UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANDERSON CAVALCANTE SANTOS

O ENSINO DOS TRIÂNGULOS COM O RECURSO GEOGEBRA

MOSSORÓ/RN
2015

ANDERSON CAVALCANTE SANTOS

O ENSINO DOS TRIÂNGULOS COM O RECURSO GEOGEBRA

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, campus Mossoró para obtenção do título de mestre em matemática.

MOSSORÓ/RN
2015

Catalogação na Fonte
Catalogação de Publicação na Fonte. UFERSA - BIBLIOTECA CENTRAL ORLANDO TEIXEIRA - CAMPUS MOSSORÓ

Santos, Anderson Cavalcante.
O ensino dos triângulos com o recurso geogebra / Anderson Cavalcante Santos. - Mossoró, 2015.
55f: il.

1. Configurações geométricas bidimencionais. 2. Geometria dinâmica. 3. Triangulo. 4. Geogebra - software educacional. 5. Aprendizagem - escola pública. I. Título

RN/UFERSA/BOT/699 CDD 516.154 S237e

ANDERSON CAVALCANTES SANTOS

O ENSINO DOS TRIÂNGULOS COM O RECURSO GEOGEBRA.

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 27 / 08 / 2015

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA
Presidente

Mauricio Zuluaga M.

Profº. Dr. Mauricio Zuluaga Martinez - UFERSA
Primeiro Membro

Aleksandre Saraiva Dantas

Profº. Dr. Aleksandre Saraiva Dantas – IFRN
Segundo Membro

MOSSORÓ/RN, 2015.

DEDICATORIA

Dedico este trabalho a meus pais Rocilda e Raimundo, a minha amada esposa Camila Nayara pelo amor, paciência e confiança que tiveram nesse período importantíssimo da minha vida.

E ao meu orientador Dr. Antônio Ronaldo Garcia Gomes, que sem dúvida foi o maior incentivador do programa durante esse período.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que está junto a mim em todos os momentos

Meus pais Rocilda e Raimundo, que sempre incentivaram os meus estudos, e estiveram mais uma vez ao meu lado nessa etapa importantíssima.

Ao meu orientador Dr. Antônio Ronaldo Garcia Gomes, pelo empenho, dedicação, incentivo, motivação e amizade.

Aos colegas de turma, que compartilharam de experiência, sabedoria, conhecimento, amizade e solidariedade, principalmente no momento mais difícil da minha vida, que foi a perca da minha mãe exatamente no meio do curso.

A coordenação e a todos os professores da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), pelo compartilhamento do saber.

Aos Professores e amigos que tenho na Escola de Ensino Fundamental e Médio Heráclito de Castro e Silva, que também me ajudaram, a seguir em frente, quando passei por momentos emocionalmente difíceis na metade do curso.

Aos alunos e coordenação da Escola de Ensino Fundamental e Médio Heráclito de Castro e Silva, que me ajudaram no projeto de conclusão do curso.

A Capes, por financiar o programa.

LISTA DE FIGURAS

$\hat{C}$

LISTA DE SIGLAS

PCN'S-	**PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS**
TIC'S-	**TECNOLÓGIAS DE INFORMÁTICA E COMUNIÇÃO**

RESUMO

Este trabalho aborda o uso do software educacional de geometria dinâmica, o GeoGebra, tendo como objetivo apresentar alternativas para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria com o auxilio do software GeoGebra bem como introduzir conceitos referentes ao ensino da Geometria Euclidiana na educação básica, usando como metodologia uma sequencia de aulas expositivas e práticas com o auxilio do professor no intuito de melhorar os conhecimentos a cerca das definições de triângulos Desta forma, contemplar o aprendizado de conceitos e propriedades, tornando assim o ensino de geometria mais significativo através da experimentação onde o aluno poder viver a construção do conhecimento matemático. A pratica nos levou a comprovar que a utilização do software possibilitou ao professor ensinar o conteúdo com clareza, e ao aluno a aprendizagem por investigação. Justifica-se a escolha deste tema, o fato de haver uma constante necessidade de apresentar novas estratégias de ensino ao processo de aprendizagem de Geometria. A matemática tem na geometria um ramo importante, pois estuda formas geométricas tanto planas como espacial, no qual o conhecimento é fundamental para o desenvolvimento do entendimento ao desenvolvimento matemático do aluno. A geometria nas escolas públicas é pouco estudada e nessa perspectiva é bastante considerável a utilização da inserção tecnológica no qual propiciará formas diferenciadas de pensar e aprender. As conclusões aqui apresentadas resultaram da análise de dados quantitativos coletados das atividades desenvolvidas pelos estudantes, bem como de suas reflexões durante a resolução destas.

