UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DENYLSON DA SILVA PRADO RIBEIRO

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO MÉDIO COM O USO DO GEOGEBRA: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E SUAS APLICAÇÕES

MOSSORÓ/RN
2016

DENYLSON DA SILVA PRADO RIBEIRO

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO MÉDIO COM O USO DO GEOGEBRA: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E SUAS APLICAÇÕES

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-árido – UFERSA, campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Ronaldo Gomes Garcia

Co-orientador: Prof. MSc. Ricardo Antonio Faustino Da Silva Braz

MOSSORÓ/RN
2016

S896c Silva Prado Ribeiro, Denylson da.
Cálculo Diferencial de funções polinomiais no Ensino Médio com o uso do GeoGebra: fundamentação teórica e suas aplicações / Denylson da Silva Prado Ribeiro. - 2016.
61 f. : il.

Orientador: Profº Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia Gomes Garcia.
Coorientador: Profº MSc. Ricardo Antonio Faustino Da Silva Braz.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em , 2016.

1. Funções. 2. Polinômios. 3. Limites. 4. Derivadas. 5. Aplicações. I. Gomes Garcia, Profº Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia, orient. II. Silva Braz, Profº MSc. Ricardo Antonio Faustino Da, co-orient. III. Título.

DENYLSON DA SILVA PRADO RIBEIRO

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO MÉDIO COM USO DE GEOGEBRA: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E SUAS APLICAÇÕES

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM: 25 / 01 / 2016

BANCA EXAMINADORA

Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA
Presidente

Mauricio Zuluaga M

Dr. Mauricio Zuluaga Martinez - UFERSA
Primeiro Membro

Aleksandre Saraiva Dantas

Dr. Aleksandre Saraiva Dantas - IFRN
Segundo membro

MOSSORÓ/RN, 2016.

Dedico esse trabalho às minhas filhas, Ana Karine e Sofia, que são a razão do meu viver.

AGRADECIMENTOS

À Suiane Ferreira Felix, pessoa que amo. Ao seu lado me sinto vivo verdadeiramente. Obrigado pelo carinho, a paciência e com a sua capacidade trazendo-me paz.

À minha família, que acreditou na minha capacidade e investindo nos meus sonhos.

A minha Mãe, pelo cuidado e dedicação nos momentos difíceis, passando esperança no decorrer do caminho.

Ao meu Pai, tendo sua presença significativa me passando segurança e a certeza de que não estava sozinho nessa jornada.

Aos amigos e colegas do curso que estiveram juntos por toda essa jornada incentivando e apoiando constantemente.

Ao Profº MSc. Ricardo Antônio Faustino da Silva Braz pela paciência ao me orientar e o incentivo tornando possível a conclusão deste trabalho.

Ao Profº Dr. Antônio Ronaldo Gomes Garcia, professor e coordenador de curso, pelo convívio, apoio, compreensão e amizade.

Ao Profº Dr. Mauricio Zuluaga Martinez pelas excelentes aulas e pelo apoio durante o curso.

Aos professores do curso, no qual foram imprescindíveis em minha vida acadêmica e ao desenvolvimento do estudo.

A todos aqueles que colaboraram diretamente ou indiretamente, o nosso muito obrigado.

“A escada da Sabedoria tem os degraus feitos de números.” (Blavatsky)

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE SIGLAS

PCN	**Parâmetros Curriculares Nacionais**
SAEB	**Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica**
ENEM	**Exame Nacional do Ensino Médio**
TIC	**Tecnologia da Informação e Comunicação**

RESUMO

O presente trabalho Calculo Diferencial de Funções Polinomiais no Ensino Médio com o uso do GeoGebra: Fundamentação Teórica e suas Aplicações tem como objetivo apresentar os resultados de uma experiência com respeito ao ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio: noções de polinômios, limites, derivadas e aplicações apresentado com coerência e clareza. Nesse intuito, oferecemos uma maneira diversificada de abordar tais conceitos, por meio de uma série de atividades utilizando o software GeoGebra. De fato, isto ocorre, pois o GeoGebra é um software que oferece uma geometria dinâmica que possui uma janela algébrica e gráfica, simultaneamente, que oferta dinamismo e uma série de ferramentas específicas que possibilitam uma melhor visualização por parte dos alunos, além de apresentar um ambiente de fácil manipulação tanto para os alunos como para os professores. Na elaboração do trabalho foi feito uma pesquisa de cunho bibliográfico a partir de dados analisados em alguns artigos e livros de ensino médio, com o objetivo de conhecer conceitos e definições sobre o Cálculo desde o seu surgimento com Isaac Newton (1666) e Leibniz (1684), chegando às suas aplicações de hoje. Dessa forma, o presente trabalho visa relatar uma experiência docente que buscou formas de inserir o conceito de limite, derivadas e cálculo no ensino médio por meio de modelagem dinâmica usando o software GeoGebra.

Palavra-chave: Função, Polinômios, Limites, Derivadas.

.

ABSTRACT

This Calculation Differential work polynomial functions in high school with the use of GeoGebra: Theoretical Foundation and its Applications aims to present the results of a study concerning the teaching of differential calculus in high school: polynomials notions of limits, derivatives and applications being presented with consistency and clarity. In order we offer a diverse way in addressing these concepts through a series of activities using GeoGebra software. In fact, this occurs because the Dynamic Geometry has an algebraic and graphical window at the same time that dynamism supply and a number of specific tools that enable better viewing by students and presents an easy-handling environment for both students and for teachers. In preparing the work it was made a bibliographic nature of research from data analyzed in some articles and high school books in order to learn concepts and definitions of the calculation since the rise with Leibniz (1684) and Isaac Newton (1666) , reaching their applications today, aiming to show their applications, concepts and definitions. Thus, this paper describes a teaching experience that sought ways to insert the concept of limits, derivatives and calculus in high school through dynamic modeling using the GeoGebra software.

Keyword: Function, Polynomials, limit, Derivative.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo Rooney (2012), os primeiros registros da atividade matemática – além da arte de contar – datam de quatro mil anos atrás. Eles vieram dos deltas férteis do Nilo (Egito) e das planícies entre os dois rios, Tigre e Eufrates (Mesopotâmia, hoje Iraque). Sabemos pouco sobre os matemáticos individuais dessas primeiras culturas.

Por volta de 600 A.C, os gregos antigos desenvolveram um interesse pela matemática usando-a como ciência dedutiva e lógica. Eles foram além de seus predecessores porque estavam interessados em encontrar regras que pudessem ser aplicadas a qualquer problema de um tipo similar. Eles trabalharam com conceitos em matemática que vem a ser à base de tudo o que veio depois. Alguns dos maiores matemáticos de todos os tempos viveram na Grécia e no centro Helênico de Alexandria no Egito.

Outros povos também utilizaram conhecimentos matemáticos no desenvolvimento de suas culturas, como por exemplo, os egípcios que utilizaram os números e cálculos na construção de pirâmides, diques, canais de irrigação e estudos de astronomia e etc.

Dentro de nossa sociedade, percebe-se a presença da matemática em várias áreas, por exemplo: na Física, Química, Medicina, Arquitetura, Informática e entre outras. A matemática compreende uma constante busca pela veracidade dos fatos através de técnicas precisas e exatas, mantendo-se em constante transformação, averiguando novas situações e iniciando relações gerais com fatos do cotidiano.

Através do surgimento e sistematização do Cálculo Diferencial e Integral criado por Isaac Newton (1642 – 1727), e Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), criaram-se infinitas possibilidades de novas descobertas e aplicações, pois essa ferramenta Matemática estende-se a diversos campos das ciências, tanto exatas quanto humanas, mostrando, assim o grande potencial da descoberta, que tudo ao qual se olha existe a Matemática. Nesse contexto, é fácil observar que atividades cotidianas como ir ao supermercado, fazer um pagamento de contas requer a utilização de um cálculo prévio para saber quanto dinheiro tem e quanto devemos.

Na educação, a matemática, nos dias atuais, requer uma redefinição nos planos curriculares e métodos de ensino-aprendizagem que ofereçam capacidade de reflexão crítico e autônomo. O Cálculo Diferencial e Integral é uma das colunas da expansão tecnológica, tendo uma grande tradição no ensino acadêmico (ciências exatas).

Outra forma de implementação tecnológica na melhoria do ensino da matemática é o uso de ferramentas que venham a melhorar o aprendizado do aluno como o GeoGebra, que será utilizado nesse estudo sobre o Cálculo Diferencial e Integral para fins de melhorar o desempenho do aluno em relação a este conteúdo. Para RICHIT (2010) diante do exposto, fica evidente que o acesso às tecnologias deve ser propiciado aos alunos e em contrapartida, que seja promovida aos docentes formações, para que estes façam uso crítico e integre recursos tecnológicos em sua prática pedagógica.

Sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral isto não é diferente, pois muito se tem falado na introdução, disseminação e utilização das tecnologias digitais nesta disciplina, pois tal abordagem tem se mostrado relevante.

Entretanto, é visível que uma boa parte dos estudantes em Cálculo Diferencial e Integral não dispensa a devida atenção a esta disciplina, talvez por desconhecer a sua história. De fato, talvez seja essa a explicação da grande dificuldade apresentada. O Cálculo da forma como é apresentado nos dias atuais, em sala de aula, teve a contribuição de vários cientistas em diferentes épocas, os quais passaram a relatar definições e conceitos sobre Cálculo Diferencial e Integral.

Com este crescente aumento do uso dos softwares educativos foi possível verificar a importância das tecnologias digitais para o ensino e aprendizagem do Cálculo, que vem a ser uma disciplina fundamental em diversos cursos da área de exatas e tecnológicas.

Nos dias atuais é proposto que limites e derivadas possam ser inseridos nos currículos do Ensino Médio, protegendo a ideia da possibilidade de trabalhar suas noções. Com esse intuito, objetivo desse trabalho é sugerir um modelo de atividade para mostrar a necessidade que o estudante do Ensino Médio deva trabalhar com noções de Cálculo Diferencial e Integral durante esse nível de ensino, no qual facilitará o seu desenvolvimento nas universidades, principalmente nos cursos de Ciências Exatas e tecnológicas.

Na elaboração da pesquisa e respectivamente na coleta das informações foi utilizados livros de matemática do Ensino Médio além de artigos de estudiosos no assunto como AVILA (1991), CARVALHO (1996) e ROONEY (2012)

Gil (2008) relata que a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído de livros e artigos científicos. Não se recomenda trabalhos oriundos da internet.

O trabalho ao qual está sendo referido está estruturado em introdução e três capítulos. O trabalho inicia-se com a introdução, na qual se destaca a necessidade em que o aluno do Ensino Médio tem de trabalhar com as noções de limites e derivadas condizentes ao nível de ensino referido.

O Capítulo um, relatamos uma breve história do Cálculo Diferencial e Integral e o seu desenvolvimento ao longo dos anos, bem como abordaremos uma análise sobre Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio no Brasil. No Capítulo dois serão exploradas as ideias sobre de noções de limites e derivadas no Ensino Médio.

E por fim temos o Capitulo três, que menciona as definições e classificação das derivadas com o objetivo de aprofundar mais ainda o conteúdo desse trabalho. No mesmo capítulo tem-se dois exemplos de construção de Derivadas no aplicativo GeoGebra.

1. BREVE RELATO HISTÓRICO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

O cálculo diferencial foi idealizado inicialmente para atender às necessidades do homem – basicamente mecânicas – dos cientistas dos séculos XVI e XVII. O cálculo diferencial lidou com os problemas de calcular taxas de variações. Ele permitiu que os estudiosos definissem os coeficientes angulares de curvas, calcular somas infinitas, velocidade e a aceleração de corpos em movimento e determinasse os ângulos a que seus canhões em guerras deveriam ser disparados para obter o maior alcance. O cálculo integral lidou com os problemas de determinar uma função a partir de informações a respeito de sua taxa de variação.

O desenvolvimento do cálculo diferencial, com certeza é um dos grandes pontos de virada do relato histórico da matemática. O cálculo resolvia problemas que tinham preocupado os matemáticos por dois mil anos e abriu as portas para problemas que ninguém sabia que existiam.

O aparecimento do cálculo diferencial se deu a mais ou menos duzentos e cinquenta anos no período grego antigo onde houve o afloramento das ideias do mesmo. Na Grécia antiga, os gregos calculavam as áreas de regiões de qualquer polígono, no caso usavam-se os triângulos separando-se depois se somando as áreas obtidas.

Atualmente, o cálculo diferencial e suas ramificações na análise matemática, estão muito mais abrangentes e os físicos, matemáticos e astrônomos que estudaram essa disciplina ficaram surpresos e maravilhados, como se acredita que você também ficará, ao observar a quantidade de problemas que ele resolve, e a variedade de campos que utilizam – em modelos matemáticos que facilitam a compreensão do universo e do mundo ao nosso redor.

Proporciona-se ao cálculo diferencial uma maneira de medir taxas de mudanças e os efeitos das mudanças (*Calculus* é o nome em latim para uma pequena pedra usada para contagem). Ele se divide em duas partes que são o inverso uma da outra; diferenciação e integração. O primeiro teorema fundamental do cálculo é que aplicando diferenciação a uma integral, retorna-se à expressão original e vice-versa. Ambos são essencialmente métodos de aproximação, mas procura usar limites que fazem o erro envolvido (a imprecisão da aproximação) tender a zero. O princípio é mais fácil de entender quando ilustrado por um exemplo. Assim temos a Integração que calcula a área sob a curva de uma dada função traçando uma série de retângulos infinitesimalmente finos sob a curva e somando suas áreas.

O conceito de limite nos apresenta um grande paradoxo. No geral as principais definições do cálculo diferencial e integral tais como: derivada, continuidade, integral, convergência e divergência são definidas, em termos, a partir do conceito de limite.

Para Rooney (2012) o limite é o que distingue, no nível mais básico, o cálculo da álgebra, da geometria e das demais áreas da matemática. Portanto, em termos do desenvolvimento ordenado e lógico do cálculo, limites devem vir primeiro. Porém, o registro histórico é justamente o oposto. Por vários séculos, as noções de limite eram confusas, com ideias vagas e algumas vezes filosóficas sobre o infinito (números infinitamente grandes e infinitamente pequenos e outras entidades matemáticas) e com intuição geométrica subjetiva e indefinida.

O significado de limite no sentido moderno é um produto do movimento iluminista na Europa no final do século XVIII e início do século XIX, e o conceito moderno tem menos de 150 anos de idade. Até este período, existiram apenas raras ocasiões nas quais a ideia de limite foi usada rigorosamente e corretamente.

A primeira vez que o conceito de limite foi necessário foi para a resolução dos quatro paradoxos de Zenão (cerca de 450 a.C.). No primeiro paradoxo, a Dicotomia, Zenão colocou um objeto se movendo uma distância finita entre dois pontos fixos em uma série infinita de intervalos de tempo (o tempo necessário para se mover metade da distância, em seguida o tempo necessário para se mover metade da distância restante, etc.) durante o qual o movimento deve ocorrer. A conclusão surpreendente de Zenão foi que o movimento era impossível. Aristóteles (384-322 a.C.) tentou refutar os paradoxos de Zenão com argumentos filosóficos. Em matemática, uma aplicação cuidadosa do conceito de limite resolverá as questões levantadas pelo paradoxo de Zenão.

