UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO DERILSON DE MELO

USO DAS MATRIZES NA PARAMATRIZAÇÃO DAS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

MOSSORÓ/RN

2013

FRANCISCO DERILSON DE MELO

USO DAS MATRIZES NA PARAMETRIZAÇÃO DAS SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Prof°. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

Ficha catalográfica preparada pelo setor de classificação e catalogação da Biblioteca "Orlando Teixeira" da UFERSA

M517u Melo, Francisco Derilson de.

Uso das matrizes na parametrização das soluções de equações diofantinas lineares. / Francisco Derilson de Melo. -- Mossoró-RN: 2013.

47f.: il.

Dissertação (Mestrado em Matemática Profissional em Rede Nacional) – Área de concentração: Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Pró-Reitoria de Ensino e Pesquisa.

Orientador: Profº. Dr. Sc. Antonio Ronaldo Gomes Garcia.

1.Matrizes. 2.Equações. 3.Diofantinas. 4.Ensino médio. I.Título.

CDD: 515.2

Bibliotecária: Marilene Santos de Araújo
CRB-5/1033

FRANCISCO DERILSON DE MELO

USO DAS MATRIZES NA PARAMETRIZAÇÃO DAS SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em matemática.

APROVADO EM : 15 de Abril de 2013

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. ANTONIO RONALDO GOMES GARCIA– UFERSA
Presidente

Profº. Dr. WALTER MARTINS RODRIGUES – UFERSA
Primeiro Membro

Profº. Dr. DAVID ARMANDO ZAVALETA VILLANUEVA – UFRN
Segundo Membro

MOSSORÓ/RN, 15 de Abril de 2013.

Resumo

As matrizes são tabelas que, incialmente, eram usadas para a formalização de operações com Transformações Lineares e hoje têm seu emprego utilizado em inúmeras áreas do conhecimento. Assim, é imprescindível o estudo deste conteúdo no Ensino Médio para a formação básica de futuros pesquisadores. As bases, o histórico, as propriedades e os teoremas que envolvem o Estudo das Matrizes formam uma álgebra não comutativa para algumas operações. Ficou evidenciada a eficácia da utilização de matrizes na parametrização das soluções das equações diofantinas lineares e que esta formalização torna mais simples a compreensão destas soluções para pesquisadores de outras áreas e para alunos de Ensino Médio.

Palavras-chave: Matrizes, Equações Diofantinas e Ensino Médio.

Abstract

Matrixes are tables that initially were used for formalization of operations with Linear Transformations and today have used their employment in many areas of knowledge. Thus, it is essential to study this content in high school to basic training of future researchers. The foundations, history, properties and theorems involving the study of matrixes mold algebra not commutative for some operations. Evidence of the effectiveness of using arrays in the parametrization of the solutions of linear Diophantine equations and that this formalization makes it simple comprehension of these solutions for researchers from other areas and for high school students.

Keywords: Matrixes, Diophantine Equations and High School.

Dedicatória

A minha esposa e meus filhos pela paciência; A minha mãe pelo incentivo; Ao meu professor e orientador, Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia, pelo apoio e motivação para a realização desta Dissertação.

Agradecimentos

A meus colegas de trabalho, cujo conhecimento me faz aprender a cada dia;

Ao Professor e colega de curso José Vilani de Farias, pela sugestão do tema;

A CAPES pela concessão de bolsa de estudos, imprescindível para realização deste curso e

Aos meus alunos, que compartilham comigo o grande prazer do ensino-aprendizagem.

Sumário

Introdução

Os conteúdos de Matemática do Ensino Médio são a base para o estudo desta disciplina no Ensino Superior em suas diversas formas. Esse estudo é imprescindível, uma vez que a Matemática é uma ferramenta utilizada nas mais diversas áreas da ciência, dando a esta respaldo em suas pesquisas e análise de seus resultados. As aplicações da Matemática, embora tão amplas e importantes, são muitas vezes ignoradas por parte dos alunos e demais integrantes da comunidade escolar, esse problema se dá pelo pouco interesse em conhecer a disciplina e pela forma em que muitas vezes esses conteúdos são repassados sem mostrar a repercussão dos mesmos na vida cotidiana. De maneira correlata, a necessidade de relacionamento entre o conhecimento e a prática, faz-nos entender que este movimento filosófico deve estar bem entendido por todos os setores envolvidos no ensino-aprendizagem. Diante desta problemática temos as matrizes, cuja noção de seus conceitos e propriedades é fundamental para o estudo de Álgebra Linear e por isso, podem ser utilizadas em inúmeras áreas do conhecimento como a economia, a engenharia e com maior destaque na informática, uma vez que as matrizes muitas vezes são utilizadas para representar transformações lineares. Além disso, temos as equações diofantinas lineares que se apresentam como ferramenta na solução de inúmeros problemas, bem como para o desenvolvimento do raciocínio lógico para alunos do ensino fundamental e médio.

Neste trabalho, visaremos mostrar a história das matrizes e das equações diofantinas lineares, a sua ampla utilização nas ciências em geral e uma aplicação das matrizes na parametrização das soluções de equações diofantinas. Essa dissertação foi inspirada nas obras "‘A Matemática do Ensino Médio"’, que evidencia a necessidade de mostrarmos os conteúdos de Ensino Médio de maneira clara e relevante para os alunos desta etapa de formação e o "‘2° Colóquio de Matemática da Região Nordeste"’, realizado em Teresina-PI em 2012, que no Minicurso de Semigrupos Numéricos mostrou uma nova técnica para trabalharmos a parametrização das soluções de equações diofantinas lineares através de matrizes; buscando contribuir para revisar a bibliografia na abordagem das matrizes e também tem por objetivo mostrar a relevância do seu estudo no Ensino Médio e apresentar uma aplicação concreta desse conteúdo. Apresentaremos uma abordagem rápida da Matemática que é apresentada hoje para os alunos do Ensino Médio, conceitos básicos e históricos das matrizes e das equações diofantinas lineares e mostraremos como utilizar a técnica de parametrização de soluções dessas equações através de matrizes. O motivo pelo qual elaboramos este trabalho é que, com o conhecimento mais amplo de tudo que envolve o estudo das matrizes e equações diofantinas, possa ser desenvolvido por professores, alunos e pesquisadores um sentido investigativo que os faça entender a importância desse conhecimento, bem como instigá-los a buscar outras aplicações para estes e outros conteúdos matemáticos a eles apresentados. Para isso, este visará apresentar um breve histórico, alguns conceitos básicos e aplicações de Matrizes e de Equações Diofantinas Lineares intrínsecas a própria Matemática ou em outras ciências.

Assim, apresentaremos no capítulo 1, uma pequena abordagem sobre a atual situação do ensino-aprendizagem de Matemática em nossas escolas, a importância destes conteúdos para o aluno quando o mesmo ingressar na vida acadêmica e a motivação para a pesquisa nesta área do conhecimento, mostrando também um breve histórico das matrizes e das equações diofantinas lineares, as propriedades da adição e produto por escalar e suas aplicações de matrizes em diversas áreas do conhecimento, mostrará ainda as definições destas equações e uma forma de parametrizar suas soluções através de um algorimo Euclidiano; o capítulo 2, apresentará proposições, demonstrações e aplicações das matrizes para parametrizar as soluções de equações diofantinas lineares; ainda apresentaremos um apêndice como conceitos e definições de elementos da Álgebra Linear que embora não são sejam objetos do nosso estudo, será de grande importância para a melhor compreensão do leitor deste trabalho.