Palavra – chave: Geometria, GeoGebra, Aprendizagem

ABSTRACT

This paper discusses the use of educational software of dynamic geometry , GeoGebra , aiming to present alternatives to the process of teaching and learning geometry with software assistance GeoGebra and introduce concepts related to the teaching of Euclidean Geometry in basic education, using as methodology a sequence of lectures and practices with the teacher's assistance in order to improve knowledge about the definitions of triangles in this way , contemplate the learning of concepts and properties , thus making the most significant geometry teaching through experimentation where the student to live the construction of mathematical knowledge. The practice led us to prove that the use of the software enabled the teacher teaching the content clearly, and student learning by research. Justifies the choice of this theme, the fact that there is a constant need to provide new teaching strategies to geometry learning process. Mathematics has an important branch in geometry, for studying both flat geometric shapes as a space in which knowledge is essential for the development of mathematical understanding the development of the student. The geometry in public schools is little studied and that prospect is very considerable use of technological integration in which will provide different ways of thinking and learning. The findings presented here resulted from the analysis of collected quantitative data of the activities developed by the students, as well as their reflections during the resolution of these.

Word - key : Geometry, GeoGebra , Learning

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O uso de tecnologias na obtenção e construção de conhecimento não se remete nem se esgota no saber como utilizar o computador. O desenvolvimento de novos conceitos pedagógicos é agora fundado na integração com a informática e com o uso que professor e alunos fazem dela, pois o aluno é agora parte ativa no desenvolvimento educacional, tendo os objetivos e os métodos de aprendizagem que ser traçados em função desta condição.

Algumas das imensas questões que a utilização do computador na escola coloca desde logo, passam pelo seu uso numa sala de aula. Algumas indagações são pertinentes como: substituição do papel do professor? Substituí-lo no seu papel de transmissor de informação? Ou, por outro lado, somente trará alterações à concepção de ensino?

Na construção educativa Atualmente, o ensino suportado pelas TIC'S é escolhido por alguns professores, sendo um auxílio equivalente a uma ferramenta que fornece determinadas funções numa sala de aula. Há sistemas concebidos de acordo com esta abordagem do ensino, não deixando de ser valorizados por quem partilha esta concepção pedagógica. Em relação aos TIC'S foi utilizado uma ferramenta o GeoGebra que auxiliou no estudo da geometria dinâmica e contribui ao aprendizado da matemática em sala de aula.

Os indícios iniciais da presença de outra lógica no campo da geometria estão evidenciados pelo Boyer (1974) quando relata que Heródoto dizia que a origem da geometria está na necessidade prática de fazer novas medidas de terra enquanto Aristóteles afirmava que a origem está no lazer sacerdotal e ritual e ambos não têm a audácia de sugerir o início antes dos povos egípcios.

Em relação à cultura antiga do Egito e Mesopotâmia, a geometria consistia em um conjunto de regras empíricas. Os gregos, entre os quais se destacou Euclides, no século III A.C, sistematizaram todos os conhecimentos existentes sobre o tema e principiaram seus fundamentos num conjunto de axiomas dos quais, segundo princípios dedutivos, se extraiam os demais resultados. A discussão dos princípios da geometria euclidiana levou à construção, no século XIX, de novos sistemas geométricos, denominados geometrias não euclidianas, e desembocou na generalização de seus métodos e sua aplicação a espaços cada vez mais abstratos.