Para demonstrar rigorosas fórmulas para certas áreas e volumes, Arquimedes (287- 212 a.c.) encontrou várias séries infinitas– somas que contêm um número infinito de termos. Não possuindo o conceito de limite propriamente dito, Arquimedes inventou argumentos muito engenhosos chamados de redução ao absurdo duplo, que, na verdade, incorporam alguns detalhes técnicos do que agora chamamos de limite.

Ainda segundo Rooney (2012) a descrição do Cálculo Diferencial e Integral é, algumas vezes, relatada como o estudo de curvas, superfícies e sólidos. O desenvolvimento da geometria destes objetos floresceu seguindo a invenção da geometria analítica por Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650). A geometria analítica é, essencialmente, o casamento da geometria com a álgebra, uma complementando a outra. Fermat (1601-1665) desenvolveu um método algébrico para encontrar os pontos mais altos e mais baixos sobre certas curvas. Descrevendo a curva em questão por uma equação. Fermat chamou um número pequeno de E, e então fez alguns cálculos algébricos legítimos, e finalmente assumiu $E = 0$ de tal maneira que todos os termos restantes nos quais E estava presente desapareceriam. Essencialmente, Fermat colocou de lado o limite com o argumento que E é "infinitamente pequeno". Geometricamente, Fermat estava tentando demonstrar que, exatamente nos pontos mais altos e mais baixos ao longo da curva, as retas tangentes à curva são horizontais, isto é, têm inclinação zero.

Encontrar retas tangentes a uma curva é um dos dois problemas mais fundamentais do cálculo diferencial. Problemas envolvendo tangentes a uma curva é uma parte do que chamamos agora de estudo das derivadas.

Durante o século XVII, vários geômetras desenvolveram esquemas algébricos complicados para encontrar retas tangentes a certas curvas. Descartes desenvolveu um processo que usava raízes duplas de uma equação auxiliar, e essa técnica foi melhorada pelo matemático Johan Hudde (1628-1704), que era também o prefeito de Amsterdam. René de Sluse (1622-1685) inventou um método ainda mais complicado para obter tangentes a curvas. Em cada um desses cálculos, o limite deveria ter sido usado em alguma etapa crítica, mas não foi. Nenhum destes geômetras constatou a precisão da ideia de limite, e assim cada um encontrou uma maneira inteligente para alcançar seus resultados, os quais estavam rigorosamente corretos, mas que com meios que, agora reconhecemos, faltam fundamentos.

1.1 Práticas Curriculares do Ensino Médio no Brasil: Cálculo Diferencial e Integral e Polinômios

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (2001), o currículo do Ensino Médio deve ser estruturado de modo a assegurar ao aluno a possibilidade de ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental de forma integrada com outras áreas do conhecimento e orientada pela perspectiva histórico-cultural na qual estão ligados os temas em estudo. Isto é proposto visando à preparação do aluno para o trabalho e exercício da cidadania e também a continuação de seus estudos em níveis superiores.

Considerando a disciplina de Matemática, resultados de avaliações institucionais como o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica) e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), promovidos pelo Governo Federal, revelam que muitos alunos terminam o Ensino Médio com dificuldades em conceitos e procedimentos fundamentais, tais como operar com números reais, interpretar gráficos e tabelas, dentre outras coisas. Surge, assim, a seguinte questão: Por que não preparar esses alunos no Ensino Médio, com a inclusão de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, com estratégias que contemplem a interdisciplinaridade e tornem mais amplo o aprendizado dos conteúdos? O professor Geraldo Ávila (1991), em artigo publicado na Revista do Professor de Matemática, questiona a inclusão de tópicos do Cálculo no Ensino Médio:

> Por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por que? Como fazer isso? (ÁVILA, 1991, p.1)

No Brasil, uma introdução ao Cálculo Diferencial e Integral já fez parte do currículo das escolas secundárias por duas vezes, segundo Carvalho (1996) a primeira em 1891, com a reforma proposta por Benjamim Constant no início da República e uma segunda vez, no governo de Getúlio Vargas, na Reforma Capanema, em 1942, constando do currículo escolar oficialmente até 1961.

Nas décadas de 60 e 70, o ensino de matemática no Brasil e em outros países foi influenciado pelo movimento da Matemática Moderna e, como consequência, houve a exclusão de alguns conteúdos dos antigos programas, dentre eles o cálculo.

Atualmente, alguns livros didáticos do Ensino Médio apresentam tópicos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral, como limite, derivada e integral. Entretanto, esses temas, na maioria das vezes, não são ensinados sob o pretexto de serem difíceis e impróprios a esse segmento da educação, devendo ficar restritos ao Ensino Superior. Assim sendo, o Cálculo Diferencial e Integral faz parte do livro didático, mas não do currículo do Ensino Médio.

Ainda segundo Ávila (1996), “o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções”. Para Ávila, o ensino da derivada é de grande importância, pelo tanto que ajuda no tratamento de inúmeras propriedades das funções. Seu ensino iniciado na primeira série do Ensino Médio pode se integrar harmoniosamente com a física no estudo da velocidade e aceleração por exemplo. As definições inseridas, por exemplo, de derivada no Ensino Médio não torna o conteúdo relativo a funções mais longo, como pode parecer a princípio. Pelo contrário, a compreensão de algumas propriedades se dá de maneira mais natural e contextualizada.

A introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Na física, por exemplo, ela tem inúmeras utilidades na introdução de conceitos como pressão, densidade da massa, intensidade de carga elétrica etc. A meu ver, o Cálculo Diferencial e Integral é ferramenta importante para a contextualização da Matemática e para a compreensão da física e a falta desse tópico no Ensino Médio torna para o aluno a física mais difícil do que realmente parece ser e a Matemática sem importância prática. Exemplo disso é o ensino da mecânica newtoniana, ensinado no Ensino Médio que nasceu junto com o Cálculo e é ensinado sem nenhuma conexão com os conceitos matemáticos.

Mas como introduzir o Cálculo no Ensino Médio? O professor Geraldo Ávila no mesmo artigo já citado diz que “... a ideia de que os programas de matemática são extensos e não comportariam a inclusão do cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão isto sim, mal estruturado” (ÁVILA, 1991).

Introduzir conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio auxilia na compreensão de algumas propriedades, entre elas o limite de uma função, ferramenta indispensável para a compreensão de fenômenos físicos, como velocidade instantânea, força, entre outros. Desse modo, a falta desse conteúdo no Ensino Médio, torna a física mais complexa do que realmente aparenta ser. Desta forma, é importante preparar os alunos no Ensino Médio, com a inclusão de conceitos de limite de uma função, por exemplo, com estratégias que tornem mais amplo o aprendizado dos conteúdos.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008, p. 69), preconizam que os alunos concluintes do Ensino Médio saibam;

> Usar Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento, compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; caibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento cientifico e tecnológico.

Para Dominguini, Gomes, Alves, (2011) devido algumas justificativas tais como falta de tempo para trabalhar o conteúdo, conteúdo muito difícil para o ensino médio, os professores acabam por não abordando em suas aulas o cálculo diferencial e integral. O cálculo diferencial e integral passou a fazer parte do livro didático, mas não do currículo de Ensino Médio, o que o torna então, pouco valorizado, gerando assim, deficiências na aprendizagem que acabam refletindo no Ensino Superior.

Ávila (1991 *Apud* Dominguini, Gomes, Alves, 2011) destaca que a justificativa que os programas de matemática são extensos e não comportariam a inclusão do cálculo é um equivoco. Segundo Ávila os programas estão mal estruturados. Para o autor, os professores insistem em exercer programas longos, com conteúdos fragmentados sem significados. Em sua opinião, aproveitar o tempo com o ensino das noções básicas do cálculo diferencial e integral e suas aplicações seria mais proveitoso.

A aprendizagem de conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio é algo que está ao alcance dos alunos desse nível de ensino. Ascender a esse conhecimento é de suma importância, pois esse conteúdo se encontra altamente conexo com a ciência moderna, bem como a exploração de competência e habilidades matemáticas que possam a vir ser desenvolvidas pelos próprios alunos. Sobre isso, Ávila (1991, p. 2) menciona que:

> O cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento cientifico-tecnológico. Portanto, descarta-lo no ensino é grave, porque deixar de lado uma competente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.

O estudo de matemática nos ensinos fundamental e médio é baseado na aritmética, geometria e a álgebra. Polinômio, como conteúdo basicamente algébrico, é trabalhado na 6ª e 7ª séries do Ensino Fundamental e muito utilizado a partir daí envolvendo outros conteúdos nas séries subsequentes. Na verdade trata-se de um conteúdo onipresente em matemática, por isso é de suma importância que os alunos o dominem com segurança.

Os próprios livros didáticos expressam maior ênfase no processo e método que no conceito (utilizando exercícios maçantes e repetitivos), o que não propõe o PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) que sugere a ênfase no conceito e em sua importância e não em gravar métodos de resolução.

2. TEORIA E FUNDAMENTO DOS POLÍNÔMIOS

2.1 Definição

Dados os números complexos a_n,a_{n-1}·,$a_{n-2,}$....$a_{2,}a_1$e a_0, denomina-se função polinomial ou, simplesmente, polinômio à função dada por:

$$P\ (x) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ ... + a_1X + a_0$$

Segundo Giovanni e Bonjorno (2005), No polinômio P, temos:a_n,a_{n-1}, $a_{n-2,}$, ..., a_2, a_1, a_0 são coeficientes, a_nX^n, $a_{n-1}X^{n-1}$, ...,a_1X, a_0 são termos do polinômio desta forma,a_0 é o termo independente de X.

2.2 Grau de um polinômio

Se $a_n \neq 0$, o expoente máximo n é dito grau do polinômio: gr(P) = n. veja o exemplo:

P (X)= 7 ou P(X) = $7x_o$. É um polinômio constante, isto é, gr (P) = 0.

P(x) = 2x – 1 é um polinômio de grau 1, isto é, gr (P) = 1.

P(x) = $\sqrt{3}x^5$ + ix^4 é um polinômio de grau 5, isto é, gr (P) = 5.

P(x) = 0; se todos os coeficientes são nulos não se define o grau do polinômio.

As funções f(x) = $3x^{-4}$+ x² - 5 e g(x) = x^5 + $x^{3/4}$ – 1 não são polinômios, pois em cada uma delas há pelo menos um expoente da variável que não é número natural.

2.3 Adição, subtração e multiplicação de polinômios

A soma, a diferença e o produto de duas funções polinomiais complexas são, também funções polinomiais complexas. As operações da adição, subtração e multiplicação de polinômios, será abordada em exemplos do tipo: se A(x) e B(x) são funções polinomiais, quando A(x) e B(x) possuem graus diferentes, o grau de A(x) + B(x) ou A(x) – B(x) é igual ao maior entre os graus de A(x) e B(x), ou A(x) e B(x) forem de mesmo grau, o grau de A(x) + B(x) ou de A(x) – B(x) pode ser menor ou igual ao grau dos polinômios A(x) e B(x) ou o polinômio resultante pode ser nulo. O grau de A(x) . B(x) é a soma dos graus de A(x) e B(x).

Considere as funções polinomiais $A(x) = x^3 + 2x^2 + x$ e $B(x) = x^2 + x + 1$

Calcule:

a) A(x) + B(x)

b) A(x) – B(x)

c) A(x) . B(x)

Na resolução abaixo se calcula a soma adicionando os coeficientes dos termos semelhantes:

$A(x) + B(x) = (x^3 + 2x^2 + x) + (x^2 + x + 1)$

$A(x) + B(x) = x^3 + 2x^2 + x + x^2 + x + 1$

$A(x) + B(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Observa-se que o grau da soma polinomial, é igual ao grau do polinômio de maior grau, ou seja, o mesmo do polinômio A(x).

No cálculo da diferença de polinômios subtraímos os valores dos coeficientes dos termos semelhantes:

$A(x) - B(x) = (x^3 + 2x^2 + x) – (x^2 + x + 1)$

$A(x) - B(x) = x^3 + 2x^2 + x – x^2 - x - 1$

$A(x) - B(x) = x^3 + x^2 - 1$

Tendo em vista a operação de subtração, nesses casos, o grau do polinômio é igual ao grau polinomial A(x). Ao calcularmos o produto de polinômios, aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação:

$A(x) . B(x) = (x^3 + 2x^2 + x) (x^2 + x + 1)$

$A(x) .B(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x^3 + x^2 + x$

$A(x) .B(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x$

Observamos que o grau do produto é a soma dos graus de A(x) e B(x), isto é, 3 + 2 = 5.

2.4 Polinômio identicamente nulo

Denomina-se polinômio identicamente nulo o polinômio que tem todos os seus coeficientes nulos. Indicamos por P(x) = 0 (lê-se: P(x) é idêntico à zero)

Seja o polinômio $P(x) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$

Se P(x) = 0, então:

$a_n = 0$
$a_{n-1} = 0$
...
$a_1 = 0$
$a_0 = 0$

2.5 Identidade de polinômios

Considerem-se os polinômios $A(x) = x^2 + 3$ e $B(x) = x – 1$. Calcula-se o valor numérico desses polinômios para x = 1:

$A(x) = x^2 + 3$	$B(x) = x - 1$
$A(1) = 1^2 + 3$	$B(x) = 1 - 1$
$A(1) = 1 + 3 = 4$	$B(1) = 0$

Observe que como $A(x) \neq B(x) \rightarrow A(1) \neq B(1)$.

Consideram-se agora os polinômios $A(x) = x^2 - 1$ e $B(x) = (x + 1)(x – 1)$. Observe que, qualquer que seja o número complexo $\propto$, teremos:

$A(x) = x^2 - 1$	$B(x) = (x+1)(x – 1)$
$A(\propto) = \propto^2 - 1$	$B(x) = (\propto + 1)(\propto - 1) = \propto^2 - 1$

Neste caso, diz-se que os polinômios A(x) e B(x) são idênticos, pois assumem valores numéricos iguais para quaisquer valores atribuídos à variável x.

Indicamos $A(x) \equiv B(x)$.

$$A(x) \equiv B(x) \rightarrow A(\propto) = B(\propto)$$

Considere os polinômios:

$A(x) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$

$B(x) = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + ... + b_1X + b_0$

Então, $A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow A(x) - B(x) \equiv 0$

Ou seja: $(a_n – b_n) X^n + (a_{n-1} – b^{n-1}) X^{n-1} + ... + (a_1 – b_1) X + (a_0 – b_0) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{C}$

Nesse caso, o polinômio do 1º membro deve ser nulo e, como já vimos isso ocorre para:

$a_n – b_n = 0 \Leftrightarrow a_n = b_n$

$a_{n-1} – b_{n-1} = 0 \Leftrightarrow a_{n-1} = b_{n-1}$

...

$a_1 – b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = b_1$

$a_0 – b_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = b_0$

2.6 Divisão de polinômios

Dividir um número inteiro D por outro inteiro d ($d \neq 0$) consiste em encontrar dois inteiros q e r, com $0 \leq r < d$, tais que:

$$D = d.\, q + r$$

Da mesma forma, efetuar a divisão do polinômio A(x) pelo polinômio B(x), com $B(x) \neq 0$, é determinar dois polinômios Q(x) e R(x) que satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{cases} A(x) \equiv Q(x).\, B(x) + R(x) \\ gr(R) < gr(B) \text{ ou } R(x) = 0 \end{cases}$$

Sendo: A(x) o dividendo, B(x) o divisor, Q(x) o quociente e R(x) o resto da divisão. Quando A(x) é divisível por B(x) é divisor de A(x), dizemos que a divisão é exata, isto é R(x) = 0.

