.4.3 e novamente se verifica que os pontos iniciais do modelo pertencem ao gráfico da função cosseno acima.

Com o modelo pronto e verificado graficamente, pode-se resolver diversas situações problemas: determinar a altura da maré em certa hora do dia, assim como a hora referente à altura da maré, entre outros.

A partir do desenvolvimento dessa atividade pode-se trabalhar diversos conteúdos paralelamente ao estudo das funções seno e cosseno, como equações trigonométricas, inequações trigonométricas. Percebeu-se que a participação e o desempenho dos alunos



foram satisfatórios, pois eles interagiram, levantando hipóteses durante a execução dessa atividade.

### 3.5 Análise da avaliação final

Essa atividade confirma através da análise de gráficos que essas estratégias utilizadas baseadas nos princípios da Modelagem Matemática e na utilização de recursos tecnológicos como o Fourier e o Geogebra promovem um avanço significativo na aprendizagem das funções circulares.

A avaliação aplicada tem cinco questões (ver anexo 4) que evidenciam os principais conceitos trabalhados na execução dessas atividades, tais como reconhecimento da imagem, período e uma função, interpretação da lei de formação de uma função, encontrar a lei de formação de uma função, entre outras propriedades.

A análise será feita considerando apenas o resultado final de cada aluno na avaliação e cujos resultados serão colocados no gráfico abaixo.

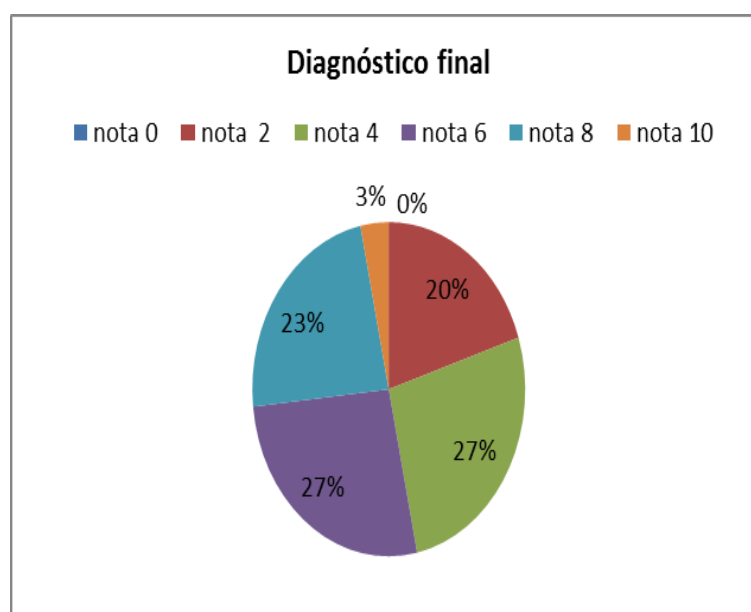


Figura 3.5.1: Resultado final.

Observa-se nesse gráfico que nenhum aluno obteve nota zero; 20% dos alunos obtiveram nota 2; 27% nota quatro; 27% nota seis; 23% nota 8 e 3% alcançaram a nota máxima. Assim, com a realização dessa avaliação final 53 % dos alunos estariam aprovados, pois a média exigida para aprovação é seis e 47% reprovados.

Apesar do índice de reprovação alto, constatamos que houve uma melhoria na aprendizagem se comparar com os resultados obtidos na avaliação diagnóstica, quando apenas 23,34% dos alunos estariam aprovados, representando um aumento percentual de 127,07%.

## 4 *Considerações finais*

Com base nas atividades desenvolvidas, foi possível verificar que a teoria e a prática, aliadas, propiciaram um ambiente de interação, favorecendo a participação e a aprendizagem dos alunos envolvidos. Os problemas e atividades propostas sobre as funções seno e cosseno através de situações concretas que abordaram o movimento das marés e as ondas sonoras, vistas, predominantemente, sob um olhar matemático diferenciado, induziram os estudantes a se sentirem motivados e a participarem das discussões com descontração, com liberdade maior para revelar suas ideias, saberes e questionamentos acerca do assunto.

Para se comprovar a eficiência da aplicação dessas atividades, foi realizada uma avaliação final mostrando o quanto houve melhoria na aprendizagem das funções seno e cosseno através de situações práticas, pois, 53% dos alunos estariam aprovados, comparados com os 23,34% de aprovação na sondagem inicial, resultando um aumento percentual de 127,07%.

O que se pode observar é que há necessidade de inovar a didática de ensino viabilizando melhor assimilação dos conteúdos estudados e melhorar a utilização dessas atividades propostas para que se atinjam um índice maior de aprendizagem dos educandos.