1 A matemática do ensino médio

Estudar um conteúdo matemático pode proporcionar uma série de perguntas como por exemplo: "‘Quem inventou isto?"’ ou "‘Para quê serve?"’ ou ainda "‘Onde eu vou usar?"’ ,ou seja, os alunos querem uma explicação lógica para começar o estudo. Como ressalta [5] "‘A importância social da Matemática provém de que ela fornece modelos para analisar situações da vida real"’.

Já no campo das ciências, há uma necessidade de resolver seus questionamentos, com precisão e eficácia. Diante disso, para conhecer um conteúdo como Matrizes ou como Equações Diofantinas Lineares, é preciso saber ao menos onde vai utilizá-lo, e para as ciências, incluindo entre estas a própria Matemática, é fundamental a aplicação destes conteúdos na análise de seus projetos.

Então a problemática está em elucidar as diversas indagações feitas ao professor, para que os mesmos consigam identificar e utilizar Matrizes e Equações Diofantinas Lineares na resolução de problemas do cotidiano. Dando assim ao aluno uma experiência conhecida pelos professores ou mostrando situações da própria experiência do aluno, ou seja, segundo [8] "‘Constatamos, mais uma vez, que esta prática, além do crescimento pessoal e profissional, é fortemente favorecida pela construção de saberes provenientes da troca de ideias."’

Quando pequenos, ouvimos que Matemática é chata, difícil, irritante, e até, distante da nossa realidade. Como se dentro do colégio fosse um mundo abstrato, e fora fosse o mundo real, sendo estes dois mundos totalmente desconectados. Para criar uma ponte de ligação entre esses dois mundos, existem nos BRASIL, concepções e abordagens de ensino, porque, segundo a proposta de [14], "‘... queremos ver um sentido para o que ensinamos. Queremos que nossos alunos saibam usar a Matemática que ensinamos."’ Mas, antes de qualquer coisa, é necessário entender o seguinte pensamento:

Há inúmeras possibilidades de apresentarmos contextos variados ligados a realidade de cada turma, podendo ser delegada aos próprios alunos a apresentação de significação prática de determinado conteúdo; por exemplo, ao solicitarmos a um aluno que produza um problema prático, como pesquisar a ficha técnica de jogos de "‘vídeo game"’ e verificar que estes jogos são baseados em tabelas numéricas e desenvolvem-se por Transformações Lineares, sua disposição em realizar o trabalho é superior a que o mesmo pesquise sobre Matrizes em um livro didático. Para [1]:

> "‘A utilização da Modelagem como uma estratégia de aprendizagem, além de tornar um curso de matemática atraente e agradável, pode levar o aluno a: desenvolver um espírito de investigação, utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas, entender e interpretar aplicações de conceitos matemáticos e suas diversas facetas, relacionarem sua realidade sócio-cultural com o conhecimento escolar e, por tudo preparar os estudantes para a vida real, como cidadãos atuantes na sociedade.

Repensando nos novos caminhos para a pesquisa e para educação, visamos à formação do aprendiz pesquisador, capaz de buscar a informação e transformá-la em conhecimento, pois "‘construir o seu próprio universo de conhecimentos passa a ser uma condição central de inserção social das pessoas"’ [3].

Estamos conscientes de que o grande desafio e compromisso pedagógico no Ensino Médio é de tornar realidade para os educandos uma escola prazerosa, democrática e competente, buscando construir a unidade na multiplicidade ao educar alunos distantes entre si, prevendo acesso aos mesmos conhecimentos e valores através da integração das múltiplas linguagens que educam e sintonizam todos com seu tempo, buscando a sua transformação. Refletindo a respeito da inserção dos nossos alunos neste novo mundo que já se faz presente, é de extrema relevância trazermos aos iniciantes no processo de pesquisa que o conhecimento é uma das bases mais importantes de sustentação da sociedade.

1.1 Matrizes

Pelos meados do século dezenove os matemáticos alemães estavam de cabeça e ombros acima dos de outras nacionalidades no que se referia à análise e à geometria, com as universidades de Berlim e Göttingen na liderança e com a publicação centrada no Journal de Crelle. A álgebra, por outro lado, foi durante algum tempo quase monopólio britânico, com Trinity College, Cambridge, à frente e o Cambridge Mathematical Journal como principal veículo de publicação. Peacock e De Morgan eram ambos de Trinity, como também Cayley, que contribui fortemente tanto para a álgebra quanto para a geometria, e que se graduara como sênior wrangler. A obra de Cayley em geometria analítica, volta-se para o uso de determinantes e ele foi também um dos primeiros a estudar matrizes, o que corrobora a preocupação britânica com forma e estruturas algébricas. Como nos cita [4] "O conjunto das matrizes tem uma estrutura muito mais rica do que a de simples espaço vetorial, obtida com a noção de produto de matrizes, noção esta, fundamental para a resolução de sistemas de equações lineares com o uso de matrizes". Vejamos alguns conceitos básicos que orientam o estudo das matrizes.

Definição 1.1.1 *Dados m e n em $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, definimos uma matriz real de ordem m por n, ou simplesmente uma matriz m por n (escreve-se $m \times n$), como uma tabela formada por elementos $\in \mathbb{R}$ distribuídos em m linhas e n colunas.*

Estes elementos de $\mathbb{R}$ são chamados entradas da matriz.

Por exemplo, a matriz [3] é uma matriz 1×1, ao passo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz 3×3. As entradas da matriz são dadas pelos números reais dispostos em cada linha i e cada coluna j de A. É usual indicarmos as entradas de uma matriz arbitrária A pelos símbolos A_{ij} , ou ainda a_{ij}, onde os índices indicam, nessa ordem, a linha e a coluna onde o elemento se encontra. Assim, uma matriz $m \times n$ é usualmente representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou por $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ou simplesmente por $A = [a_{ij}]$, quando a ordem da matriz estiver subentendida. O símbolo M_{mn} $(\mathbb{R})$ denota o conjunto das matrizes $m \times n$. Dependendo dos valores de m e n, uma matriz $m \times n$ recebe um nome especial. De fato, toda matriz $1 \times n$ é chamada de uma matriz linha e toda matriz $m \times 1$ é chamada de uma matriz coluna. Uma matriz $n \times n$ é chamadade matriz quadrada de ordem n. Por exemplo, a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

É uma matriz coluna de ordem 3×1 e matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

É uma matriz quadrada de ordem 3.

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem n, as entradas a_{ii}, com $1 \leqslant i \leqslant n$, formam a diagonal principal de A. Uma matriz diagonal de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A matriz diagonal de ordem n cujas entradas da diagonal principal são iguais ao número real 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & 1 \end{bmatrix}$$

é chamada matriz identidade de ordem n e denotada usualmente por I_n. Em alguns casos, representaremos por simplicidade I_n apenas por I.

Uma matriz triangular superior de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Portanto, uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n é triangular superior se $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$.

Analogamente, uma matriz triangular inferior de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero.

Uma matriz $m \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero é chamada de uma matriz nula, por exemplo, a matriz

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É a matriz nula de ordem 2×3 ou $0_{2\times3}$.

Dizemos que duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{mxn}$, de mesma ordem, são iguais, escrevendo $A = B$, quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leqslant i \leqslant m$ e para todo $1 \leqslant j \leqslant n$.