Método das chaves

O método da chave consiste em efetuar a divisão, escrevendo os polinômios (dividendo e divisor) em ordem decrescente dos seus expoentes completando-os, se for necessário, com termos de coeficientes zero. Dividindo o termo de maior grau do dividendo com o de maior grau no divisor, tem-se o resultado de um termo do quociente. Próximo passo é multiplicar o termo obtido pelo divisor e subtrair esse produto do dividendo. Se o resultado for de grau menor que o do divisor a divisão terminará e esse polinômio será o resto da divisão. Caso o grau seja, ainda, maior que o do divisor, repetiremos o procedimento até encontrar um polinômio de grau menor que o divisor.

Exemplo:

$$
\begin{array}{r|l}
6x^3 - 13x^2 + x + 3 & 2x^2 - 3x - 1 \\ \cline{2-2}
-6x^3 + 9x^2 + 3x & 3x - 2 \\ \cline{1-1}
-4x^2 + 4x + 3 & \\
4x^2 - 6x - 2 & \\ \cline{1-1}
-2x + 1 &
\end{array}
$$

Imagem 1 – Método das chaves

2.7 Método dos coeficientes a determinar

Pode-se aplicar a identidade de polinômios A(x) ≡ Q(x) . B(x) + R(x) para determinar qualquer dos polinômios que compõem a divisão de A(x) por B(x).

Exemplo:

$$
\begin{array}{r|l}
+x^4 - x^3 + 0x^2 + 2x - 1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - x^3 - x^2 + 0x + 0 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{1-1}
-2x^3 - x^2 + 2x - 1 & \\
+2x^3 + 2x^2 + 2x + 0 & \\ \cline{1-1}
x^2 + 4x - 1 & \\
-x^2 - x - 1 & \\ \cline{1-1}
3x - 2 &
\end{array}
$$

Imagem 2 – Método dos coeficientes a determinar

2.8 Divisão de um polinômio por um monômio na forma (ax + b)

O caso mais importante da divisão de polinômios é aquele em que o divisor é da forma x - α.

$$P(x) = (x - \alpha)\ Q\ (x) + r$$

Fazendo-se x = α, vem: $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)\ Q(\alpha) + r \Rightarrow P(\alpha) = r$.

Note que x = α é a raiz do divisor. Assim, pode-se dizer que o resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio (x-α) é igual a P(α). Uma consequência do que foi exposto é o chamado teorema de D'Alembert.

O Polinômio P(x) é divisível por x – α se, e somente se, P(α) = 0. Se P(x) é divisível por x – α, temos r = P (α) = 0, isto é, x = α é uma das raízes reais de P(x). Reciprocamente, se P(α) = 0, pode-se afirmar que P(x) é divisível por x – α, pois P(α) = r = 0.

2.9 Dispositivo de Briot-Ruffini

Agora vamos mostrar uma forma prática para efetuar a divisão de um polinômio por um binômio da forma (x – a). Para isso considera-se o polinômio.
$P(x) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$. E sejam $Q(x) = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + ... + b_1X + b_0$ e $r(x) = r_0$. O quociente e o resto da divisão de P(x) por (x – a). Assim se tem: $P(x) = Q(x)\ (x - a)^n + r_0$. Efetuando a multiplicação do segundo membro vem:
$Q(x)\ (x - a)^n = b_{n-1}\ X^{n-1} . X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})\ X^{n-1} + ...+ (b_0 - ab_1)\ X + (r_0 - ab_0)$
Igualando os coeficientes, obtêm: $b_{n-1} = a_n$
$b_{n-2} - ab_{n-1} = a_{n-1} \Rightarrow b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1} \dots r_0 - ab_0 = a_0 \Rightarrow r_0 = a_0 + ab_0$

O procedimento efetuado pode ser colocado na seguinte forma prática, chamada dispositivo de Briot-Rufini.

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_1	b_0	r_0

Imagem - 3 Dispositivo Briot-Rufini

3. NOÇÕES DE LIMITE E DERIVADAS

O conceito de Limite é fundamental em todo o Cálculo Diferencial e Integral, um campo da Matemática que se iniciou no século XVII com os trabalhos de Isaac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646- 1716) para resolver problemas de Mecânica e Geometria O Cálculo Diferencial e Integral é aplicado em vários campos, como em Astronomia, Engenharia, Física, Química, Geologia, Biologia e entre outros.

Seja função f(x) = 2x + 1. Analisando os valores da função f quando x assume valores próximo de 1, mas diferentes de 1.

Atribuindo a x valores próximo de 1, porém menores que 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

Imagem 4 – Limite na Função f(x)

Ao atribuir a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002

Imagem 5 – Limite na Função f(x)

Observa-se em ambas as tabelas que, quando x se aproxima cada vez mais de 1, tanto pela esquerda quanto pela direita, f(x) aproxima-se cada vez mais de 3, isto é , quanto mais próximo de 1 estiver x, tanto mais próximo de 3 estará f(x). Daí dizemos que $lim_{x \to 1}\ f(x) = 3$.

3.1 Propriedades dos limites

Iremos relatar algumas propriedades que admiti verdadeiras sem efetuar-mos suas demonstrações. Considera-se, então, as funções f(x) e g(x), definidas num domínio D tal que:

$\lim_{x \to x_0}$ f(x) = a; $\lim_{x \to x_0}$ g(x) = b e dada uma constante k real

3.1.2 Limite da constante

O Limite de uma constante é a própria constante, isto é, $\lim_{x \to x_0}$ k = k.

$EX: \lim_{x \to 2} 5 = 5$

3.1.3 Limite da soma

O limite da soma de duas funções é igual à soma dos limites dessas funções, isto, é:

$\lim_{x \to x_0}$[f(x) + g(x)]= $\lim_{x \to x_0}$ f(x) + $\lim_{x \to x_0}$ g(x) = a + b

Exemplos: $\lim_{x \to 2}$(x + 3) = $\lim_{x \to 2}$ x + $\lim_{x \to 2}$ 3 =2 + 3 = 5

3.1.3 Limite da diferença

O limite da diferença de duas funções é igual a diferença dos limites dessas funções, isto é: $\lim_{x \to x_0}$ f (x) - g (x) = $\lim_{x \to x_0}$ f (x) - $\lim_{x \to x_0}$ g (x) = a – b

Exemplos:

$\lim_{x \to 2}$ ($4x^2$ – x) - $\lim_{x \to 2}$ $4x^2$ – $\lim_{x \to 2}$ x = 4. 2^2 - 2 = 16 – 2 = 14

3.1.5 Limite do produto

O limite do produto de duas funções é igual ao produto dos limites dessas funções, isto é: $\lim_{x \to x_0}$ f (x). g (x) = $\lim_{x \to x_0}$ f (x). $\lim_{x \to x_0}$ g (x) = a. b

Exemplos:

$\lim_{x \to 2}$ $3x^2$ = $\lim_{x \to 2}$ 3. $\lim_{x \to 2}$ x^2 = 3.2^2 = 12

$\lim_{x \to 2}$[4 x $\sqrt{2x}$] = $\lim_{x \to 2}$ 4x. $\lim_{x \to 2}$ $\sqrt{2x}$ = (4.2). ($\sqrt{2.2}$) = 8. 2 = 16

3.1.6 Limite do quociente

O limite do quociente de duas funções é o quociente dos limites dessas funções (exceto quando o limite do divisor for igual a zero), isto é:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b} \quad \text{com } b \neq 0$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x+4} = \frac{\lim_{x \to 2} x+3}{\lim_{x \to 2} x+4} = \frac{2+3}{2+4} = \frac{5}{6}$$

3.1.7 Limite da potência

O limite de uma potência enésima de uma função é igual à potência enésima do limite dessa função, isto é: $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^n = a^n$.

Exemplos: $\lim_{x \to 1} (5x)^2 = (\lim_{x \to 1} 5x)^2 = (5.1)^2 = 25$

3.1.8 Limite da raiz

O limite da raiz enésima de uma função é igual a raiz enésima do limite dessa função, $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{a}$, se $a \geq 0$ e $n \in N^*$ ou se $a \leq 0$ e n ímpar.

Exemplo: $\lim_{x \to 3} \sqrt{4x} = \sqrt{\lim_{x \to 3} 4x} = \sqrt{4.3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

3.1.9 Limite da função polinomial

O limite da função polinomial $f(x) = a_n x_0 + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ definida em R, quando x tende a x_0 é igual a $f(x_0)$, isto é: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemplos: $\lim_{x \to 1} (4x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 4 - 2 - 5 + 6 = 3$

3.2 Função continua

Consideramos o gráfico das funções:

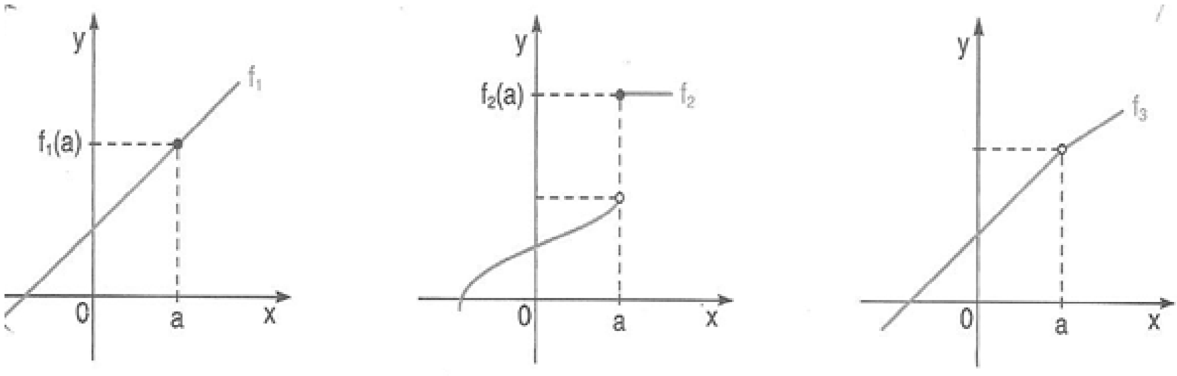


Imagem 6 – Gráficos de Funções

Observe que a cada x do domínio de f, associamos um único valor de y e também que o gráfico de f, não é interrompido para x = a, isto é, o gráfico pode ser desenhado de uma só vez, sem levantar a ponta do lápis do papel. Dizemos então, que a função f, é contínua para x = a.

Como os gráficos das funções f_2 e f_3, não podem ser desenhadas sem se levantar a ponta do lápis do papel, isto é, os gráficos são interrompidos para x=a . Dizemos que a função f_2 é descontínua para o valor de x =a, e que $f_2(a)$ é um ponto de descontinuidade da função.

Para que uma função f(x) seja contínua em x=a, do seu domínio, devem ser satisfeitas as seguintes condições:

1º) existe f (a) 2º) existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 3º) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Note que para a função f não existe $\lim\limits_{x \to a} f_2(x)$ e f_3 não esta definida para x =a. Daí temos que: Uma função f(x) definida em um intervalo I com a $\in$ I, é dita contínua em x =a, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

3.3 Derivadas

Estudaremos a seguir as derivadas de funções polinomiais, algumas regras de derivação e aplicações no estudo de funções polinomiais e em problemas de geometria, cinemática entre outros.

A derivada de uma função é dada por:

$$f'(x0) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Seguem nas explicações abaixo algumas regras que nos permitirem calcular mais facilmente a derivada de uma função f. Algumas mais elementares serão admitidas sem demonstração.

3.3.1 Derivada da função constante

Se f tem o valor constante f(x) = c, então f'(c) = 0.
Exemplo 1. Se f tem o valor constante f(x) = 8, então f'(8) = 0.

3.3.2 Derivada da função potência

A função potência é qualquer função da forma $f(x) = x^n$, onde n é um número natural tem derivada definida por:

$$f'(x) = n\,x^{n-1}$$

3.3.3 Derivada da soma ou diferença entre funções

Sejam u (x) e v (x) duas funções tais que $u'(x)$ e $v'(x)$ existem. São válidas as seguintes propriedades, que admitiremos sem demonstração:

Se f(x) = u (x) + v(x), então $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ ou Se f(x) = u (x) - v(x), então $f'(x) = u'(x) - v'(x)$. Isto é, se as funções u (x) e v (x) são deriváveis, a derivada da soma ou da diferença é igual à soma ou à diferença das derivadas de cada uma das funções.

3.3.4 Derivada do produto de uma constante por uma função

Se g(x) =k.f (x), sendo k uma constante e f(x), derivável, então $g^{'}(x) = k. f'(x)$

Exemplos: $g(x) = 5\,x^3 \Rightarrow g'(x) = 5.(3.\,x^{3-1}) = 15\,x^2$

3.3.5 Derivada do um produto entre funções

Se f (x) = u (x). v (x), então f' (x) = u'. v +u. v'.

Exemplo

Usando a Regra do Produto encontre a derivada de $f(x) = (2x^2 + 1)^2\,(x^2 + 3x)$.

Aplicando a regra da derivada do produto de funções temos:

$f(x) = (2x^2 + 1)\,(x^2 + 3x)$

$f'(x) = (4x)\,(x^2 + 3x) + (2x^2 + 1)\,(2x + 3)$

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 3$

$f'(x) = 8x^3 + 18x^2 + 2x + 3$

3.3.6 Derivada de um quociente entre funções

Se $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, com $v(x) \neq 0$, então $f^{'}(x)$ é dada por:

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Exemplo: Determine a derivada da função $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1'}{3x+2}$

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1'}{3x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(6x+1)(3x+2) - \left(2x^2 + x - 1\right).3'}{(3x+2)^2} =$$

$$= \frac{18x^2+12x+3x+2-6x^2-3x+3'}{(3x+2)^2} = \frac{12x^2+12x+5'}{(3x+2)^2}$$

3.3.7 Derivada da função polinomial

A derivada da função polinomial é obtida derivando cada monômio que compõe o polinômio. Usando o fato que a derivada da soma é a soma das derivadas. Dada a função polinomial $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x^1 + a_0$, tem-se a derivada de f dada por: $f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$

Exemplo: Dada a função $f(x) = 2x^3 + x – 6$. Determine sua derivada.

$$f(x) = 2x^3 + x - 6 \Rightarrow f'(x) = 3.\ 2x^{3-1} + 1.\ x^{1-1} - 0 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 1$$

3.3.8 Derivada da função composta ou Regra da Cadeia

Dada a função composta definida por $f(x) = u(v(x))$, se as derivadas $u'(x)$ e $v'(x)$, existem, então temos: *$f'(x) = u'[v(x)].\ v'(x)$*

Exemplo 1: Se $y = g(u) = u^3 + 1$ e $u = f(x) = 4x + 5$, a função composta $h(x) = g(f(x)) = (4x + 5)^3 + 1$. A derivada de h calculada no ponto $x = 1$ será: $h'(x) = g'(f(x))\ f'(x) = 3(4x + 5)^2 .\ 4$ e, então calcular o valor desta nova função no ponto $x = 1$. Assim, obteremos, como anteriormente: $h'(x) = 3.(9^2).4 = 972$.