Os alunos relataram em seus depoimentos que, com a manipulação do *software* Fourier e a visualização dos sons expostos nos gráficos, o ensino das funções circulares torna-se mais fácil, eficiente e prazeroso quando visto através do modelo matemático do movimento das marés. Pode-se constatar que os conceitos sobre período, imagem, frequência e amplitude de uma onda estão diretamente relacionados a situações vivenciadas por eles no cotidiano, ficando mais fácil a assimilação e aprendizagem do conteúdo estudado em sala de aula.

Apesar de se conseguir mostrar através das avaliações realizadas que houve avanços na aprendizagem dos educandos, ainda há enormes dificuldades na execução dessas atividades tais como: a falta de base de alguns educandos, a exploração dos recursos de forma mais dinâmica, principalmente o *software* Fourier e a inexperiência do pesquisador em desenvolver atividades que fujam dos critérios tradicionais no ensino da Matemática.

Muitos problemas de aprendizagem podem ser solucionados, ou pelo menos minimizados, com o auxílio da Modelagem Matemática, de recursos tecnológicos e de situações problemas concretas, uma vez que essas dinâmicas podem ser usadas de diversas maneiras, em diferentes níveis de aprendizagem e em outros assuntos da Matemática. O estudo das funções circulares através do movimento das marés e das ondas sonoras pode ser uma alternativa que pode contribuir para melhor contextualização do conteúdo, favorecer o estudo em grupo, manipulação de mídias tecnológicas e também para uma compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula.

O professor desempenha um papel fundamental no processo de aprendizagem, sendo responsável pelo desenvolvimento e desempenho de cada aluno. Neste contexto, é função do professor despertar o interesse do aluno, mostrando que ele é capaz de ser agente na construção do conhecimento e com isso contribuir significativamente para a melhoria da qualidade do processo ensino aprendizagem.

A Matemática é vista como uma disciplina difícil, fazendo com que a maioria dos alunos apresente dificuldades de aprendizagem, gerando assim um desinteresse pela matéria. A utilização de métodos eficazes e de recursos tecnológicos faz a Matemática mais simples e acessível ao aluno, tornando as aulas mais dinâmicas e prazerosas. Expandir o pensamento e o raciocínio lógico do aluno consiste no desafio de despertar nele o interesse pela Matemática.

Nessa perspectiva, é fundamental que novas estratégias de aprendizagem como o uso de recursos tecnológicos sejam incorporados e aperfeiçoados por outros professores com o objetivo de se criar uma nova cultura e uma nova visão acerca das possibilidades de se trabalhar a Matemática, de forma criativa, prazerosa, motivadora. Neste sentido, o trabalho executado nessas atividades desenvolvidas constitui uma excelente estratégia pedagógica, no entanto, ressalta-se a relevância de se buscar alternativas em trabalhos futuros, interagindo com outras áreas do conhecimento, como a Física para que haja uma melhoria na aprendizagem, mostrando que é possível usar esses recursos sem comprometer o rigor científico que lhe é inerente.

Espera-se, dessa forma, que este trabalho possa contribuir para professores preocupados com a melhoria do ensino das funções trigonométricas, em particular as funções seno e cosseno.

## *Referências*

- [1] ALMEIDA, LOURDES WERLE DE. Modelagem Matemática na Educação Básica/Loures Werle de Almeida, Karina Pessoa da Silva, Rodolfo Eduardo Verman. – São Paulo: Contexto,2012
- [2] ARACATI [pt.wikipedia.org/wiki/Aracati](http://pt.wikipedia.org/wiki/Aracati)
- [3] BEAN, D. O que é modelagem matemática?Educação matemática em revista.São Paulo. 2001.
- [4] BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática na sala de aula. Perspectiva, Erechim (RS), v. 27, n. 98, p. 65-74, junho/2003. Disponível em <http://www.uefs.br/nupemm/perspectiva.pdf>; Acesso em 03 de abril/2013.
- [5] BASSANEZI,RODNEY CARLOS.Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática:uma nova estratégia.Rodney Carlos Bassanezi.3.ed.São Paulo:Contexto,2011.
- [6] BIEMBENGUT, M.S.; HEIN, N. Modelagem Matemática no Ensino. 3. Ed. São Paulo: Contexto, 2003.
- [7] BRASIL, Secretaria de ensino médio e tecnológico. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio, Brasília; MEC/SEMTEC, 2000.
- [8] BRASIL, Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Conselho escolar: democratização da escola e construção da cidadania/elaboração Ignez Pinto Navarro... [et. al] – Brasília : MEC, SEAB, 2004. 56p. II (Programa Nacional de Fortalecimento dos Conselhos Escolares, caderno 1).
- [9] BRASIL, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, nº 7.398 de 1995.
- [10] BRAGA, J. L. 1999. Meios de Comunicação e linguagens: a questão educacional e a interatividade. Linhas Críticas, Brasília DF. Jul a dez/99
- [11] CALDEIRA,A.D.Uma proposta em etnomatemática na Zona Rural da Fazenda Angélica de Rio Claro.Dissertação de mestrado em Educação Matemática.UNESP/RC
- [12] CHIAVENATO, Idalberto. Teoria geral da administração. 6. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2001, p 251.
- [13] D'AMBRÓSIO,Ubiratan.Etnomatemática.Arte ou técnica de explicar ou conhecer.São Paulo:Ed.Ática,1990.