A soma de duas matrizes (oriunda de transformações de dimensões iguais) é definida como a matriz obtida da soma dos elementos correspondentes daquelas. Assim:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+A & b+B \\ c+C & d+D \end{bmatrix}$$

e como consequência imediata, a multiplicação de uma matriz por um escalar K define-se pela equação:

$$K. \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ka & Kb \\ Kc & Kd \end{bmatrix}$$

A matriz que deixa invariante por adição, toda matriz de mesma ordem é a matriz cujos elementos são exclusivamente nulos. Essa matriz é chamada de nula ou matriz identidade da adição.

Seguem daí a seguinte proposição.

Proposição 1.1.1 *Se A, B e C são matrizes de mesma ordem, então :*

(i) $A+(B+C)=(A+B)+C$ *(associatividade da adição);*

(ii) $A+B=B+A$ *(comutatividade da adição);*

(iii) $A+0=A$*, onde 0 denota a matriz nula* $m\times n$ *(elemento neutro);*

(iv) $A+(-A)=0$*;*

(v) $a(A+B)=aA+aB$*;*

(vi) $(a+a')A=aA+a'A$*;*

(vii) $a(a'A)=(aa')A$*;*

(viii) $1A=A$*.*

Demonstração 1.1.1 *(i): Se* $A=[a_{ij}]$*,* $B=[b_{ij}]$ *e* $C=[c_{ij}]$*, então:*

$$\begin{aligned} A+(B+C) &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\ &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\ &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\ &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\ &= (A+B)+C \end{aligned}$$

(ii): Se $A=[a_{ij}]$*, e* $B=[b_{ij}]$*, então:*

$$\begin{aligned} A+B &= [a_{ij}]+[b_{ij}] \\ &= [b_{ij}]+[a_{ij}] \\ &= B+A \end{aligned}$$

(iii): Se $A=[a_{ij}]$ *e 0 é uma matriz nula com a mesma dimensão de A, então:*

$$\begin{aligned} A+0 &= [a_{ij}]+0 \\ &= [a_{ij}] \\ &= A \end{aligned}$$

(iv): Se $A = [a_{ij}]$*, então:*

$$\begin{aligned} A + (-A) &= [a_{ij}] + [-a_{ij}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

(v) Se $A = [a_{ij}]$*, e* $B = [b_{ij}]$*, e* $a \in \mathbb{R}$*, então:*

$$\begin{aligned} a.(A+B) &= a[a_{ij} + b_{ij}] \\ &= [a(a_{ij} + b_{ij})] \\ &= [aa_{ij} + ab_{ij}] \\ &= [aa_{ij}] + [ab_{ij}] \\ &= a[a_{ij}] + a[b_{ij}] \\ &= aA + aB \end{aligned}$$

(vi) Se $A = [a_{ij}]$*, a e a'* $\in \mathbb{R}$*, então:*

$$\begin{aligned} (a+a').A &= (a+a')[a_{ij}] \\ &= a[a_{ij}] + a'[a_{ij}] \\ &= aA + a'A \end{aligned}$$

(vii) Se $A = [a_{ij}]$*, a e* $a' \in \mathbb{R}$*, então:*

$$\begin{aligned} a(a'A) &= a(a'[a_{ij}]) \\ &= (aa')[a_{ij}] \\ &= aa'A \end{aligned}$$

(viii) Se $A = [a_{ij}]$*, então:*

$$\begin{aligned} 1A &= 1[a_{ij}] \\ &= [a_{ij}] \\ &= A \end{aligned}$$

As propriedades de (i) a (viii) fazem o conjunto das matrizes um exemplo de espaço vetorial de Álgebra Linear e a formalização de algumas propriedades básicas do produto de matrizes, foi resultado direto da aplicação de Transformações Lineares conforme exemplificamos:

Seja uma transformação

$$T_1 : \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

e aplicamos a T_1 uma outra transformação

$$T_2 : \begin{cases} x'' = Ax' + By' \\ y'' = Cx' + Dy' \end{cases}$$

Obtemos a transformação composta:

$$T_1T_2 : \begin{cases} x'' = (aA + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases}$$

Se, de outro lado, invertemos a ordem de T_1 e T_2, de modo que T_2 é a transformação

$$\begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx + Dy \end{cases}$$

E fazendo T_1 como sendo

$$\begin{cases} x'' = ax' + by' \\ y'' = cx' + dy' \end{cases}$$

Aplicando essas transformações obtemos

$$T_1T_2 : \begin{cases} x'' = (aA + bC)x + (aB + bD)y \\ y'' = (cA + dC)x + (cB + dD)y' \end{cases}$$

A troca da ordem dessas transformações em geral produz um resultado diferente. Expressando na linguagem de matrizes,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{bmatrix}$$

Como duas matrizes são iguais se e somente se todos os elementos correspondentes são iguais, fica evidenciada a não comutatividade na multiplicação de matrizes.

Note que para o produto de A por B estar definido, o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B. Assim, se A e B são matrizes 2×3 e 3×1, respectivamente, o produto AB está definido e é uma matriz 2×1. Porém, o produto BA não está definido. Uma condição necessária para que $AB = BA$ é que A e B sejam matrizes quadradas de mesma ordem. Contudo, esta condição não é suficiente. Por exemplo as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, e $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, note as duas matrizes são de ordem 2. Porém têm seus produtos:

$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, e $B.A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Logo $AB \neq BA$. Assim, vemos que a multiplicação de matrizes não comuta.

Uma curiosidade do produto de matrizes e que o produto de duas matrizes não nulas, pode resultar em uma matriz nula, por exemplo:

Sejam as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Logo $A.B = 0_{2\times 2}$. A matriz nula de ordem 2, fato que não ocorre com os números reais, uma vez que se a e b são dois reais quaisquer e $a.b = 0$, temos que $a = 0$ ou $b = 0$.

A matriz que deixa invariante por multiplicação, toda matriz quadrada de mesma ordem é a matriz quadrada e diagonal e cujos elementos não nulos são exclusivamente o um. Essa matriz é chamada de identidade e é geralmente denotada por I.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Proposição 1.1.2 :

(i) $A(B+C) = AB+AC$ *(distributividade à esquerda da multiplicaçãoem relação à adição);*

(ii) $(A+B)C = AC+BC$ *(distributividade à direita da multiplicação emrelação à adição);*

(iii) $(AB)C = A(BC)$ *(associatividade);*

(iv) $AI = IA = A$ *(existência de elemento identidade).*

Demonstração 1.1.2 :

(i): Suponhamos que as matrizes A, B e C sejam de ordens $n \times r$, $r \times s$ e $r \times s$; respectivamente, então:

$[A(B+C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} aik(B+C)kj$

$= \sum_{k=1}^{p} aik(bkj + ckj)$

$= \sum_{k=1}^{p} (aik.bkj + aik.ckj)$

$= \sum_{k=1}^{p} aik.bkj + \sum_{k=1}^{p} aik.ckj$

$= (AB)_{ij} + (AC)_{ij}$

$= [AB + AC]_{ij}$

(ii): A demonstração desta propriedade é inteiramente análoga a anterior.