3.5 Taxa de variação média

Considera-se o gráfico da função $y = f(x)$

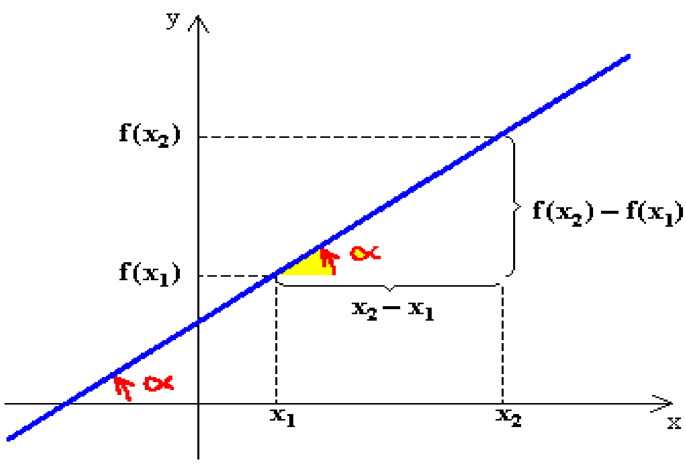


Imagem 7 – Exemplo de função

Denomina-se taxa de variação média da função y = f(x), no intervalo (x_1, x_2), ao quociente:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ com } x_2 > x_1$$

A variação de y é $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ e a variação de x de $\Delta x = x_2 - x_1$. A taxa de variação média corresponde, então, à variação de y por unidade de x, em média, entre x_1 e x_2. Ao observar que a taxa de variação média de uma função em um intervalo é o coeficiente angular do segmento cujos extremos são os pontos (x_1, f (x_1)) e (x_2, f(x_2))

$$m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Por exemplo, no gráfico a seguir a taxa de variação média da função y = f(x) entre $x_1 = 3$ e $x_2 = 7$ é:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{17-5}{7-3} = \frac{12}{4} = 3$$

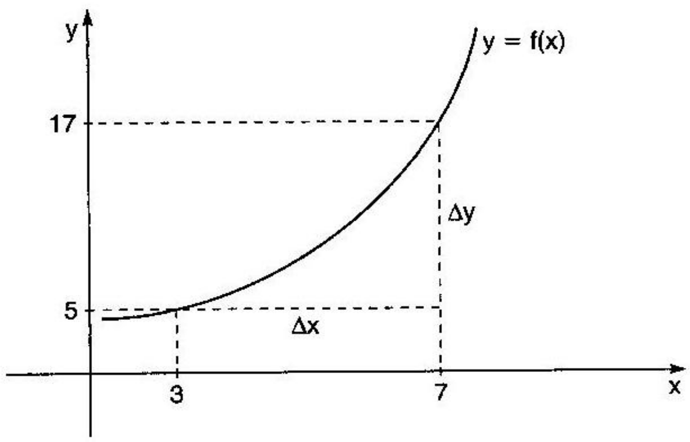


Imagem 8 – Taxa de variação média

3.6 Velocidade escalar instantânea

Determinado carro percorre um trecho de estrada entre duas cidades. Sabe-se que o carro não mantém sempre a mesma velocidade durante o trajeto, isto é, sua velocidade varia com o tempo.

Na prática, ao analisar o movimento do carro é interessante conhecer e tratar o movimento de uma forma global e não detalhar esse estudo em cada ponto da estrada. A velocidade escalar média (v_m) é uma transformação sobre o movimento global. Para obtê-la, divide-se a distância total percorrida pelo tempo gasto na viagem.

$$V_m = \frac{\Delta S\cdot}{\Delta T}$$

Como exemplo, imagine que, numa viagem de São Paulo a são José dos Campos, um carro percorreu a distância de 100 km em 2 horas.

$$V_m = \frac{100\cdot}{2} = 50Km/h$$

É obvio que, durante o trajeto, a velocidade do carro, em cada instante, às vezes foi maior e outras vezes foram menores do que 50 km/h. A velocidade escalar média representa a velocidade constante que o carro deveria manter para, partindo da posição inicial, chegar à posição final, gastando o mesmo tempo.

À medida que Δt diminui e se aproxima de zero no limite, a velocidade escalar média aproxima-se da velocidade escalar instantânea do carro.

$$V_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} Vm$$

O cálculo desse limite é a função matemática chamada derivada da função s = f (t). Do exposto pode-se definir que velocidade escalar instantânea é a derivada das funções horárias das posições s = f(t) em relação ao tempo.

Algebricamente, tem-se: $V = \frac{dS}{dT}$ ou $v = s'(t)$. Se a função horária das posições for do tipo $s(t) = at^n + bt + c$, tem-se: $V = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = nat^{n-1} + b$. O valor da velocidade escalar instantânea quando t = o (origem dos tempos) é denominada velocidade escalar instantânea inicial. Indica-se por V_0. Nesse caso, observa-se que: $t = 0$ e $v_0 = b$

3.7 Aceleração escalar instantânea

O conceito de aceleração é introduzido de maneira análoga ao de velocidade, ela mede a variação da velocidade em relação ao tempo. A aceleração escalar média a_m do carro durante o intervalo de tempo Δt é a variação da velocidade dividida pelo intervalo de tempo, isto é: $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. À medida que Δt diminui e se aproxima do zero, no limite, a aceleração escalar média a_m aproxima-se da aceleração escalar instantânea a do carro, isto é:

Usando o conceito de derivada, é correto afirmar que aceleração escalar instantânea é a derivada da velocidade escalar instantânea v = f (t) em relação ao tempo. Algebricamente, tem-se:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{ou} \quad a = v'(t) \quad \text{ou} \quad a = s''(t).$$

A aceleração escalar instantânea é a derivada primeira de v = f (t) ou a derivada segunda de s = f(t). A palavra instantânea pode ser subentendida e usarmos apenas velocidade escalar e aceleração escalar.

Exemplo.

	v_1	v_2	Δv	Δt	$\frac{\Delta v}{\Delta t}$
1º carro	5	30	25 m/s	20 s	1,25 m/s²
2º carro	5	30	25 m/s	5 s	5 m/s²

Imagem 9 – Velocidade escalar/ Aceleração escalar

Suponha-se que dois carros em movimento, cada um com velocidade de 5 metros por segundo. Em um determinado tempo, mais tarde, cada um está viajando a 30 metros por segundo. Entretanto, um carro requer 20 segundo para fazer essa mudança e o outro necessita de 5 segundos. Desta forma temos: Aceleração média é dada pela razão, $\frac{\Delta v}{\Delta t}$., observando a tabela percebe-se que a última coluna mostra a aceleração média durante o intervalo de tempo onde aceleração média do 1º carro: 1,25m/s^2 e a do 2º carro: é 5m/s$^{2.}$

3.8 Valores máximos e mínimos de funções polinomiais

Uma aplicação importante do Cálculo é o estudo de máximos e mínimos de funções, de situações onde a reta tangente ao gráfico é horizontal, isto é, estudo de pontos em que a derivada se anula. Também existem pontos de máximo ou de mínimo em pontos onde a derivada não se anula, quando os pontos estão nas extremidades do intervalo de definição da função. Assim temos que dada à função derivável f e se f'(c) = 0, dizemos que c é um ponto crítico de f. Exemplo:

$f(x) = x^2$, definida sobre [-1,2], possui x=0 como ponto crítico, pois f '(0)=0.

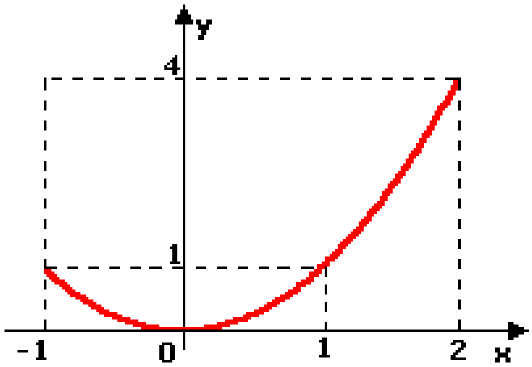


Imagem 10 – Gráfico da função $f(x) = x^2$, definida sobre [-1,2]

Se uma função f possui um ponto de extremo (máximo ou mínimo) local em x = c e a função f é derivável neste ponto, então x = c é um ponto crítico, isto é, f '(c) = 0.

Pelo teorema, se x = c é um ponto de extremo local para f, a derivada de f se anula e passa uma reta tangente horizontal à curva y = f (x) no ponto (c, f(c)).

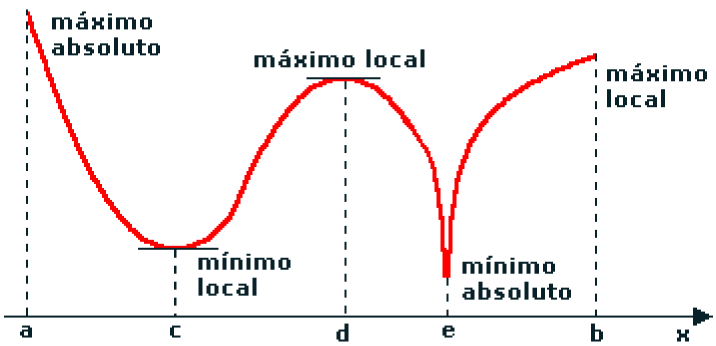


Imagem 11 - Valores máximos e mínimos da função polinomial

Seja f uma função derivável sobre um conjunto S, possuindo um ponto crítico x=c no interior de S, isto é, f '(c) = 0.

Se a derivada de f é positiva à esquerda de x = c e é negativa à direita de x = c, então x = c é um ponto de máximo para f e se a derivada de f é negativa à esquerda de x=c e é positiva à direita de x = c, então x = c é um ponto de mínimo para f.

Exemplo: Encontre os pontos críticos da função f(x) = 40 – 6x + x^2 e classifique-os (máximo ou mínimo e ponto de inflexão). f(x) = 40 – 6x + x^2, f'(x) = $-6+2x=0$, Resolvendo esta equação temos x = 3. Fazendo f'(2) = -2 e f'(4) = 2, segue que x = 3 é ponto mínimo de f(x).

3.9 Uso do Aplicativo GeoGebra e as TIC's no Ensino da Matemática

O avanço das TIC's (Tecnologias da Informação e Comunicação) no ambiente educacional proporcionou inúmeras mudanças na aprendizagem dos alunos, principalmente no que diz respeito à forma como o conhecimento é produzido e internalizado. Portanto, entendemos que os ambientes computacionais podem proporcionar uma função imprescindível relacionado aos recursos didático-pedagógicos para o uso e compreensão dos empecilhos encontrados no ensino de cálculo diferencial e integral, pois, aspectos como a visualização, pensamento, e dedução estarão presentes no desenvolvimento do conhecimento, no contexto das TIC's, além de suscitar a criatividade e a colaboração entre os participantes. Sendo, as atividades, desenvolvidas por meio do software GeoGebra, poderão colaborar para os desafios enfrentados na compreensão e apropriação dos conceitos do cálculo diferencial e integral.

Com o objetivo de conseguir o êxito as propostas mencionadas, é preciso um breve conhecimento do software GeoGebra. Sendo desenvolvido por Markus Hohenwarter na sua tese de doutorado na Universidade de Salzburgo, na Austrália, em 2002.

O GeoGebra está disponível em *http://www.geogebra.org*, sendo gratuito, é de multiplataforma[1], sendo instalado em programas de computadores como Windows, Linux ou Mac OS. Este Software recebeu vários prêmios na Europa e no EUA. Com um grande índice de aceitação o GeoGebra vem ficando popular entre as nações, pois é usado em vários países e já foi traduzido em 55 idiomas. O seu desenvolvimento inicial foi utilizado nas series iniciais tendo sua aplicabilidade em combinações como geometria, álgebra, gráfica e tabelas, estatísticas e no cálculo.

Logo a seguir veremos dois exemplos de construção de uma derivada no aplicativo GeoGebra:

Exemplo 1

1. Comece por representar uma função, por exemplo, f(x) = x^2. Digitando-a diretamente na linha de comandos.

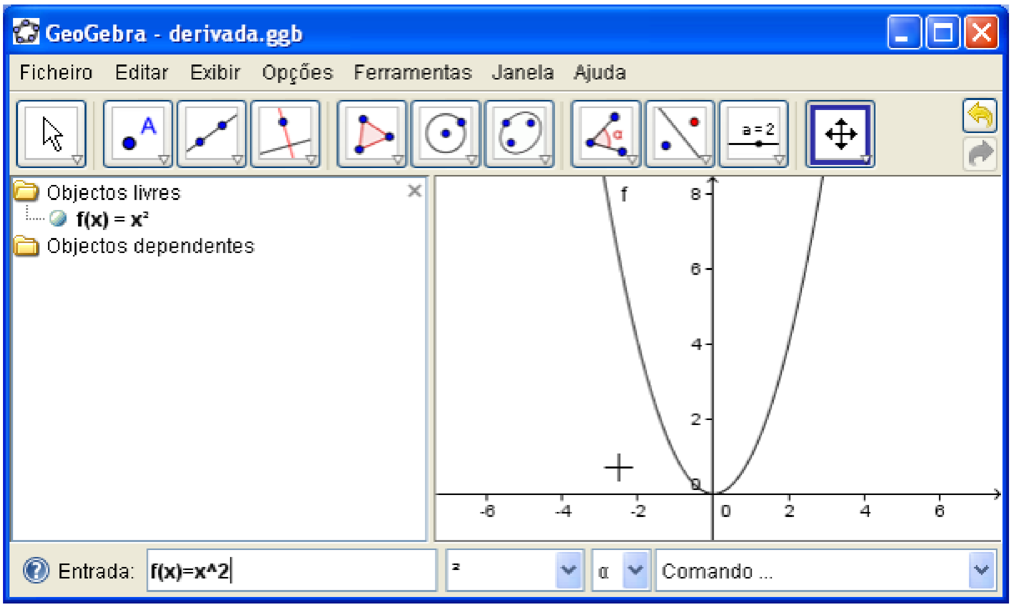


Imagem 12 – Função f(x) = x^2 no GeoGebra

2. Em seguida, vamos adicionar um ponto a esta função, digitando na linha de comandos do GeoGebra *A= Ponto (f)*. Este ponto pode ser arrastado para outra posição qualquer, ao longo da função f.

[1] Um programa ou sistema que pode ser executado em mais do que uma plataforma, como o Mozilla Firefox, ou que executa programas ou sistemas de mais de uma plataforma, por exemplo, o MAME.