- 
- [14] FONSECA, Laerte S. Funções trigonométricas: elementos "de" e "para" uma engenharia didática/Laerte Fonseca-São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012
- [15] STEWART, J. Cálculo. Vol. 2. 6ed, Thomson Pioneira, 2010.
- [16] ,E.S. História da Trigonometria. São Paulo: Atual, 1992. (Coleção Tópicos da História da Matemática para a sala de aula; v.5.
- [17] LEITHOLD, Louis. O Cálculo com geometria analítica, 2o edição - Ed. Harper & Row do Brasil Ltda. São Paulo, 1982.
- [18] LIMA, ELON LAGES. A matemática do ensino médio. volume 1/Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cesar Morgado. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM 2006
- [19] LIMA, ELON LAGES. Temas e Problemas 1/Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cesar Morgado. Rio de Janeiro: SBM 2001
- [20] MEYER, JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO. Modelagem em Educação Matemática/ João Frederico da Costa Azevedo Meyer, Ademir Dinizetti Caldeira, Ana Paula dos Santos Malheiros – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.
- [21] PENTEADO, M.G.; BORBA, M.C (org). A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho D'água.
- [22] PONTE, J. P. Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios? Revista Ibero- Americana de Educación, 2000, n.24. p.63-90.
- [23] TIC - Tecnologia da Informação e da Comunicação na educação. Computadores e educação. (Obra organizada pela Universidade Luterana do Brasil (ULBRA). Curitiba: Ibpx, 2007.

# *Anexos*

## **Anexo 1 - Aplicações das funções circulares**

Enumere uma situação prática que pode ser associado as estudo das funções trigonométrica.

## **Anexo 2 - Avaliação diagnóstica**

01) Qual é período da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -2 \operatorname{sen} x$  ?

a)  $2\pi$

b)  $-2\pi$

c)  $-2$

d)  $2$

02) Qual é o valor máximo da função definida por  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \cos(\frac{x}{3})$  ?

a)  $1$

b)  $\frac{1}{3}$

c)  $0$

d)  $3$

03) Uma função trigonométrica tem como valor mínimo  $-3$  e valor máximo  $3$ . Qual das funções abaixo possui esses valores?

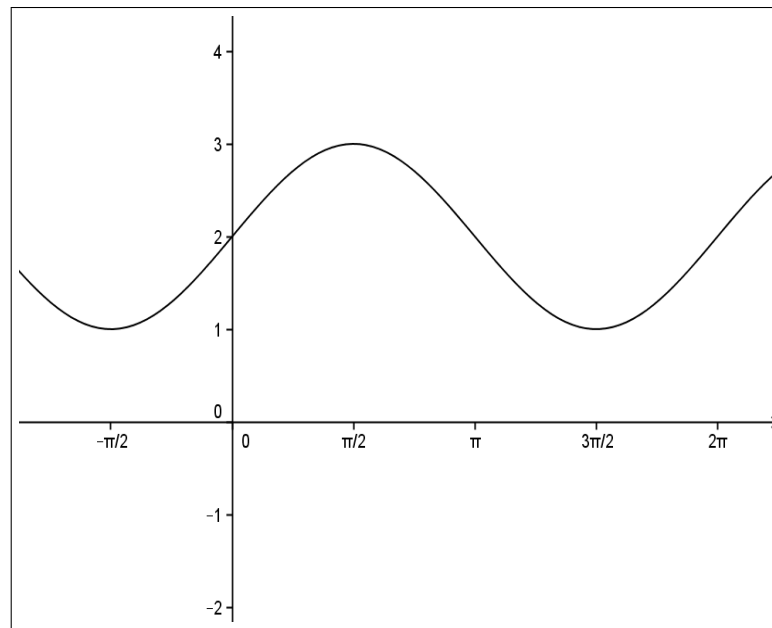
a)  $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$

b)  $f(x) = \cos(3x)$

c)  $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$

d)  $f(x) = 3 \cdot \cos x$

O gráfico acima é referente as questões 4 e 5



04) Qual é o período dessa função representada pelo gráfico acima?