(iii): Suponhamos que as matrizes A, B e C sejam de ordens $n \times r$, $r \times s$ e $s \times t$; respectivamente, então:

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} aik(BC)kj = \sum_{k=1}^{p} aik.\sum_{l=1}^{q}(bkl).clj = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} aik.(bkl.clj)$$
$$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(aik.bkl)clj = \sum_{l=1}^{q}(AB)il.clj = [(AB)C]_{ij}$$

(iv) Suponhamos uma matriz quadrada A de ordem n e uma matriz I_n (matriz identidade de ordem n)

$(A.I)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} aij.bij,$ *onde*

$b_{ij} = 1$ *se* $i = j$

e $b_{ij} = 0$ *se* $i \neq j$

$= \sum_{k=1}^{p} aij.bij = A$

De modo análogo demonstramos que o produto $I.A = A$, portanto, $A.I = I.A = A$

Estas operações de soma e produto por escalar apresentadas fazem das matrizes um anel com unidade e com divisores de zero, porém não comutativo.

Tendo definido a multiplicação de matrizes, definimos a potenciação da maneira usual:

Dados A em $M(n,n)$ e $k \in N \setminus \{0\}$,

$A^0 = I_n$ e $A^k = A.A...A$, k fatores

Dada uma matriz $A = [aij]_{mxn}$, chamamos de transposta de A, e denotamos por A^t, a matriz $[bij]_{nxm}$, onde $b_{ij} = a_{ji}$; para todo $1 \leqslant i \leqslant n$ e para todo $1 \leqslant j \leqslant m$.

Uma matriz quadrada A é chamada simétrica se $A^t = A$ e é chamada de antissimétrica se $A^t = -A$.

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A uma matriz quadrada B de ordem n tal que $AB = BA = \mathrm{I}_n$:

Uma matriz quadrada A é dita invertível se A admite uma matriz inversa. Se uma matriz A possui uma inversa, então essa inversa é única. De fato,suponhamos que B e C são duas inversas de uma matriz A de ordem $n \times n$.Então $AB = I_n$ e $CA = I_n$. Decorre das propriedades do produto de matrizes que: $C = C.I_n = C(AB) = (CA)B = I_n.B = B$

Com essas definições podemos pensar nas operações sobre as matrizes como uma "álgebra", passo que foi dado por Cayley e pelos matemáticos americanos Benjamin Peirce (1809-1880) e seu filho Charles S. Peirce (1839-1914). O estudo da álgebra das matrizes e outras álgebras não comutativas foi em toda parte um dos principais fatores no desenvolvimento de uma visão cada vez mais abstrata da álgebra, especialmente no século XX. Como foi destacado no curso Introdução à Algébra Linear - Profmat (2012) por Hefes e Fernandes: "Como sucede com frequência em Matemática, ao introduzir um conceito para lidar com determinado problema, cria-se um instrumento que muitas vezes transcende o problema inicial e se constitui em um conceito central em vários outros contextos".

Desenvolvendo álgebras que satisfazem leis estruturais diferentes daquelas obedecidas pela álgebra usual, estes matemáticos, abriram ao lado de Hamilton e Grassmann, as comportas da álgebra abstrata. Seus estudos derrubaram preceitos da álgebra usual, substituindo ou eliminando vários de seus postulados e abriu o espaço para o estudo de uma enorme variedade de sistemas. Podemos citar nestes sistemas os grupos, anéis, domínios de integridade, retículados entre outros.

1.2 Equações Diofantinas Lineares

Diofanto nasceu por volta do ano 250 a.C e foi um matemático de trabalhos extremamente originais para sua época e segundo equação deixada por ele mesmo em sua lápide, viveu 84 anos. A principal obra de Diofanto, chamada *Arithmetica*, consta ter sido escrita em 13 livros, dos quais apenas os seis primeiros chegaram até nós. Alguns consideram Diofanto o pai da Álgebra, uma vez que ele introduziu em seu trabalho a ideia de equação algébrica expressa por símbolos. Na solução de sistemas de equações, Diofanto manipulava um único símbolo para representar as incógnitas e chegava às respostas, comumente, pelo método da tentativa, que consiste em assumir para alguma das incógnitas um valor preliminar que sastifaça algumas condições. Estes valores preliminares conduziam a expressões erradas, mas que geralmente sugeriam alguma estratégia pelo qual valores podiam ser obtidos de forma a atender todas as condições do problema. Na coleção de 150 problemas que compõe sua obra, fica claro que o tratamento dado por Diofanto não é o da axiomatização,e raramente ele apresenta generalizações. Não há uma distinção clara no tratado de Diofanto entre equações determinadas e indeterminadas e, quando ele se ocupava desse segundo grupo, geralmente contentava-se em encontrar uma solução, e não todo o conjunto de soluções.

Há pesquisas na área de Educação Matemática que mostram a importância da Teoria dos Números no desenvolvimento do aprendizado matemático para introduzir e desenvolver ideias fundamentais da Matemática. Como ressalta [6] estabelecer uma ligação direta da Teoria dos Números para a iniciação de estudantes no entendimento conceitual da aritmética dos números inteiros.

A Teoria Elementar dos Números é fundamental para a iniciação dos alunos na conceituação e na aplicabilidade da Matemática em diversas áreas das ciências, como ressalta [9]:

> A Teoria Elementar dos Números repousa no fato de que esta teoria esta subjacente a quase todos os domínios da Matemática e também de outras áreas, tais como: Ciências da Computação, Engenharia e Física, entre outras. Daí o fato de ser imprescindível que aqueles que pretendem trabalhar com as ciências que utilizam a Matemática, tanto como objeto de estudo como instrumento, tenham domínio sobre seus principais conceitos.

Apesar de não estar explicitado nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, o conteúdo de Equações Diofantinas Lineares, aparece em vários problemas cujas soluções envolvem diretamente este conceito. Quando, por exemplo, apresentamos aos alunos o problema de como podemos pagar uma conta de R$ 47,00; dispondo apenas de cédulas de R$ 2,00; R$ 5,00 e R$ 10,00. A solução desse problema envolve vários conceitos básicos da teoria dos números tais como os de m.d.c., divisibilidade e propriedades da multiplicação e adição no conjunto dos números inteiros. Porém se partirmos da premissa que estamos diante de uma equação diofantina linear, que se apresenta como:

$$2x + 5y + 10z = 47$$

esse problema pode ser trabalhado com os alunos, dando inúmeras possibilidades de resolução do mesmo.

Nas diferentes áreas da Matemática, principalmente na Geometria Algébrica e Teoria do Números encontramos estas equações. Entre as equações diofantinas encontram-se as de fácil resolução, que podem ser solucionadas através de métodos elementares, assim como aquelas que exigem a aplicação de teorias modernas da Matemática, um exemplo destas é a famosa equação de Fermat:

$$x^n + y^n = z^n, n > 2$$

que a humanidade tentou resolver durante três séculos e que somente em 1994 foi resolvida pelo matemático inglês Andrew Wiles e estas soluções não são inteiras.

Neste trabalho, vamos nos restringir a equações diofantinas lineares com duas ou três incógnitas e que possuem soluções inteiras.

Definição 1.2.1 *: São chamadas equações diofantinas todas as equações polinomiais (não importa o número de incógnitas) com coeficientes inteiros, sempre que seu estudo seja feito tomando como universo das variáveis o conjunto dos números inteiros.*

Exemplo 1.2.1 *: Deseja-se construir um determinado prédio que é vendido em apartamentos de 2 ou de 3 por andar e se deseja fazer este prédio com 50 apartamentos. Chama-se de x e y números de apartamentos que estão localizados nos andares de 2 ou 3 apartamentos, respectivamente, isto nos leva à:*

$$2x + 3y = 50$$

Ao encontrarmos as possíveis soluções para o problema, ainda podemos verificar que $x + y$ é o número de andares desse prédio, o que mostraria ao aluno uma abordagem mais completa e contextualizada dessas soluções.