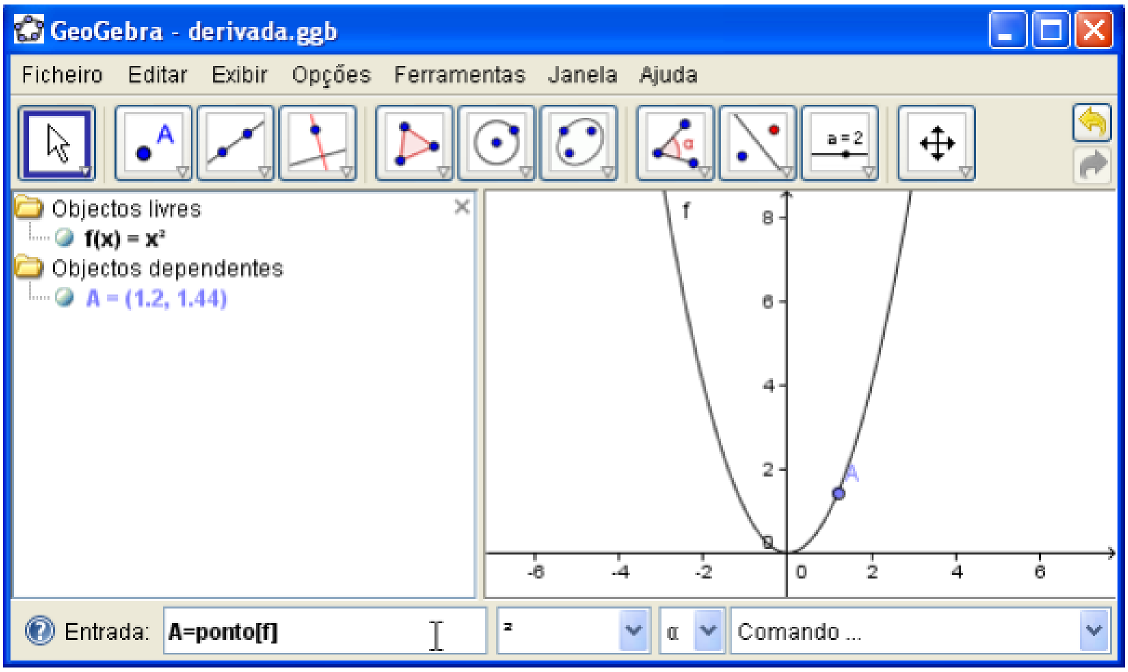


Imagem 13 – GeoGebra I

3. Adicionamos agora uma reta tangente a f no ponto A, escrevendo na linha comandos do GeoGebra [A,].

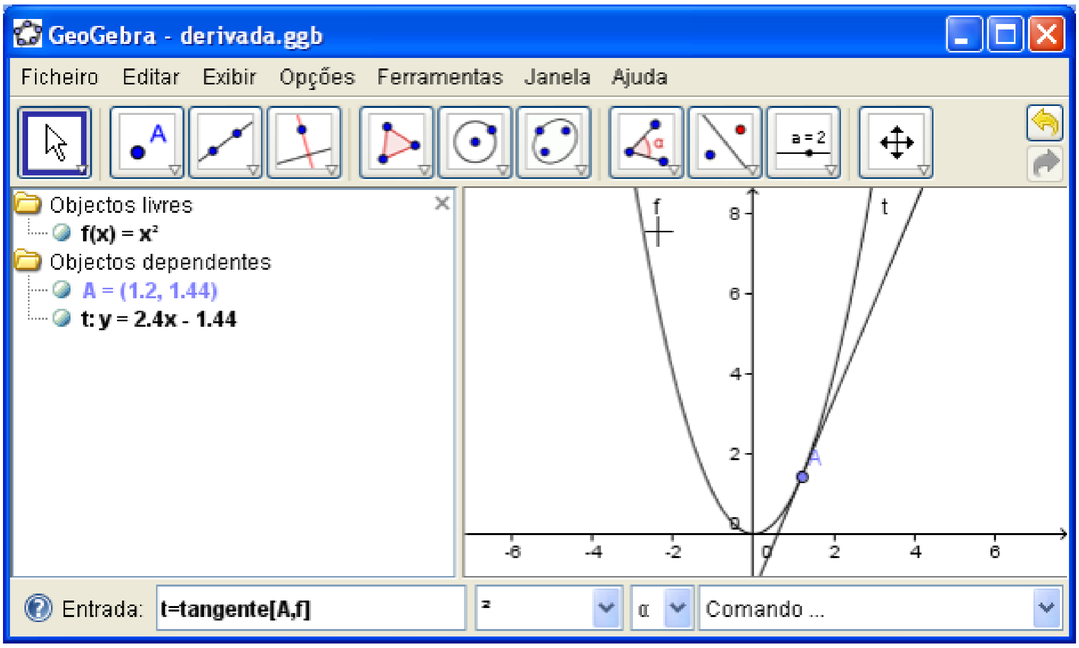


Imagem 14 – GeoGebra II

4. Para mostrarmos a equação da reta na zona gráfica, selecionamos a reta e escolhemos: Propriedades, Rótulos, Exibir e valor.

Imagem 15 – GeoGebra III

5. Selecione Propriedades

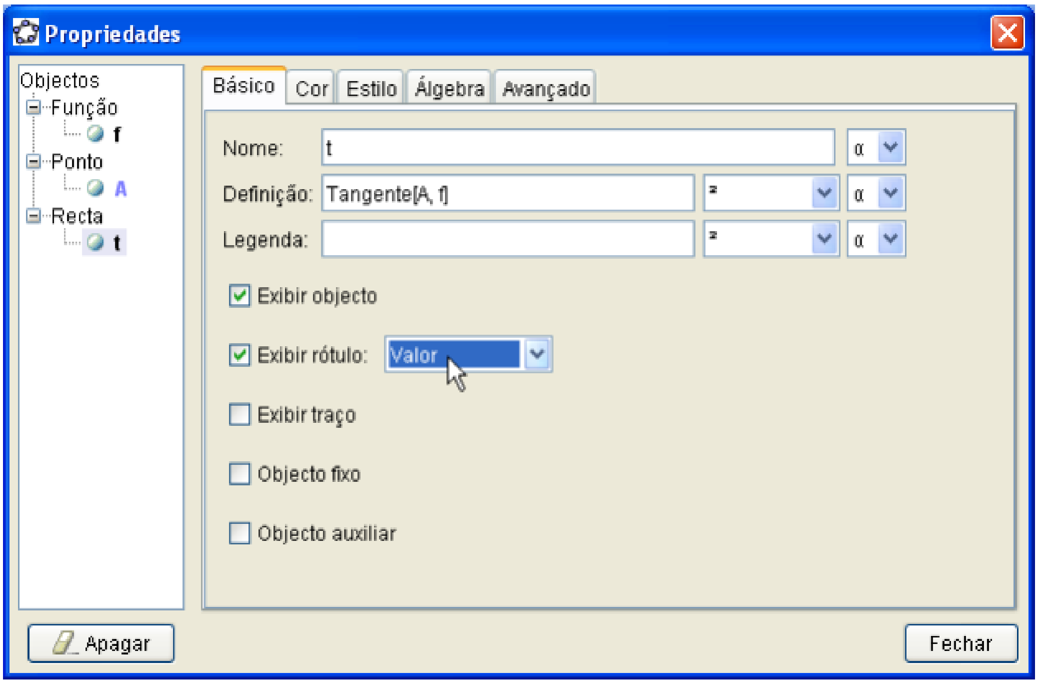


Imagem 16– GeoGebra IV

6. Agora adicionamos um ponto, Q, cuja abscissa é igual à abscissa de A e ordenada igual ao declive da reta tangente t no ponto A. Para isso escrevemos na linha de comandos: Q= (x(A), declive[t]).

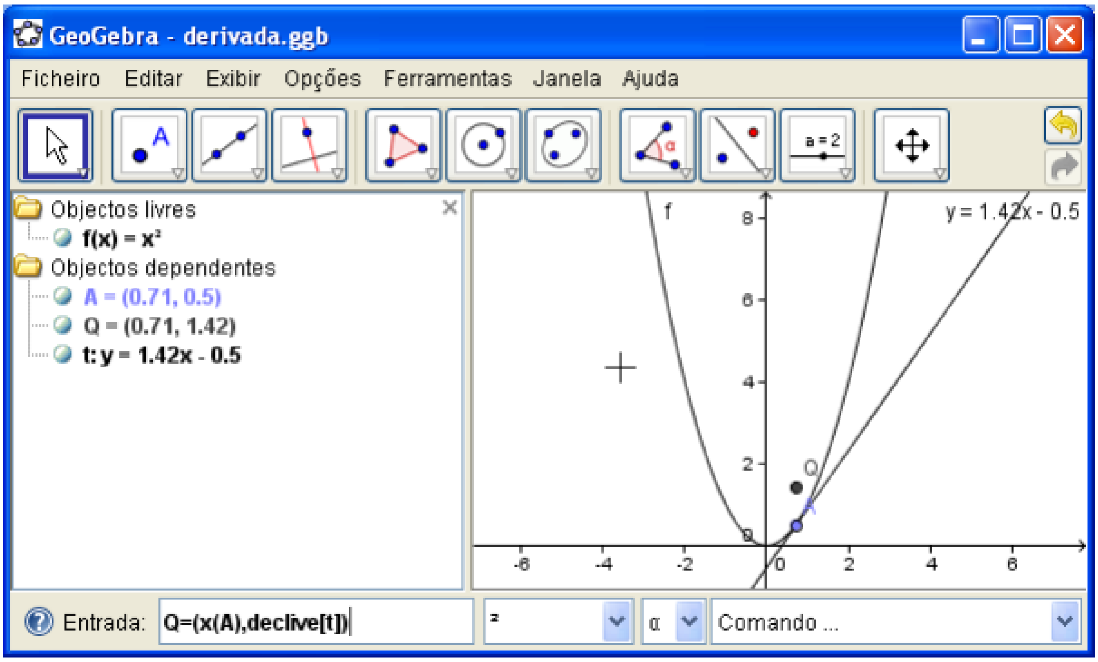


Imagem 17– GeoGebra V

7. Pretende-se o ponto Q deixe um rastro de forma a transmitir ao aluno como é construída a função derivada. Com isso clique com o botão direito do mouse em cima do ponto Q ou na sua definição na zona algébrica e escolha “ativar”.

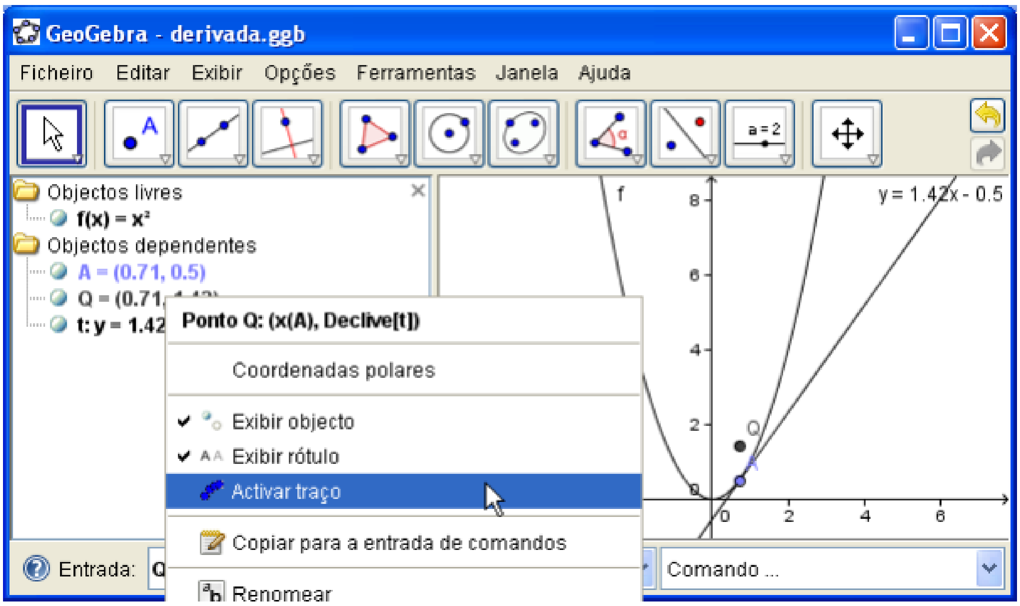


Imagem 18 – GeoGebra VI

8. Para ser mais fácil de perceber as coordenadas dos pontos Q e o valor do declive da reta tangente a f no ponto A, escolha "inserir texto". Na janela de diálogo que surge, digita-se "Declive da Tangente =" + (Declive [t] +" coordenada do ponto Q = (" + (x(Q) +"," + (y(Q))) + ")".

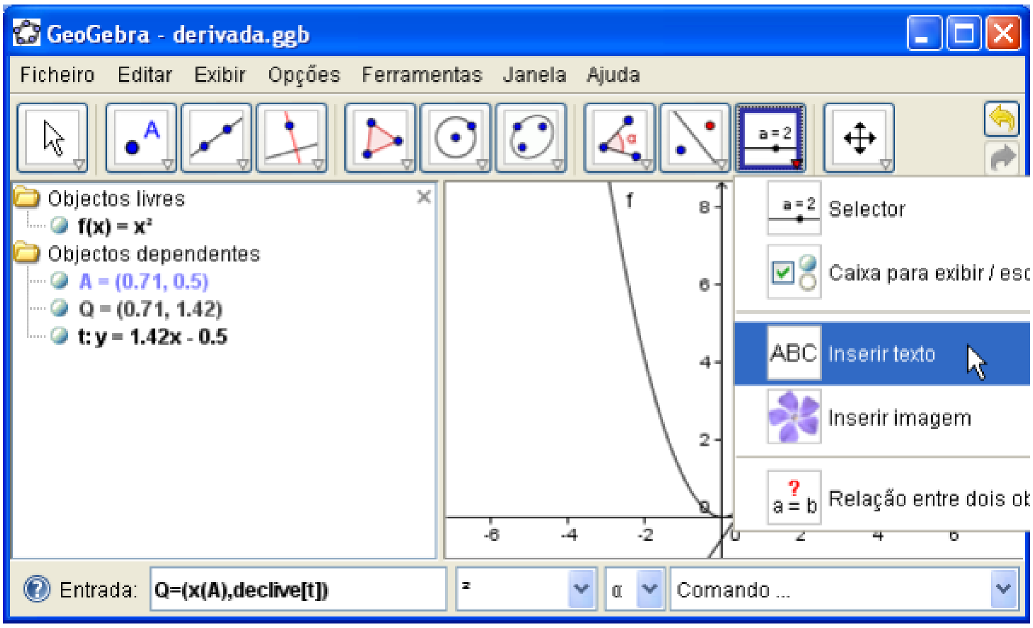


Imagem 19 – Área de Comando GeoGebra I

9. Na janela de diálogo que surge, digita-se "Declive da Tangente =" + (Declive [t] +" coordenada do ponto Q = (" + (x(Q) +"," + (y(Q))) + ")".