- a) 3
- b) 4
- c)  $\pi$
- d)  $2\pi$

05) Qual é a lei de formação da função representada pelo gráfico acima?

- a)  $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$
- b)  $f(x) = 3 \cos x$
- c)  $f(x) = 2 + \text{sen } x$
- d)  $f(x) = -2 + \cos x$

### **Anexo 3 - Dificuldades encontradas pelos educandos na resolução das questões da avaliação diagnóstica.**

Das questões acima, qual foi sua maior dificuldade encontrada em resolvê-las?

A ( ) Não tem conhecimento do assunto

B ( ) Ter conhecimento do assunto, mas não lembrar o conceito de período.

C ( ) Ter conhecimento do assunto, mas não lembrar a definição de imagem, valor máximo e mínimo de uma função

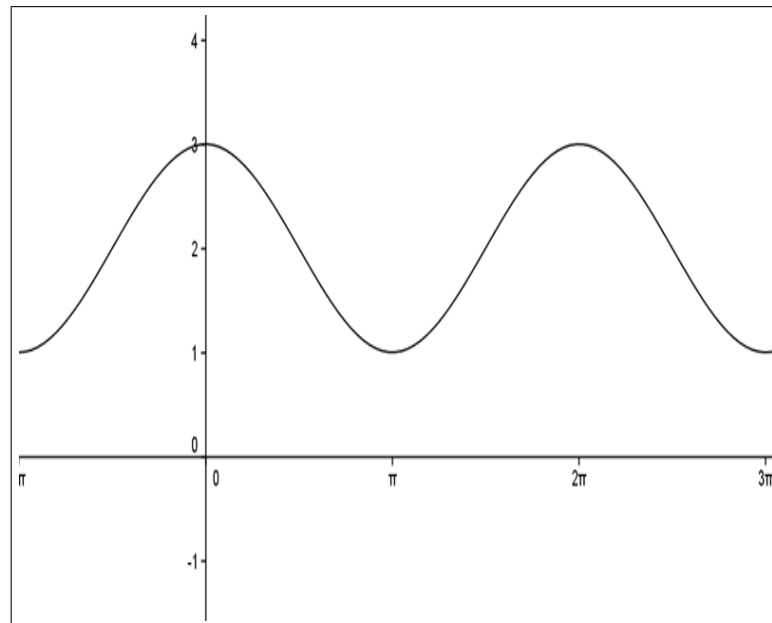


D ( ) Ter conhecimento do assunto, não lembrar como determinar a lei de formação de uma função

E ( ) Não tive dificuldades

## Anexo 4 - Avaliação final

01)(UF-RS) O gráfico a seguir representa a função real  $f$



Essa função é dada por:

a)  $f(x) = 1 - \cos x$

b)  $f(x) = 1 + \cos x$

c)  $f(x) = \cos(x + 1)$

d)  $f(x) = \cos(x - 1)$

02) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{R}$  denota o conjunto dos número reais, uma função definida por  $f(x) = 2 + 3 \cdot \text{sen}(2x + 1)$ . O menor e maior valor de  $f(x)$ , respectivamente, são:

a)  $-1$  e  $1$

b)  $-1$  e  $3$

c)  $2$  e  $5$

d)  $-1$  e  $5$

03) A imagem de uma função é dada pelo intervalo  $[-1, 5]$ . Qual das funções abaixo apresenta essa imagem?

a)  $f(x) = 1 + 4 \operatorname{sen} x$

b)  $f(x) = 3 + 2 \cos x$

c)  $f(x) = 2 + 3 \operatorname{sen} x$

d)  $f(x) = 1 - 4 \cos$

04) Qual é o período da função definida por  $f(x) = 3 + 2 \cdot \cos(4x + 1)$ ?

a)  $2\pi$

b)  $\pi$

c)  $\frac{\pi}{2}$

d)  $\frac{\pi}{4}$

05) Qual das funções abaixo apresenta um período igual a  $\frac{\pi}{2}$ ?

a)  $f(x) = 2 \operatorname{sen}(2x + 1)$

b)  $f(x) = 2 + \cos(2x)$

c)  $f(x) = 1 + 4 \operatorname{sen}(x)$

d)  $f(x) = 4 + \cos(4x + 1)$