Para encontramos as soluções de equações diofantinas lineares, precisamos incialmente, verificar se existem essas soluções:

Proposição 1.2.1 *: Uma equação diofantina linear $ax+by=c$,com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, tem solução se, e somente se, $mdc(a,b)$ é um divisor de c.*

Demonstração 1.2.1 *:*

Considere a equação diofantinas $ax+by=c(1)$ com a, b e $c \in \mathbb{Z}$.

Fazendo $d = mdc(a,b)$, temos: $a = a_1.d$ e $b = b_1.d$, logo a equação: $ax+by=c$, forma o aspecto:
$a_1dx+b_1dy=c$ *dividindo por d,*
$a_1x+b_1y=\frac{c}{d}=c_1$,

Isto significa que para que a equação (1) admita soluções inteiras, todos os seus coeficientes deverão ser divisíveis por d.

Ainda podemos mostrar que pelos critérios de divisibilidade, que se d divide a, d divide am, para qualquer inteiro m e se d divide a e divide b, então dividirá $a+b$.

Enunciando o Teorema de Bézout: "Se d é o máximo divisor comum de a e b, então existem inteiros m e n tais que: $am+bn=d$".,

Desse modo, pelo teorema de Bézout infere-se que:

Sendo c o $mdc(a,b)$, temos que a equação $ax+by=c$, tem como solução $x_o = m$ e $y_o = n$. E se c é divisor do $mdc(a,b)=d$, logo $c=dk$ (com $k \in \mathbb{Z}$) e como $d=am+bn$, resulta que: $c=(am+bn)k=a(mk)+b(nk)$, conclui-se assim que $x_o = mk$ e $y_o = nk$.

Por outro lado, supondo que existam uma solução x_o e y_o para a equação considerada, temos ax + by_o = c, ainda pelo Teorema de Bézout, temos que o $mdc(a,b)$ divide a e também divide b, o que implica que o $mdc(a,b)$ divide c.

Decorre desta propriedade que algumas equações diofantinas não têm soluções inteiras, por exemplo, a equação diofantina: $6x+2y=3$, esta equação não tem solução,porque $6x+2y$ é um inteiro para quaisquer que sejam os valores de x e y, enquanto que 3 é um inteiro ímpar (observe que 2 é $mdc(6,2)$ e não divide 3).

Exemplo 1.2.2 *: Ao entrar num bosque, alguns viajantes avistam 37 montes de maçã. Após serem retiradas 17 frutas, o restante foi divido igualmente entre 79 pessoas. Qual a parte de cada pessoa? (Problema de Mahaviracarya, matemático hindu).*

A equação diofantina extraída do problema é:

$$37x - 17 = 79y \Longrightarrow 37x - 79y = 17$$

Como o $mdc(37,79)$ *pelo algoritmo de Euclides é 1 e 1|17 logo a equação tem soluções. Devemos exprimir 1 como combinação linear 37 e 79, para isto basta eliminar os restos 2 e 5 do seguinte modo:*

$$1 = 5 - 2.2 = 5 - 2(37 - 5.7) = 15.5 - 2.37 = 15(79 - 37.2) - 2.37 = 79.15 - 32.37$$
$$= 37(-32) + 79.15; \textit{ isto é: } 37(-32) + 79.15 = 1 \textit{ e } 37.(-544) - 79.(-255) = 17.$$

Logo o par de inteiros $x_0 = -544$, $y_0 = -255$ *é uma solução particular da equação proposta, e todas as demais soluções são dadas pelas fórmulas:*

$x = -544 - 79t$ *e* $y = -255 - 37t$

Como o problema pede o número de frutas, x e y devem ser números positivos, paraisso devemos escolher um t que satisfaça as desigualdades: $-544 - 79t > 0$ *e* $-255 - 37t > 0$, *o que nos leva a* $t = -7$. *Considerando* $t = -7$, *temos:* $x = -544 - 79.(-7) = 9$ *e* $y = -255 - 37.(-7) = 4$ *e, como y representa o número de maçãs que cada pessoa comeu e* $y = 4$, *temos que cada viajante comeu 4 maçãs. Evidentemente esta não é a única solução para este problema já que poderíamos ter escolhido outro valor para t como, por exemplo,* $t = -8$. *Este fato possibilita uma discussão entre os alunos sobre as possíveis soluções e sobre a necessidade de enunciar adequadamente um problema para que não ocorram múltiplos resultados.*

No Capítulo 2 resolveremos este mesmo exemplo através de matrizes.

2 A parametrização das equações diofantinas por matrizes

2.1 Aplicação de matrizes na solução de equações diofantinas lineares

Proposição 2.1.1 *:Considere uma matriz* $M = (m_{ij})$, $det(M) = \pm 1$, *de ordem 3, com coeficientes inteiros e os vetores* $v = (a,b,c)$ *e* $e_1 = (1,0,0)$ *tais que* $Mv^t = e_1^t$. *Defina os vetores* $m_1 = (m_{11}, m_{12}, m_{13})$, $m_2 = (m_{21}, m_{22}, m_{23})$ *e* $m_3 = (m_{31}, m_{32}, m_{33})$. *Então* $m(s,t) = dm_1 + sm_2 + tm_3 = M(d,s,t)^t$ *com* $(s,t) \in a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *é a solução geral da equação diofantina* $ax + by + cz = d$.

Demonstração 2.1.1 *:*

Nas hipóteses consideradas $m(s,t) = dm_1 + sm_2 + tm_3$ *com* $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$ *parametriza as soluções inteiras da equação* $ax + by + cz = d$. *De fato, temos por hipótese que:*

$$m_{11}a + m_{12}b + m_{13}c = 1$$

$$m_{21}a + m_{22}b + m_{23}c = 0$$

$$m_{31}a + m_{32}b + m_{33}c = 0$$

Logo,

$m(s,t) = dm_1 + sm_2 + tm_3 = d(m_{11}, m_{12}, m_{13}) + s(m_{21}, m_{22}, m_{23}) + t(m_{31}, m_{32}, m_{33}) = (dm_{11} + sm_{21} + tm_{31}, dm_{12} + sm_{22} + tm_{32}, dm_{13} + sm_{23} + tm_{33}) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$

Portanto,

$ax(s,t) + by(s,t) + cz(s,t) = a(dm_{11} + sm_{21} + tm_{31}) + b(dm_{12} + sm_{22} + tm_{32}) + c(dm_{13} + sm_{23} + tm_{33}) = d(m_{11}a + m_{12}b + m_{13}c) + s(m_{21}a + m_{22}b + m_{23}c) + t(m_{31}a + m_{32}b + m_{33}c) = d + 0 + 0 = d$

Mostraremos agora que m(s,t) parametriza todas as soluções da equação

$$ax + by + cz = d$$

Suponha uma solução inteira $u = (x_o, y_o, z_o)$ *de* $ax + by + cz = d$ *e considere a equação* $M(d,s,t)^t = u^t$ *nas variáveis (d,s,t). Como det(M) = ± 1 temos a solução* $(d_o, s_o, t_o)^t = M^{-1}u^t$ *sendo* M^{-1} *uma matriz de coeficientes inteiros e det(*M^{-1}*) = det(M) = ± 1. Portanto* (d_o, s_o, t_o) $\in$ *a* $\mathbb{Z}^3$ *e além disso temos* d_o *= d. De fato,* $(x_o, y_o, z_o) = M(d_o, s_o, t_o)^t = d_o m_1 + s_o m_2 + t_o m_3$ *e* $m(s_o, t_o) = dm_1 + s_o m_2 + t_o m_3 = (x_o, y_o, z_o)$*. Portanto* $d = d_o$*.*