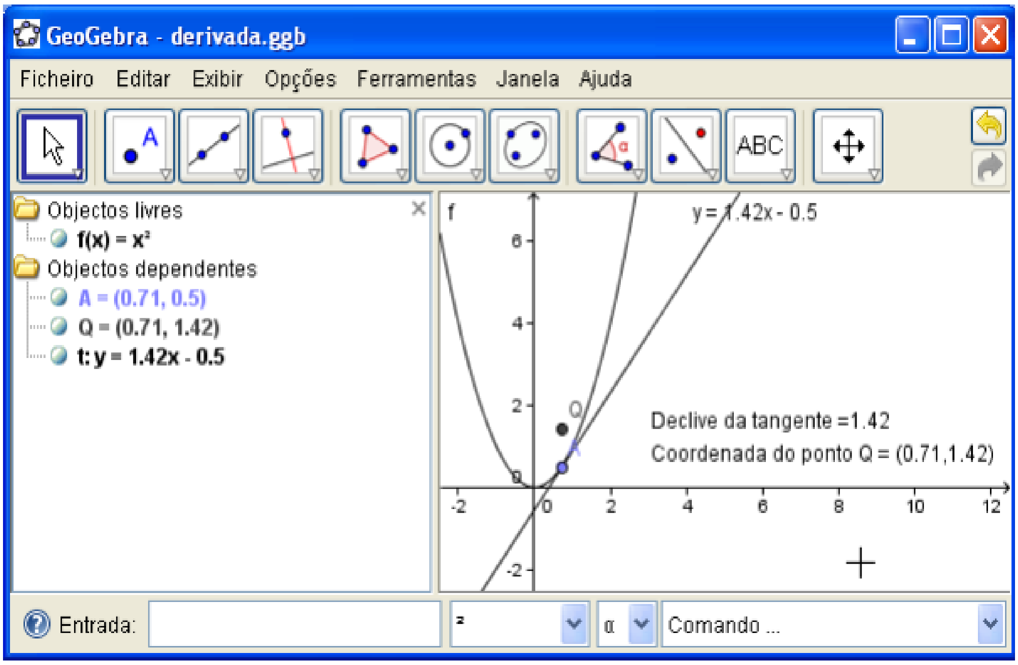


Imagem 20 – Área de Comando GeoGebra II

10. Vamos agora exportar a atividade para pagina Web e o aluno poderá explorar no seu navegador.

Imagem 21– Área de Comando GeoGebra III

11. Na janela de diálogo que surge, preenchem-se diversos dados, nomeadamente os passos que queremos que o aluno siga na realização da atividade:

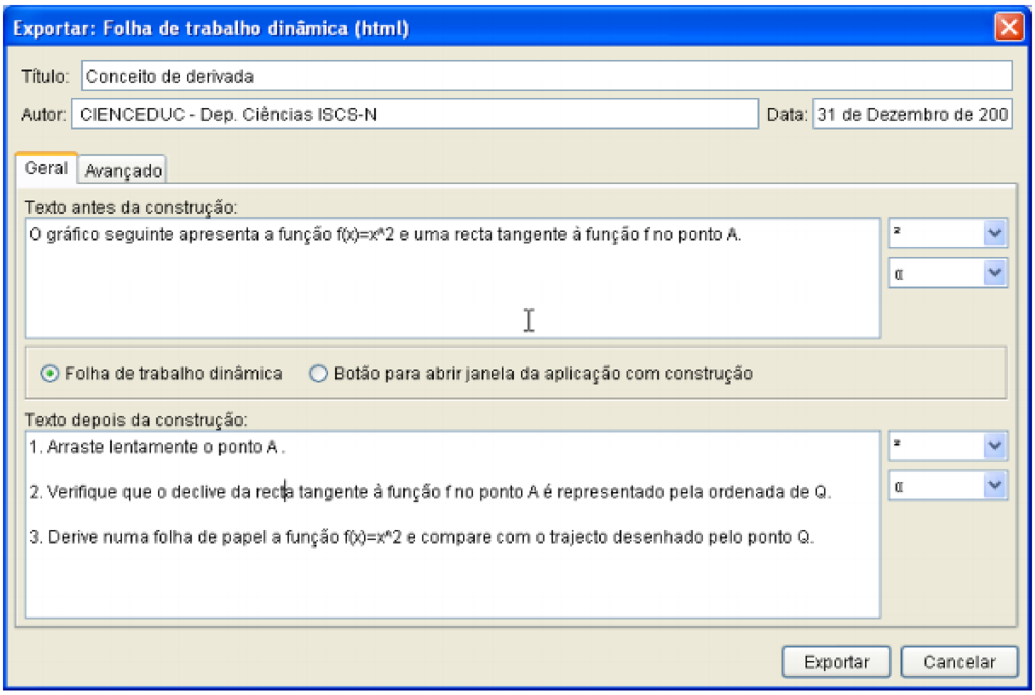


Imagem 22 – Área de Comando GeoGebra IV

12. No separador Avançado vamos alterar o tamanho da janela para 900 x 440.

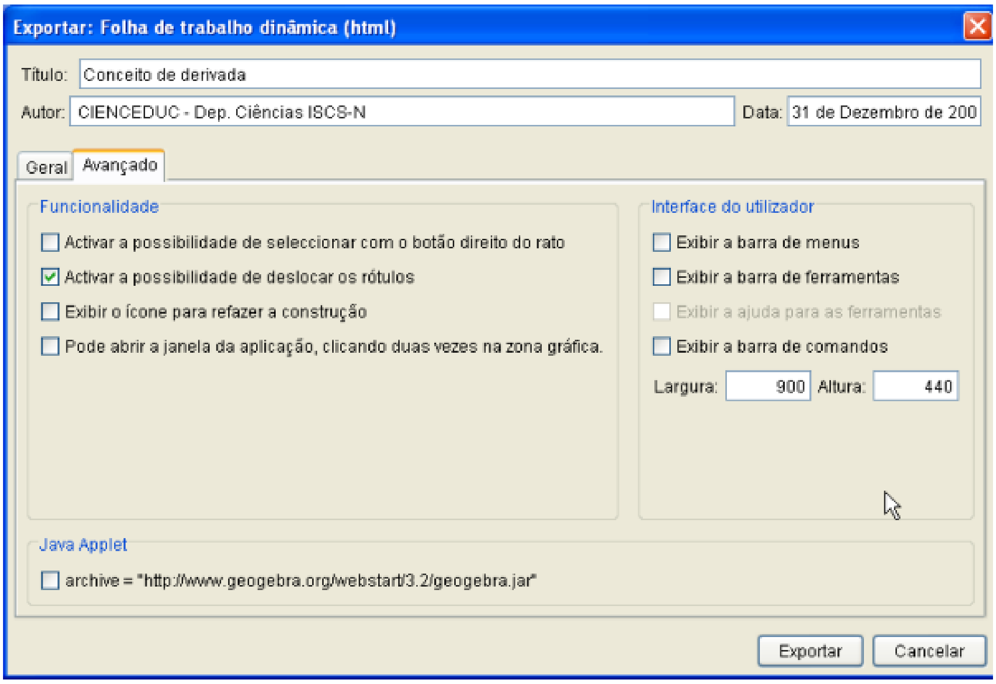


Imagem 23 – Área de Comando GeoGebra V

Exemplo 2: A construção seguinte passará pela utilização da definição da derivada num ponto $h^{'}(a) = h\,(x) - \,h(a)$.

1. Digite a função, h(x) = 1/4(x-2)^2

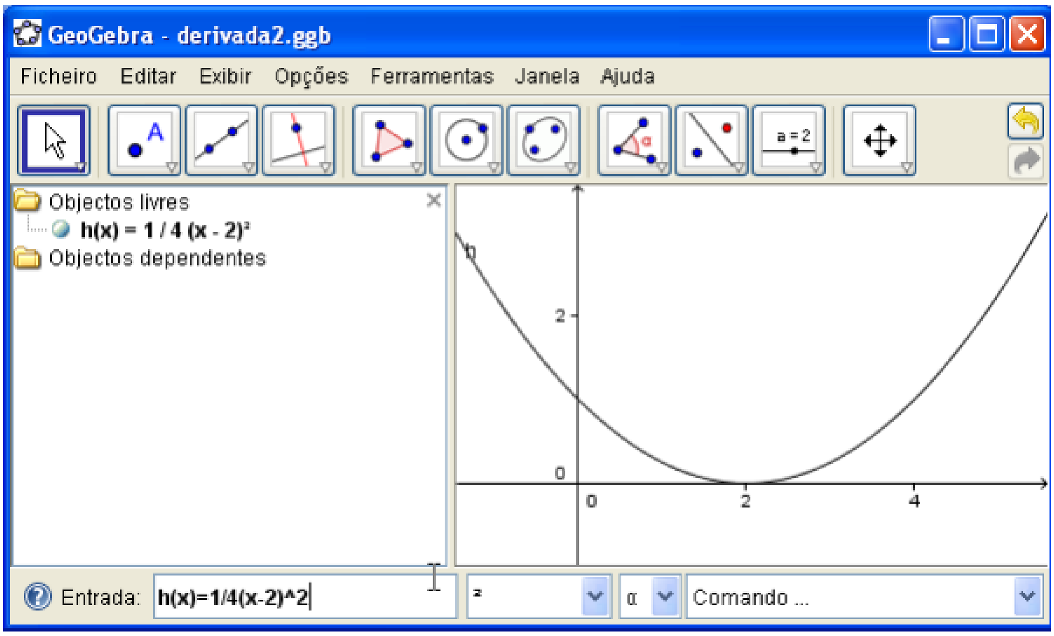


Imagem 24 – Área de Comando GeoGebra VI

2. Inserimos o ponto fixo A (4,1), pertencente à função h(x)

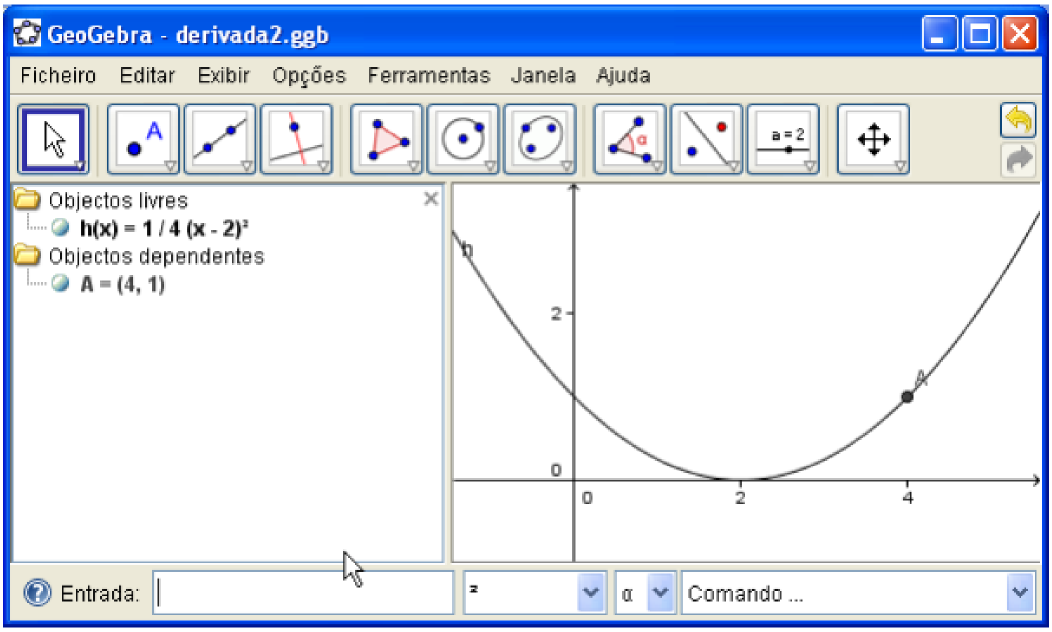


Imagem 25 – Área de Comando GeoGebra VII

3. Em seguida, adicionamos um ponto móvel na função h com o comando: P = ponto [h]. Clicando "propriedades" no *menu* "editar" surge uma janela P ou da sua definição ou escolhendo "Propriedades no menu "editar" surge uma janela de diálogo e na "Legenda" digitamos "X" e em "Exibir Rótulo" a opção "Legenda".

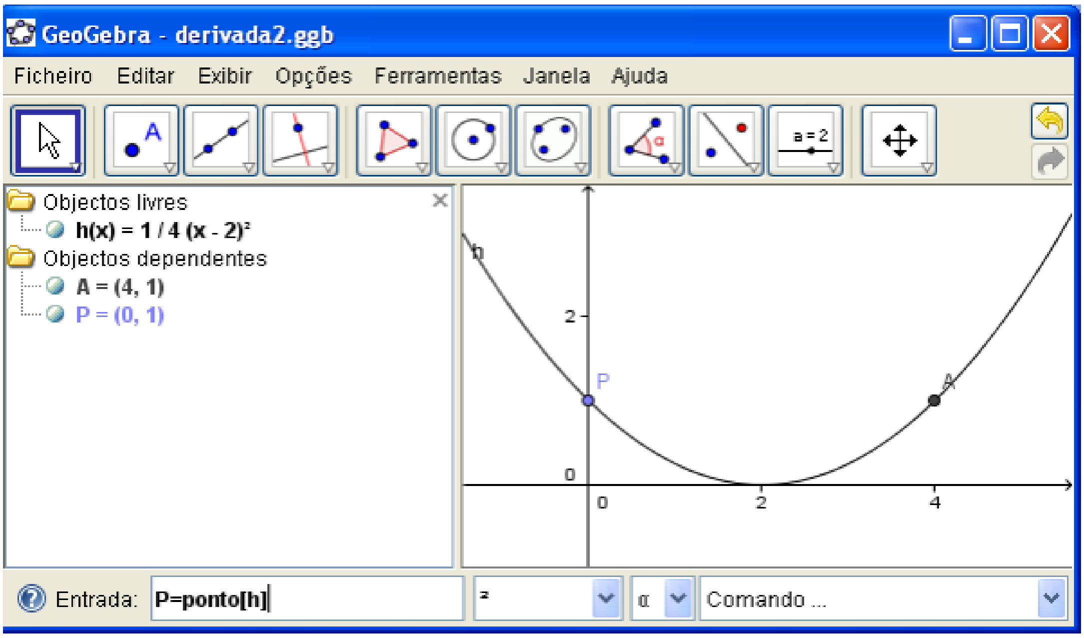


Imagem 26– Área de Comando GeoGebra VIII

4. Clicando “propriedades” no *menu* “editar” surge uma janela P ou da sua definição ou escolhendo “Propriedades no menu “editar” surge uma janela de diálogo e na “Legenda” digitamos “X” e em “Exibir Rótulo” a opção “Legenda”.

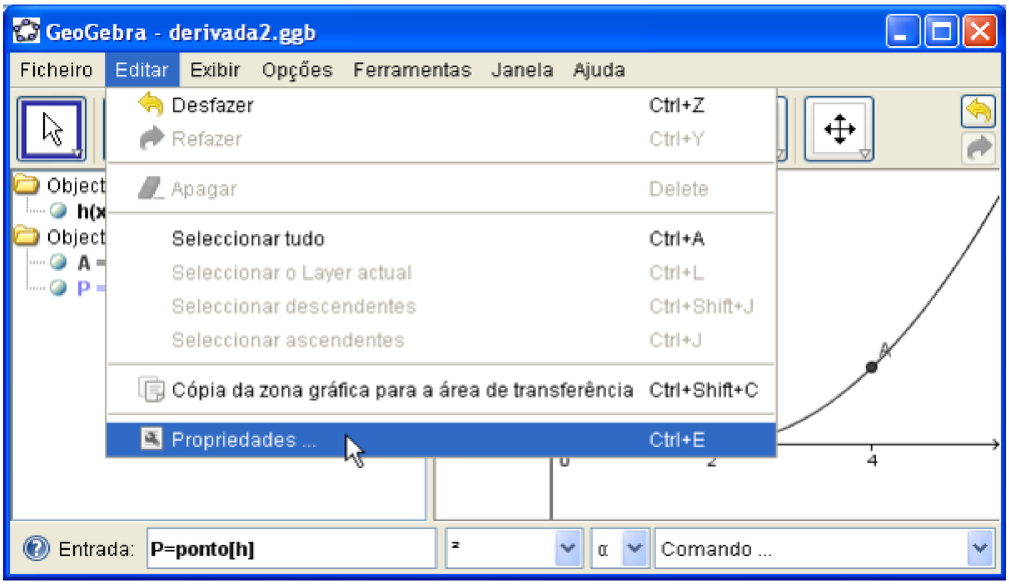


Imagem 27 – Área de Comando GeoGebra IX

- Legenda: Digita-se “X”

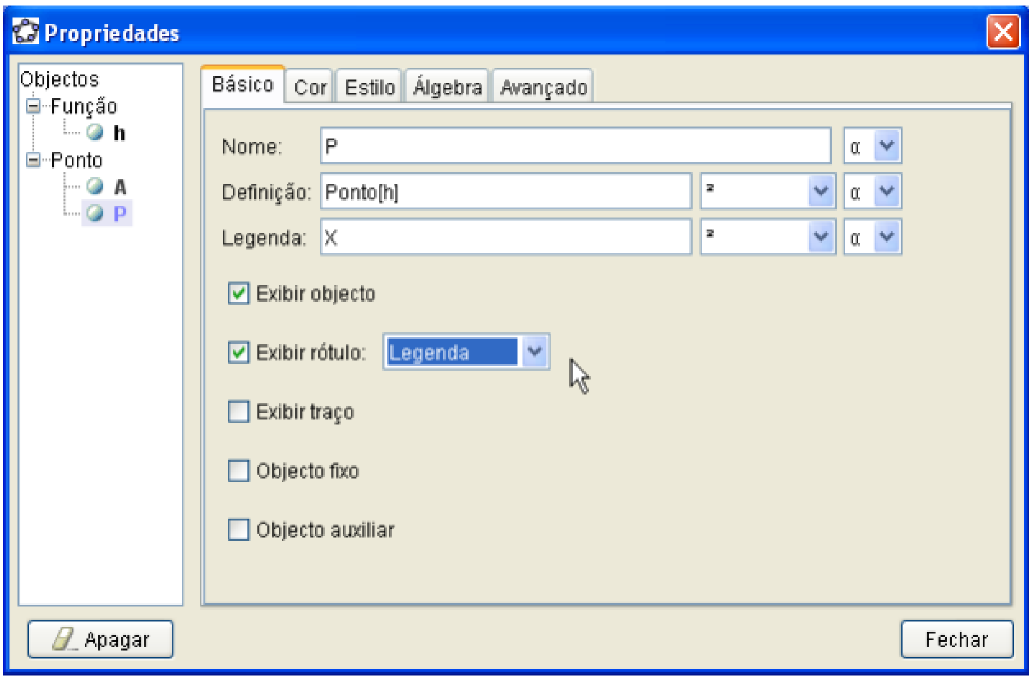


Imagem 28 – Área de Comando GeoGebra X

5. Adicionamos uma reta que passa pelo ponto A e pelo ponto P com o comando: reta [A, P].

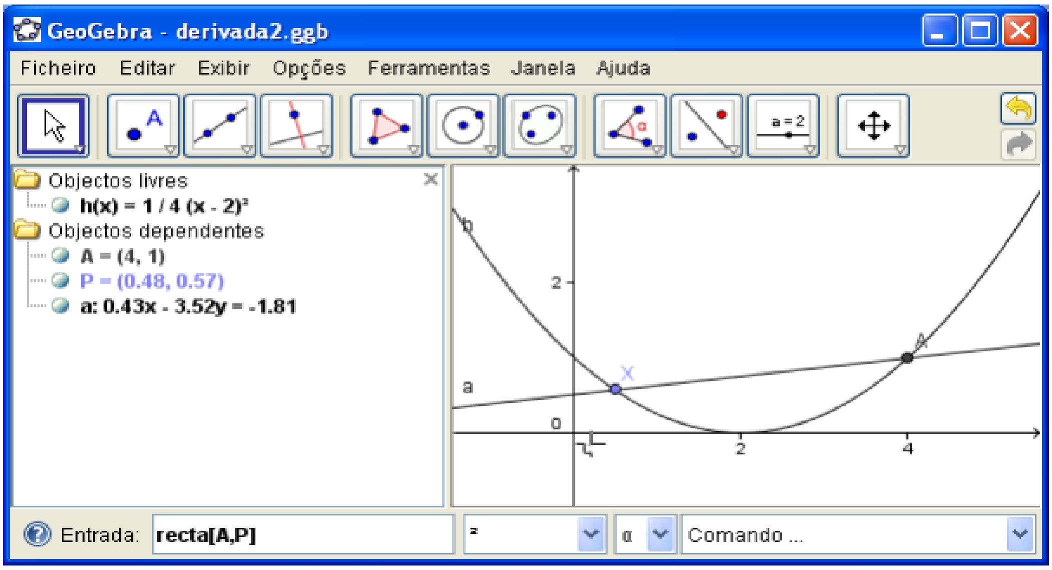


Imagem 29 – Área de Comando GeoGebra XI

6. Criamos a primeira derivada da função h(x) com o comando: Derivada [h,1]. Escondemos em seguida à derivada da zona gráfica desativando “Exibir Objeto”.

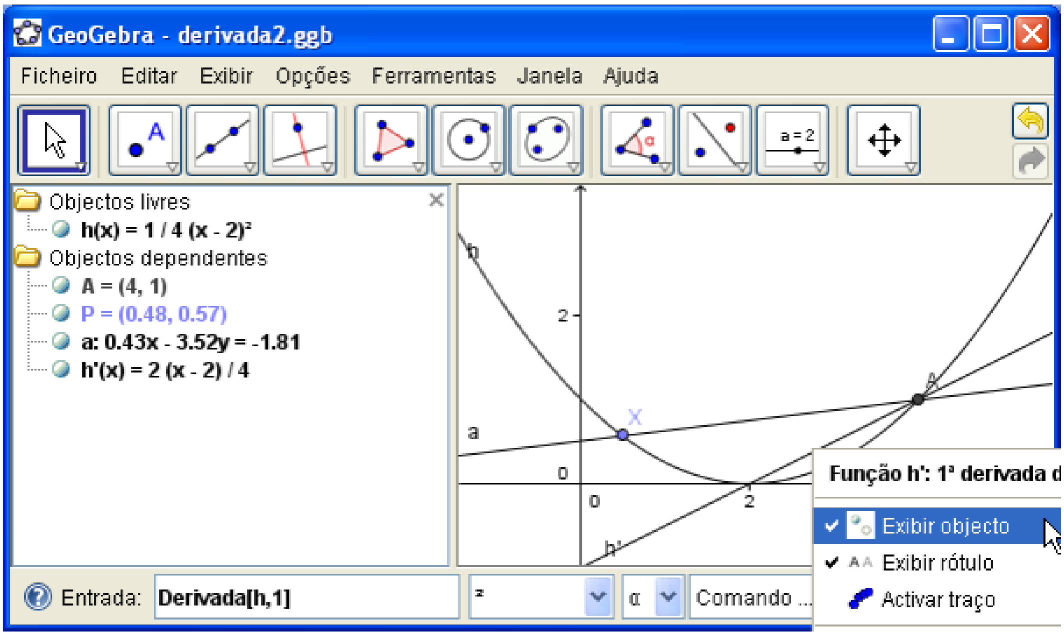


Imagem 30 – Área de Comando GeoGebra XII

7. Falta apenas adicionar texto que contém o valor da derivada no ponto A e o valor do declive da reta criada. Para isso escolha “inserir texto”.

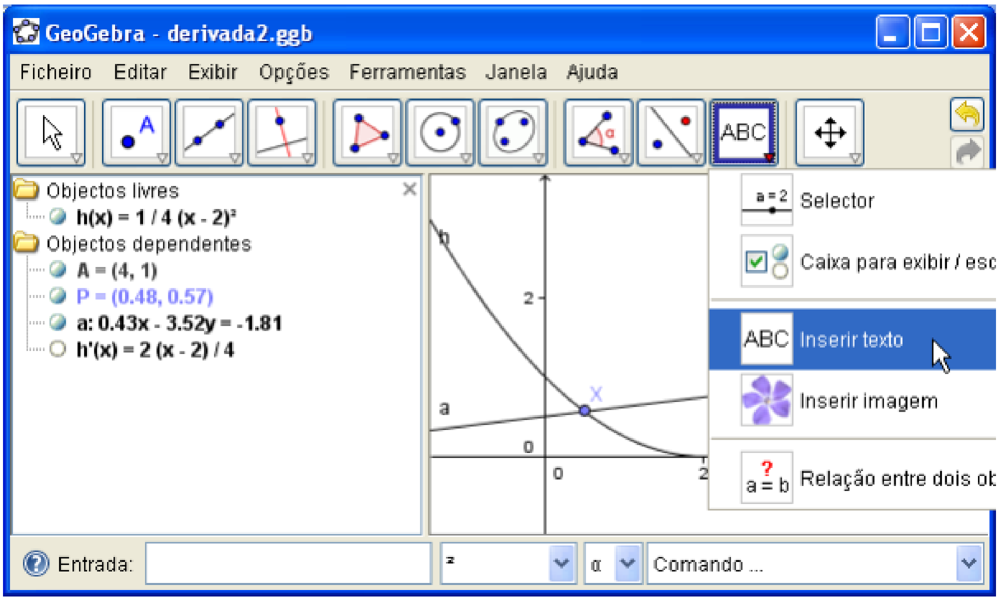


Imagem 31 – Área de Comando GeoGebra XIII

8. Escolha Inserir Texto

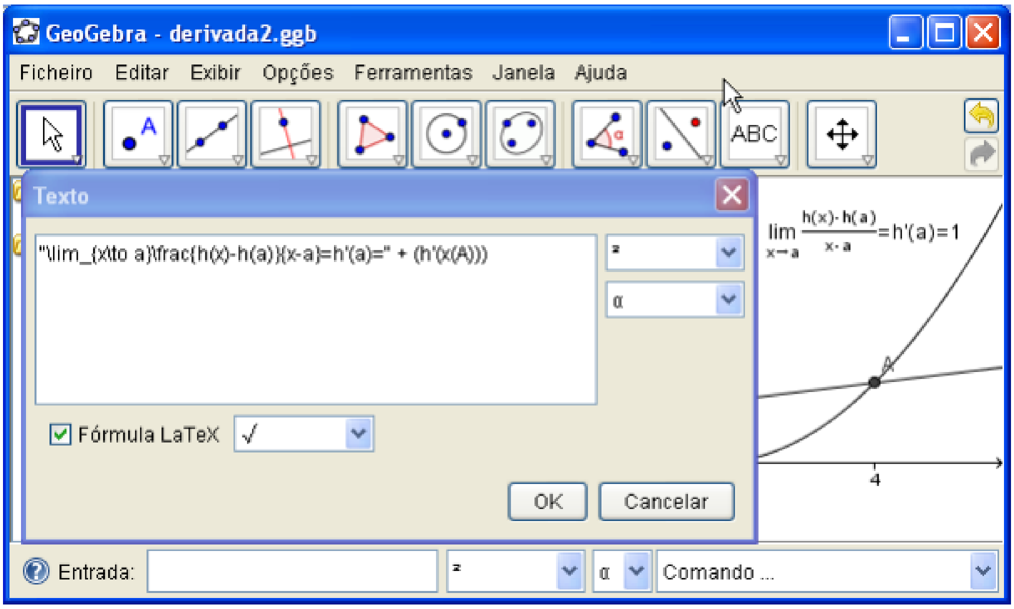


Imagem 32 – Área de Comando GeoGebra XIV

9. Escolha novamente “Inserir Texto” e digite: “Declive da reta =” + (Declive[a])

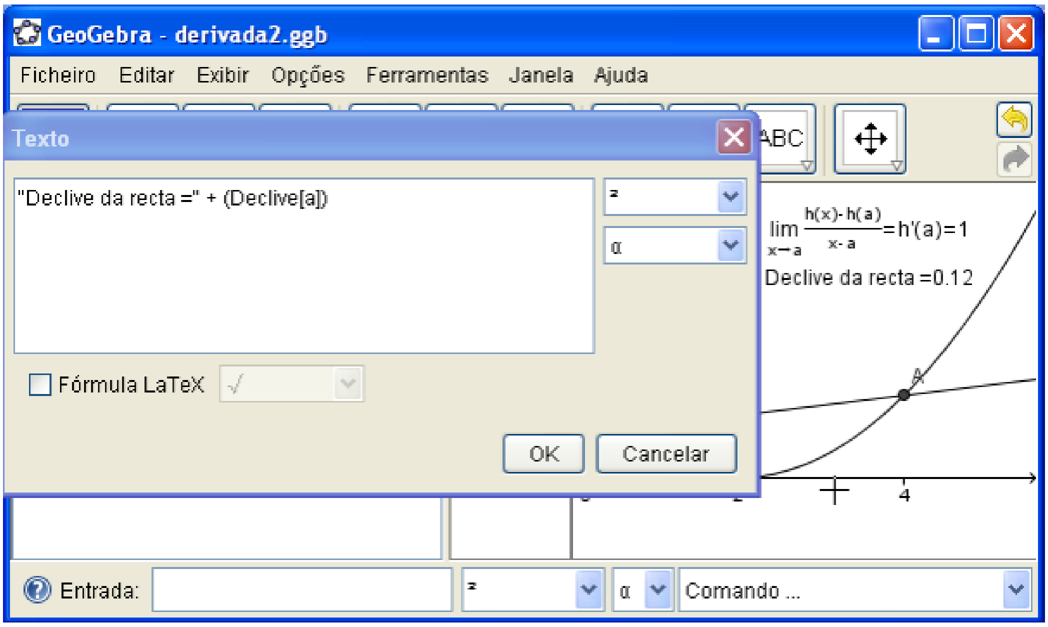


Imagem 33 – Área de Comando GeoGebra XV

10. Desative “Exibir → Zona Algébrica” Exportamos a atividade para uma folha dinâmica com o texto semelhante ao seguinte, definindo o tamanho da folha do separador “Avançado”.

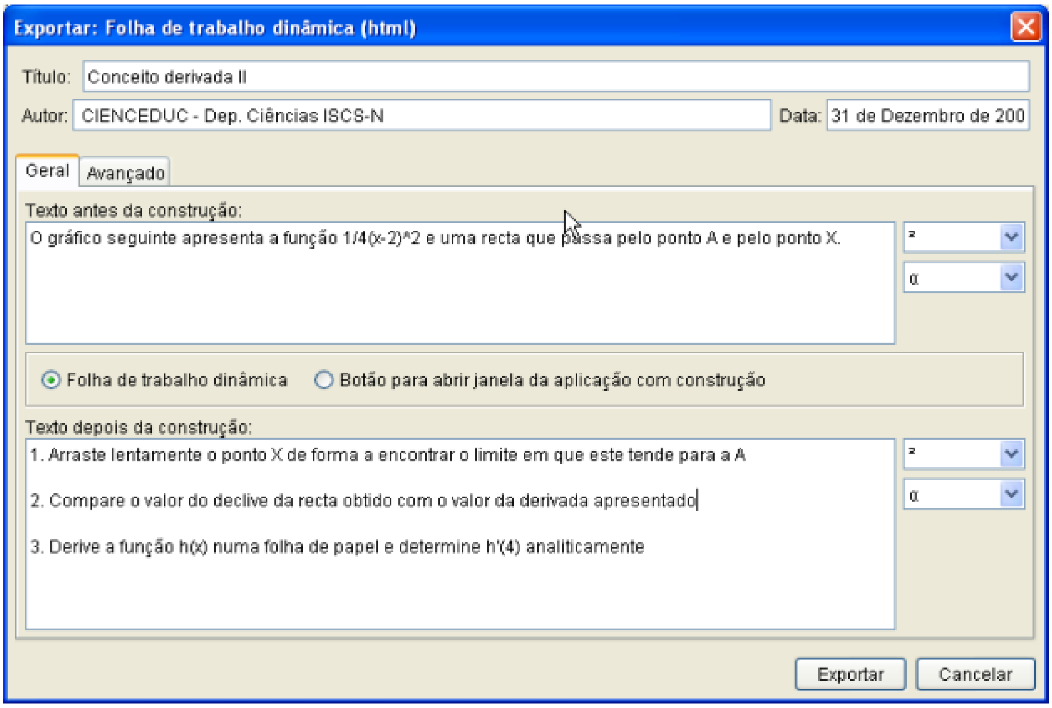


Imagem 34 – Área de Comando GeoGebra XVI

11. Depois de exportar atividade para uma dada pasta, o seu navegador Web deverá, entretanto abrir a atividade tal como será vista pelo aluno.