Proposição 2.1.2 *: Suponha que exista uma matriz com coeficientes inteiros B = (*b_{ij}*),* $det(B) =$ *± 1 tal que* Bv^t *=* w^t*,* $v = (a,b,c)$ *e* $w = (w1, w2, w3) \in \mathbb{Z}^3$ *e*

$$|w| = |w1| + |w2| + |w3| > 1$$

Então existe uma matriz $C = (c_{ij})$*, com coeficientes inteiros e* $det(C) = \pm 1$ *e um vetor* $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Z}^3$ *tal que* $Cv^t = u^t$ *e* $|u1| + |u2| + |u3| = |u| < |w|$*.*

Demonstração 2.1.2 *:*

Primeiro observamos que pelo menos duas coordenadas de w são não nulas. Caso contrário teríamos $v^t = B^{-1}w^t = B^{-1}(w^1, 0, 0)^t$ *com* B^{-1} *uma matriz de coeficientes inteiros, portanto* $mdc(a,b,c) \geqslant |w_1| > 1$ *em contradição com a hipótese. Portanto podemos assumir, reordenando as equações se necessário, que* $w_1.w_2 \neq 0$ *e que* $|w_1| \geqslant |w_2| > 0$*. Pelo algoritmo da divisão temos que* $w_1 = q.w_2 + r$ *com* $|r| < |w_2|$*.*

A matriz B é definida por:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Definamos agora a matriz C, tal que:

$$C = \begin{bmatrix} b_{11}.qb_{21} & b_{12} - 1.b_{22} & b_{13} - q.b_{23} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Calculando $det(C)$, utilizando o método de Sarrus, temos que

$det(C)$

$= det(B) - (qb_{21}b_{22}b_{33} + qb_{22}b_{23}b_{31} + qb_{23}b_{21}b_{32}) + (qb_{21}b_{22}b_{33} + qb_{22}b_{23}b_{31} + qb_{23}b_{21}b_{32})$

$= det(B)$
$= \pm 1$

e que o produto $C.vt = (w_1 - q.w_2, w_2, w_3) = (u_1, u_2, u_3)$

Portanto, $|u| = |u_1| + |u_2| + |u_3| = |w_1 - q.w_2| + |w_2| + |w_3| \leq 2|w_2| + |w_3| < |w|$.

Desta forma concluímos que para encontrarmos a matriz que caracteriza a parametrização de uma equação diofantina devemos:

1. *Encontrar uma matriz B com coeficientes inteiros e $det(B) = 1$*

2. *Calcular o vetor $v = (a, b, c)$, tal que $Bv^t = w^t$.*

3. *Aplicar a Proposição 2 até obter uma matriz $C = (c_{ij})$, com coeficientes inteiros e det(C) = ± 1 e tal que $Cv^t = w^t$ com $w = (1, 0, 0)$.*

Voltando ao problema de Mahaviracarya, descrito anteriormente, devemos resolver a seguinte equação diofantina: $37x - 79y = 17$. Vamos, por conveniência, escolher a matriz $B = I_2$. Teremos então a matriz 2×3, formada pela base da matriz identidade de ordem 2 e os coeficientes da equação.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 37 \\ 0 & 1 & -79 \end{bmatrix}$ (Multiplicando a primeira linha por 79, a segunda por 37 e somando-as):

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 37 \\ 79 & 37 & 0 \end{bmatrix}$ (Dividindo a primeira linha por 37):

$\begin{bmatrix} 1/37 & 0 & 1 \\ 79 & 37 & 0 \end{bmatrix}$

Logo a equação parametrizada fica $x = \frac{1}{37}d + 79t$ e $y = 37t$, porém $d = 17$, logo $x = \frac{17}{37} + 79t$ e $y = 37t$. Devemos encontrar um t real tal que x e y sejam inteiros e positivos, pois o problema envolve o número de maçãs, assim, o menor valor de t que satisfaz as condições é $t = \frac{4}{37}$, chegando a conclusão que em cada monte havia 9 maçãs e após a divisão coube a cada viajante 4 maçãs.

Quando explicitamos a ideia de equações diofantinas, apresentamos os seguintes problema: Como podemos pagar uma conta de R$ 47,00; dispondo apenas de cédulas de R$ 2,00; R$ 5,00 e R$ 10,00. Vamos apresentar a solução parametrizada desse problema, através de matrizes.

Associamos ao problema a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Mutiplicando a primeira linha de A e somando ao dobro da segunda linha e além disso somando com a terceira linha, obtendo a matriz semelhante

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtermos A'', multiplicamos a primeira linha de A' por $\frac{1}{2}$

$$A'' = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, a equação tem solução parametrizada:

$x = \dfrac{1}{2d-5t-5s}$; $y = 2t$ e $z = s$, com $d = 47$; com t e s reais e positivos, tais que $t + s \leq \frac{47}{10}$.

Como vimos nos exemplos, a utilização de matrizes na parametrização das soluções das equações diofantinas lineares é extremamente prática e eficaz, caracterizando-se num modelo relevante para este tipo de equação.

3 Conclusões

A educação, deve caminhar de maneira a dar suporte a pesquisa e a solução dos problemas cotidianos da sociedade, mais especificamente a Matemática, como ciência diretamente ligada a outras ciências, deve estar sempre adequando seus modelos aos desafios impostos pelo chamado mundo moderno. Sabemos que há uma ligação direta entre os problemas encontrados pelos pesquisadores e o desenvolvimento do conhecimento, por exemplo, o desenvolvimento das matrizes foi uma necessidade direta do aprofundamento do estudo de transformações lineares. Esta relação entre desafio e conhecimento, deve ser mostrada para que os alunos fiquem atentos as descobertas que os interessem, pois, as mudanças na educação dependem também e principalmente, dos alunos. Alunos curiosos e motivados facilitam enormemente o processo, estimulam as melhores qualidades do professor, tornam-se interlocutores lúcidos e parceiros de caminhada do professor-educador. O Estudo das Matrizes no Ensino Médio é importante para futuros pesquisadores em diversos ramos da Ciência, pois esse estudo dará suporte a compreensão da Álgebra Linear e muitas de suas aplicações, por isso, deve ser trabalhado com bastante cuidado por parte dos professores para que os conceitos e propriedades sejam do domínio dos alunos e que estes tenham noções claras das aplicações desse conteúdo. Constatamos ainda a eficacia da técnica de parametrização das soluções das equações diofantinas lineares, mostrando que o estudo da Matemática é bastante dinâmico e dele surgem novas abordagens que podem ser exploradas por professores e, principalmente, por estudantes destes conteúdos. Podemos aplicar essa técnica em livros de Teoria dos Números e procurar reescrevê-los de modo que as Equações Diofantinas Lineares, tenhma suas soluções parametrizadas utilizando os métodos das matrizes e ainda sobre estas soluções, podemos dar uma visão geométrica, mostrando que as soluções de equações com duas incógnitas representam uma reta no $\mathbb{R}^3$ enquanto as equações com três incognitas, têm suas soluções dispostas em um plano neste mesmo universo.

Referências

[1] BESSNEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto, 2002.

[2] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais Mais- Ensino Médio: Matemática. Brasília: MEC,2002.

[3] DOWBOR, L. Tecnologias do conhecimento: os desafios da educação. Petróles: Vozes, 2001.