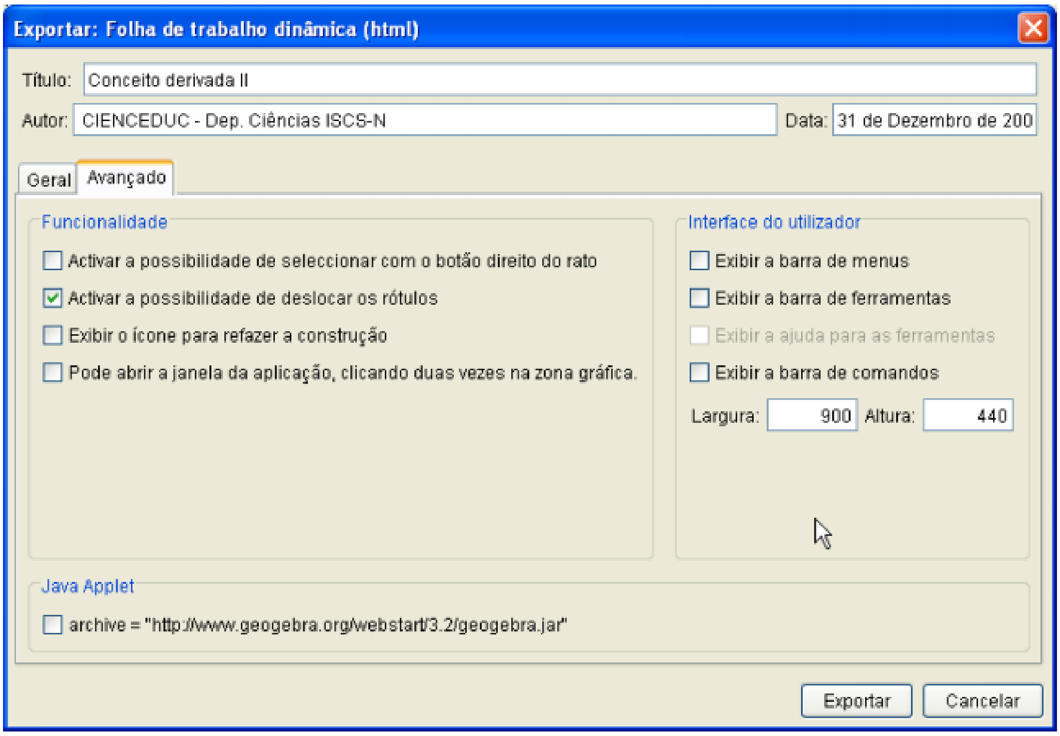


Imagem 35 – Área de Comando GeoGebra XVII

O entendimento sobre ouso da informática na escola amplia a visão de educação e extrapola os domínios do espaço educativo. O aluno aprende fora da escola e do olhar do professor. As informações agora estão disponíveis mais facilmente com as TICs e o professor não se encontra mais como detentor único do conhecimento. Porém informação e conhecimento são dois termos que se confundem, mas não significam a mesma coisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho tem-se o objetivo de mostrar com clareza e precisão a importância da aplicação do cálculo diferencial e integral na contribuição das ciências e ao avanço da matemática, principalmente quando os assuntos são abordados para os alunos do Ensino Médio. Desde que, são os alunos quem se prejudicam ao começar um nível acadêmico que requer os conhecimentos matemáticos na área do cálculo diferencial e integral.

Evidencia-se, também, o processo histórico, que consistiu no desenvolvimento do cálculo diferencial integral e dos polinômios ao longo dos anos devido à presença nas escolas básicas do Brasil. A construção histórica nos mostrou que o avanço da educação na área matemática seria de suma importância dentro da abordagem que é aplicada na construção do conhecimento do ser humano sobre a história do cálculo diferencial e integral.

Para aumentar o ensino-aprendizado sobre o estudo do cálculo foi utilizado o aplicativo GeoGeba como forma didática para o aprendizado abordagem do cálculo a partir de uma interpretação geométrica explorando gráficos e os recursos que o aplicativo dispõe.

Como qualquer progresso matemático de importância, a obra de Newton e Leibniz incentivou intensos desenvolvimentos posteriores. O cálculo foi amplamente aplicado e depois de longas discussões os seus fundamentos finalmente concretizados.

Seria de grande importância que os professores do Ensino Médio se dedicassem ao ensino do cálculo como ferramenta de contextualização dos problemas matemáticos estudados nesse nível de ensino, serviria, também, de base para os estudantes que ingressam nas universidades, bem como dar um significado maior aos conteúdos vistos de forma mais contextualizada e interdisciplinar, abordando as inúmeras aplicações dessa tão importante ferramenta matemática e proporcionando que os estudantes saibam sua real importância.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES Ester de Souza; GOMES, Solange Freitas; DOMINGUINI, Lucas. **Limite de uma Função: Conteúdo Viável para o Ensino Médio?** Congresso Nacional de Educação/ encontro Regional de Educação Matemática, 2011. Disponível em: www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2012/artigos/102620.pdf. Acesso em 13 nov. 2015.

ÁVILA, G. **O Ensino do Cálculo no Segundo Grau**. In: Revista do Professor de Matemática, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

_________**Limites e Derivadas no Ensino Médio**? In: Revista do Professor de Matemática, n.60, Rio de Janeiro, de Sociedade Brasileira Matemática (SBM), 2006, p.30-38.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* ciências da natureza, matemáticas e suas tecnologias. vol. III. Brasília: MEC, 2000.

_________Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio:* ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. vol. 02. Brasília: MEC, 2008.

CARVALHO, J. B. P. de. **O cálculo na escola secundária: algumas considerações históricas.** *Caderno Cedes*. Campinas: Papirus, n. 40, p. 68-81, 1996.

DOMINGUINI, Lucas. **Estudos sobre livro didático: processo atual?** Revista eletrônica de ciências da educação, Campo Largo, v.10, n.1, p.16-32, jul. 2011.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. Ed. São Paulo: Atlas 2008.

GIOVANNI, J.R.; BONJORNO, J. R. ***Matemática completa.*** 2. ed. São Paulo: FTD, 2005.

Oliveira, Fernandes Rodrigues de. **Uma proposta para o ensino de noções de cálculo no ensino médio** – Universidade Federal do Rio Grande do Sul Instituto de Matemática – Porto Alegre, 2010. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29140/000775857.pdf?...1 acesso em 23 de Nov. 2015

Parâmetros Curriculares Nacionais: **matemática** / Ministério da Educação. Secretária da Educação Fundamental. – 3 ed. Brasília; 2001

RICHIT, Andriceli. **Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnológias Digitais.** Dissertação de mestrado Programa de Pós Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista, 2010. Disponível em: repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/.../richit_a_me_rcla.pdf?...1. Acesso em: 15 dez. 2015.

ROONEY, Anne **– A História da Matemática** – Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. Editora Ltda. São Paulo – 2012.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

APÊNDICE 1

LISTA DE EXERCICIOS SOBRE O CAPÍTULO 2

1- Dado o polinômio $P(x)= 2x^3-5x^2+x-3$. Calcule:

a) $P(0)$ b) $P(-1/2)$

2- As raízes do polinômio $P(x)=x^3-6x^2+8x$ pertencem ao conjunto {0,1,2,3,,4}. Determine o conjunto solução.

3- Determine o valor de a sabendo que 2 é raiz de $P(x)=2x^3-ax+4$.

4- Dados os polinômios $P_1(x)=5x^2-3x+6$, $P_2(x)=-3x+2$ e $P_3(x)=x^2+5x-1$. Calcule;

a) $P_1(x)+P_2(x)-P_3(x)$ b) $P_1(x).P_2(x)$

5- Determinar a, b e c de modo que $(a+bx).(x+2)+(c-2).(x+3)=2x^2+2x-8$.

6- Determine o resto da divisão de:

a) $2x^3-5x^2+4x-4$ por $2x-3$ b) $5x^3-11x^2+3x-2$ por $x-2$

7- Determinar o resto da divisão de $P(x) = x^{2n}+x+1$ por $x+1$, com $n \in \mathbb{N}$.

8- Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, calcule o quociente e o resto da divisão de:

a) $P(x) = x^3-3x^2+3x-1$ por $D(x) = x-1$.

b) $P(x) = 5x^4-3x^2+x-1$ por $D(x) = x-2$.

c) $P(x) = 3x^3-4x^2+5x-2$ por $D(x) = 2x-1$.

9- Determine a forma fatorada dos polinômios:

a)$P(x) = 2x^2-10x+12$

b) $P(x) = x^3-7x^2+12x$

c) $P(x) = x^3-5x^2+4x-20$

10- Determine **m** e **n** para que o polinômio $P(x) = x^6+mx^4+nx^3-3x-2$ seja divisível por $(x+1).(x+2)$.

APÊNDICE 2

LISTA DE EXERCICIOS SOBRE O CAPÍTULO 3

1. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \to 1}(x+1)$

2. Calcule os limites das seguintes funções polinomiais:

a) $\lim_{x \to 1}(x^3 + x^2 + 5x + 1) =$

b) $\lim_{x \to -1}(x^3 - 2x^2 - 4x + 3) =$

c) $\lim_{x \to -\sqrt{2}}(4x^3 - 2x^2 - 2x - 1) =$

d) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 5x - 4}{x^2 - 5} =$

e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} =$

f) $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} =$

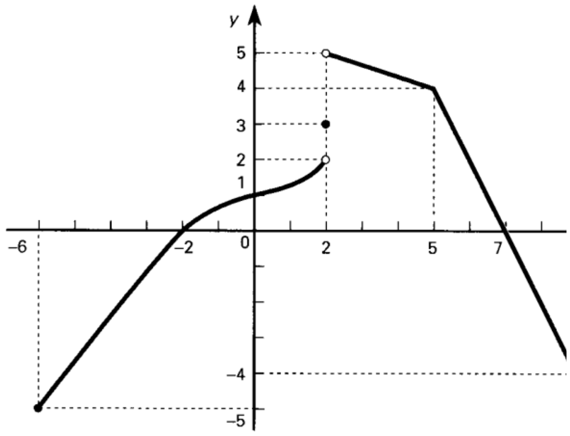
g) $\lim_{x \to 0} \dfrac{3x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x}{x^2 - x} =$

h) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x + 3}{x^5 - 2x + 1} =$

i) $\lim_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 36}{x - 6} =$

j) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} =$

3. O gráfico a seguir representa uma função f de $[-6, 9]$ em $\Re$. Determine:



a) $f(2)$

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

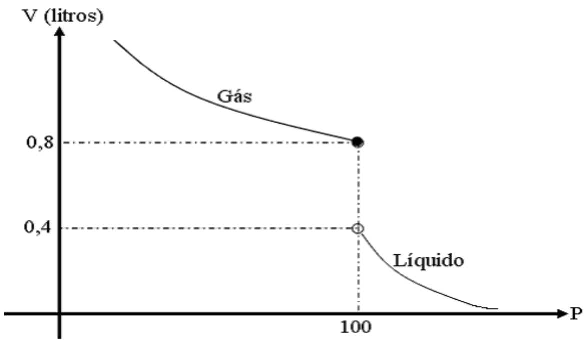
c) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

d) $\lim_{x \to 2} f(x)$

e) $f(-2)$

f) $f(7) =$

4. Um gás (vapor d'água) é mantido à temperatura constante. A medida que o gás é comprimido, o volume V decresce até que atinja uma certa pressão (P) crítica. Além dessa pressão, o gás assume forma líquida. Observando a figura a seguir, determine:



a) $\lim_{p \to 100^-} V$ b) $\lim_{p \to 100^+} V$ c) $\lim_{p \to 100} V$

5- Encontre a derivada das seguintes funções:

a) $y = x^4 - 3x^2 + 2x - 3$

b) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{x}$

c) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2}$

d) $y = \dfrac{3}{2x^2} - \dfrac{1}{x}$

e) $y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$

f) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{2}{3x}$

g) $y = x\sqrt{x} - \dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}$

h) $y = (x^2-1)(2+x)$

6- Daqui a x meses, a população de uma certa cidade será $P(x) = 200 + x^2$ em milhões de habitantes.

a) Qual será a taxa de variação desta cidade daqui a 10 meses ?

b) Qual será a variação real da população durante o 11º mês ?

7. Se $f(x) = \frac{2x-1}{1-x}$, determine:

a) $f'(0)$ b) $f''(2)$ c) $f'''(0)$

8. Encontre os pontos críticos de f, sendo:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ b) $f(x) = x^4 - 2x^2+3$

9. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das funções dadas por:

a) $f(x) = x^3 - 5$

b) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 5$

c) $f(x) = 2x - 1$

d) $f(x) = x^4 - 4x^3$

e) $f(x) = x(5-x)^4$

10. Faça um estudo completo do comportamento das funções abaixo.

a) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 6$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 4$

11. Deseja-se cercar um terreno retangular de área 60 m^2, de modo que o custo para cercar as laterais seja R$ 300,00 por metro linear e o custo para cercar a frente e o fundo seja de R$ 500,00 por metro linear. Determine as dimensões do terreno de

modo que o custo para cercá-lo seja o menor possível. Neste caso, qual o custo mínimo?

12. Por várias semanas, o serviço de transito vem pesquisando a velocidade do tráfego numa autoestrada. Verificou-se que, num dia normal de semana, à tarde, entre 1 e 6 horas a velocidade do tráfego é de, aproximadamente $v(t) = 2t^3 - 21.t^2 + 60t + 40$ km/h, onde t é o número de horas transcorridas após o meio-dia. A que horas, dentro do intervalo de tempo mencionado, o tráfego se move mais rapidamente e a que horas se move mais lentamente ?

13. De uma folha laminada quadrada de 2 dm de lado, foram cortados quadrados iguais nos quatro cantos e com o restante da folha foi construída uma caixa sem tampa. Determine as dimensões do quadrado retirado para que o volume da caixa seja máximo.

14.Se $L(x)=-x^2+6x-5$ é a função lucro na venda de x unidades de um certo produto, determine o lucro máximo.

15.Encontre os máximos e mínimos relativos das funções dadas por:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 4$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

c) $f(x) = x^4 – 8x^2 + 6$

d) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$