[4] HEFES, A; FERNANDEZ C. d S. Introdução à Álgebra Linear: Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012

[5] LIMA, E. L. A Matemática do Ensino Médio. 9a Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[6] MACHADO, S. D. A; MARANHÃO, M. C; COELHO, S. P. Como é utilizado o teorema fundamental da aritmética por atores do Ensino Fundamental. Porto: Actas do V CIBEM, 2005.

[7] MORAN, José M. O uso das novas tecnologias da informação e da comunicação na EAD: uma leitura crítica dos meios. Fortaleza, 1999.

[8] NACARATO, Adair M.; PAIVA, Maria A. V. A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: 1º edição, ed. Autentica, 2008.

[9] OLIVEIRA, Silvio Barbosa. As Equações Diofantinas Lineares e o Livro Didático de Matemática para o Ensino Médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Educação Matemática. PUC-SP, 2006.

[10] RODRIGUES, Silvia Vilela de Oliveira, A utilização de recursos tecnológicos como alternativa para o ensino de matemática: ângulos, retas e parábolas. Maringá, 2008.

[11] SCHWARZELMÜLLER, Anna F. Inclusão digital: uma abordagem alternativa, 2005.

[12] SILVA, Helena. Inclusão digital e educação para a competência informacional: uma

[13] SILVA, Jaime Carvalho e. A Matemática, a Tecnologia e a Escola. Universidade de Coimbra, 2003.

[14] VALENTE, W.R. Um Professor Moderno. São Paulo: Annablume; CNPq, 2008.

Apêndice

APÊNDICE

3.1 Espaços Vetoriais

Definição 3.1.1 *Seja um conjunto V, não vazio, sobre o qual estão definidos as operações (+) e (.) por um escalar, isto é, para todo u, v* $\in$ *V, u + v* $\in$ *V, e para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e u* $\in$ *V,* $\alpha.u \in V$ *que satisfazem as propriedades:*

[i)] Para u, v e w $\in V$*, temos* $(u+v)+w = u+(v+w)$ *[ii)] Para u e v* $\in V$*, temos* $u+v = v+u$ *[iii)]* $\exists$ *0* $\in V$*, tal que para todo* $u \in V$*,* $0+u = u$ *[iv)] Para* $u \in V$*,* $\exists -u \in V$*, tal que,* $u+(-u) = 0$ *[v)] Se* α *e* $\beta \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$*, então* $(\alpha.\beta).u = \alpha.(\beta.u)$ *[vi)] Se* α *e* $\beta \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$*, então* $(\alpha+\beta).u = \alpha.u+\beta.u$ *[vii)] Se* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e u e* $v \in V$*, então* $\alpha.(u+v) = \alpha u+\alpha v$ *[viii)] Se* $u \in V$*, então* $1.u = u$

Definição 3.1.2 *Dado um espaço vetorial* V*, um subconjunto* W *de* V*, não vazio, será um* Subespaço Vetorial *de* V *se satisfaz a seguintes condições:*

[i)] Para qualquer u e $v \in W$*, segue que* $u+v \in W$*; [ii)] Para qualquer* $u \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, segue que* $\alpha.u \in W$*.*

Definição 3.1.3 *Sejam* V *um espaço vetorial* $v_1, v_2, v_3, ..., v_n \in V$ *e* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$*. Então o vetor* $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ...a_nv_n$ *é um elemento de V e é chamado de* Combinação Linear *de* $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$*.*

Definição 3.1.4 *Seja* V *um Espaço Vetorial e seja* $A = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ *um Subespaço Vetorial de* V*, tal que* $A \neq 0$*. Seja* S *o conjunto de todos os vetores de* A*. Então,* S *é um Subespaço Vetorial de* V*.*

Demonstração 3.1.1 *Demonstração: O Subespaço Vetorial diz-se gerado pelos vetores* $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ *ou gerado pelo conjunto A e é representado por* $S = [v_1, v_2, v_3, ..., v_n]$. *Os outros vetores* $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ *são chamados* Geradores do Subespaço *S, e A é o conjunto gerado de S.*

Definição 3.1.5 *Sejam* V *um espaço vetorial e* $v_1, v_2, v_3, ..., v_n \in V$. *Dizemos que o conjunto* $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ *é* Linearmente Independente *(LI), ou que os vetores são LI, se a equação*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ...a_nv_n = 0$$

implica em $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$. *Caso exista algum* $a_i \neq 0$, *dizemos que o conjunto* $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ *é* Linearmente Dependente *(LD) ou que os vetores são LD.*

Definição 3.1.6 *Um conjunto* $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ *será uma Base de um espaço vetorial* V *se:*

[i)] $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ *é Linearmente Independente [ii)]* $[v_1, v_2, v_3, ..., v_n] = V$

Corolário 3.1.1 *Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos é chamado de dimensão de* V. *E denotado por* $\dim V$.

3.2 Transformações lineares

INTRODUÇÃO

Estamos familiarizados com funções ordinárias tais como a função f definida pela equação $f(x) = x^2$. Essa função transforma um número real em outro número real, no caso, no seu quadrado. Por exemplo, o número 2 é transformado em 4, isto é, $f(2) = 4$. Estudaremos agora funções que transformam vetores em vetores.

Se A é uma matriz $m \times n$, então a equação $T(x) = Ax$, define uma função T que transforma um vetor x em $\mathbb{R}^n$ em um vetor Ax, em $\mathbb{R}^m$. Assim, T é uma função de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^m$. Em geral, se V e W são espaços vetoriais, uma função ou TRANSFORMAÇÃO T de V para W é uma regra que associa a todo vetor x em V um único vetor em W que é denotado por $T(x)$.

Se x é um vetor em V, então $T(x)$ é chamada a IMAGEM de x sobre a transformação T. Nós também dizemos que T MAPEIA OU TRASNFORMA x em $T(x)$. Por exemplo, se T é uma transformação do $\mathbb{R}^3$ para o $\mathbb{R}^2$ definida pela equação:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$$

Então T mapeia o vetor $(1,1,1)$ no vetor $T(1,1,1) = (2,2)$ e o vetor $(3,2,0)$ no vetor $T(3,2,0) = (5,2)$. Assim, para indicar que a transformação T mapeia vetores de um espaço V para vetores em um espaço W, escrevemos $T : V \to W$ e dizemos que T mapeia V em W. Duas transformações $T : V \to W$ e $S : V \to W$ são iguais se elas têm o mesmo efeito em todos os vetores de V. Isto é, $T = S$ se $T(x) = S(x)$, $\forall x V$.

Toda matriz A_{mxn} define uma transformação $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^m$ pela equação $T(x) = Ax$. Transformações definidas dessa maneira são chamadas de TRANSFORMAÇÕES MATRICIAIS.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, então a transformação matricial $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por T(x) = Ax mapeia o vetor (1,1,1) no vetor T(1,1,1) = (4,5) porque:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Transformações matriciais têm duas propriedades importantes. Se A é uma matriz $m\ x\ n$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é definida como $T(x) = Ax$, então para quaisquer dois vetores x e y em $\mathbb{R}^4$ e algum escalar α ,

$$T(x+y) = A(x+y) = Ax+Ay = T(x)+T(y)$$
$$T(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha T(x)$$

Transformações que, como transformações matriciais, têm essas duas propriedades são as mais importantes transformações em Álgebra Linear.

Definição 3.2.1 *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação $T : V \to W$ é chamada de LINEAR se para todos os vetores xey em V e para todo escalar α,*

$$T(x+y) = T(x)+T(y)eT(\alpha x) = \alpha T(x)$$

Uma transformação linear $T : V \to W$ preserva a adição e a multiplicação por escalar entre os vetores. Usando-se as duas propriedades simultaneamente chegamos a uma terceira propriedade: Sejam v_1 e v_2 vetores em V e α_1 e α_2 dois escalares, então:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$

Diz-se que uma transformação linear satisfaz o princípio da superposição, que é essa terceira propriedade. Mas, o princípio da superposição pode ser aplicado a n vetores em V e n escalares. Ora, mas isso é uma combinação linear. Logo, T preserva combinações lineares.

Exemplo 3.2.1 *:*

$F(u) = \mathrm{u}^2$ *não é uma transformação linear, pois* $F(u+v) = (\mathrm{u}+\mathrm{v})^2$

= $\mathrm{u}^2 + 2vu + \mathrm{v}^2$

$= F(u) + 2vu + F(v) \neq F(u) + F(v)$

Observação 3.2.1 *1) Se $T(0) \neq 0$, T não é linear.*

2) Quando em $T : V \to W$, $V = W$, então a transformação linear é chamada de Operador Linear.

3) Uma matriz A_{mxn} sempre determina uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ onde $T(v) = Av$.

IMAGEM E NÚCLEO

IMAGEM

$Im(T)$ = $w \in W; T(v) = w$, para algum $v \in V$.

$Im(T) \subset$ W é um subconjunto, um subespaço.

Definição 3.2.2 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. A imagem de T é o conjunto dos vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = w$.*

NÚCLEO

$C(T)$ = $v \in V; T(v) = 0$.

Proposição 3.2.1 *1) $C(T) \subset V$ é um subespaço de V.*

2) Uma transformação linear é injetora se, e somente se, $N(T) = 0$.

Definição 3.2.3 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$ é chamado núcleo de T, sendo denotado por $Ker(T)$, $N(T)$ ou $C(T)$.*

Exemplo 3.2.2 *$F(x,y) = x+y$ $C(T) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ / $x+y = 0$ ou $x = -y$; $v = (-1,1)$ gera o núcleo. O núcleo tem a dimensão de W, nesse caso.*

ESPAÇOS VETORIAIS ISOMORFOS

Quando uma transformação linear $T : V \to W$ for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, ou seja, quando a transformação linear é biunívoca. Em outras palavras, quando a correspondência biunívoca entre dois espaços vetoriais preserva as operações de adição e multiplicação por escalar, $T(v+w) = T(v)+T(w)$ e $T(kv) = kT(v)$, diz-se que esses espaços são isomorfos.

$T : V \to W$

$dimN(T) + dimIm(T) = dimV$

Toda transformação linear pode ser representada por uma matriz.

AUTOVALORES E AUTOVETORES

É uma transformação especial $T : V \to W$.

(I) $T(v) = \lambda v$

Onde, λ é o autovalor (escalar) e v é autovetor (se $v \geq 0$). Como toda transformação linear pode ser escrita pela multiplicação de uma matriz por um vetor então:

(II) $T(v) = Av$

Igualando (I) e (II), tem-se:

$Av = \lambda v$ ou $Av - \lambda v = 0$ que resulta no sistema homogêneo:

(III) $(A - \lambda I)v = 0$

Onde A é $n \times n$, $v = 0$ é sempre solução (trivial).

Os vetores $v \geq 0$ para os quais existe um λ que resolve a equação (III) são chamados de autovetores da matriz A e os valores de λ, que conjuntamente com v resolvem a equação são chamados de autovalores da matriz A associados aos respectivos autovetores. Para que a equação (III) tenha solução além da trivial é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja zero, ou seja,

$det(A - \lambda I) = 0$

o que resulta em um polinômio de grau n em λ, conhecido como polinômio característico. As raízes do polinômio característico são os autovalores da matriz A. Para se encontrar os autovetores basta substituir o valor do autovalor na equação original e encontrar o autovetor. O autovalor será, então, associado ao autovetor encontrado. Na verdade, o autovetor encontrado forma uma base para o espaço de solução da equação (III), dado o respectivo autovalor. Logo, qualquer múltiplo do autovetor também é um autovetor.

Observação 3.2.2 *1) Se λ é um autovalor de A, o conjunto $S\lambda$ de todos os vetores $v \in V$, inclusive v nulo, associados a λ, é um subespaço vetorial (próprio) de V.*

2) A matriz dos autovetores é chamada MATRIZ MODAL.

3.3 Formas lineares, bilineares e quadráticas

FORMAS LINEARES

Definição 3.3.1 *Seja V um espaço vetorial real. Uma forma linear é uma transformação linear* $f : V \to \mathbb{R}$

FORMAS BILINEARES

Definição 3.3.2 *Seja V um espaço vetorial real. Uma forma bilinear é uma aplicação* $B : V \times V \to \mathbb{R}$ *definida por* $(v,w) \to B(v,w)$*:*

i) Para todo w fixo, $B(v,w)$ *é uma forma linear em V, isto é,* $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$ *e* $B(\alpha v, w) = \alpha B(v,w)$

ii) Para todo v fixo, $B(v,w)$ *é uma forma linear em W.*

MATRIZ DE UMA FORMA BILINEAR

Definição 3.3.3 *Sejam V um espaço vetorial e* $B : V \times V \to \mathbb{R}$ *uma forma bilinear. Dada uma base de V,* $A = (v_1, v_2, ..., v_n)$*, associa-se a B uma matriz* $[B]$ *chamada MATRIZ DA FORMA BILINEAR NA BASE A, a matriz:*

$$\begin{bmatrix} B(v_1,v_1) & B(v_1,v_2) & ... & B(v_1,v_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ B(v_n,v_1) & B(v_n,v_2) & ... & B(v_n,v_n) \end{bmatrix}$$

Se

$$x = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + ...x_nv_n = 0$$

a forma bilinear pode ser escrita como:

$$B(x,y) = \mathrm{x}^T [B] \begin{matrix} A \\ \\ A \end{matrix} .y$$

FORMA BILINEAR SIMÉTRICA

$B : VxV \to \mathbb{R}$ é simétrica se $B(x,y) = B(y,x)$, $\forall\, x,y \in V$.

Teorema 3.3.1 *B é simétrica se e somente se* $[B] \begin{matrix} A \\ \\ A \end{matrix}$ *é uma matriz simétrica.*

FORMAS QUADRÁTICAS

Definição 3.3.4 *Seja V um espaço vetorial real e $B : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. A função $Q : V \to \mathbb{R}$ definida por $Q(v) = B(v, v)$ é chamada forma quadrática associada a B.*

3.4 Anéis

Definição 3.4.1 *Sejam $(A,+,.)$, onde A é um conjunto munido de duas operações. Dizemos que A é um anel, se:*

(i) + é associativa;

(ii) + possui elemento neutro (O elemento neutro de + será denotado por 0);

(iii) + possui elemento simétrico (O simétrico de um elemento a pertencente a A em relação a operação + será notado por -a);

(iv) + é comutativa;

(v) . é associativa;

(vi) . é distributiva em relação a +

Observação 3.4.1 *Se, além disso, ainda valer as condições abaixo, diremos, em cada caso, que:*

(vii) A é um anel comutativo, se . é comutativa

(viii) A é um anel com unidade, se a operação . possui elemento neutro distinto do elemento 0, o qual será chamado de unidade do anel e notado por 1.