A prática do ensino nos dias atuais é uma tarefa difícil e, em particular, ensinar Matemática tem sido um desafio porque a maioria dos alunos não busca o aprendizado e a descoberta, mas, apenas a aprovação ao termino do ano letivo. Os altos níveis de fracasso escolar denotam um descaso pela disciplina podendo ser explicado por inúmeros motivos como um deles em achar a disciplina algo de difícil entendimento. Mediante ao que foi constatado utilizou-se o Software GeoGebra como um recurso motivador e inovador buscando produzir uma proposta incentivadora com recursos didáticos e tecnológicos diferenciado com o objetivo de aproximar o aluno para o estudo e despertar o interesse pela matemática e seus fundamentos.

> Os PCN's também afirmam que computadores e outros elementos tecnológicos estão cada vez mais presentes nas diferentes atividades da população. O uso desses recursos traz significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática a medida que permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo. (BRASIL, 1998, p. 44)

Desta forma, entende-se que ao fazer uso do computador como um instrumento de ensino não porque achamos que è a melhor ou que possa vir a diminuir o trabalho do professor, mas sim porque eles estão presentes na vida de todos, inclusive nas escolas publicas. E principalmente aos alunos que conhecem e sabem manipula-los com mais facilidade que o professores. Com isso acredita-se que a tecnologia esteja a favor da educação, pois consegui atrair os alunos para o estudo e compreensão dos conteúdos matemáticos por meio de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções.

Em relação à Geometria, agrava-se o caso porque os alunos, além de fazerem contas, são necessários saber observar figuras e dominar conceitos e definições inerentes da Geometria. E assim, o material didático não contribui, pois a Geometria sempre é abordada nos últimos capítulos. Acredita-se que, quando o professor faz uso de outros recursos didáticos, seus alunos têm um melhor desempenho. Mas a maioria dos professores usa apenas o livro adotado pela escola como único recurso didático, ora por falta de tempo devido à sua carga horária excessiva, ou até mesmo falta de motivação para pesquisar em outras fontes novas estratégias que venham facilitar o processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Além disso, foi utilizado o GeoGebra na construção dos triângulos através de recurso didático com procedimentos passo a passo, de fácil compreensão, acessível a discentes e docentes. O software é uma metodologia de ensino matemático inovador, incentivador e facilitador do aprendizado.

Vale ressaltar que, diante das dificuldades de percepção dos alunos das propriedades que envolvem os triângulos, além de uma aula expositiva, o recurso GeoGebra torna-se mais motivador e facilitador, tendo como objetivo um aprendizado mais eficaz em relação ao ensino dos triângulos através da metodologia proposta. Na busca desses objetivos, a prática didática pedagógica do professor de matemática deve contar com recursos didáticos, planejamento da metodologia utilizada e dos conteúdos a serem ministrados, além de buscar uma formação continuada, no aspecto da leitura e da pesquisa.

Com essa conjectura observa-se o quão é importante às ações na busca pela qualidade do ensino e aprendizagem da matemática. Desta forma, se faz o elo entre aulas expositivas e aulas práticas em laboratórios de informática, onde os alunos deixam de serem agentes passivos na aprendizagem e passam a construir os triângulos, observando seus elementos como vértices, ângulos e lados, as propriedades que envolvem cada triângulo, portanto, passam a fazer parte integrante da aula ministrada.

Trabalhando com alunos do Ensino Médio, na rede pública estadual, em Fortaleza, percebe-se um acentuado despreparo dos mesmos em relação aos conteúdos geométricos básicos. Essa falha que pode ser considerada gritante é resultado de um ensino deficitário, acumulado ao longo das séries do Ensino Fundamental.

O objetivo do trabalho é mostrar uma didática diferente em relação ao estudo dos triângulos que foi aplicado em uma turma do nono ano do ensino fundamental, tendo como referencia, a priori a forma intuitiva, descrevendo as principais propriedades geométricas dos triângulos com suas definições e conceitos utilizando o software GeoGebra.

Em relação à estrutura do trabalho foi dividido em três capítulos, sendo o primeiro capitulo relata a história da geometria e sua fundamentação teórica.

Segundo capitulo mostra as definições, a teoria, elementos, classificação e os tipos de congruências nos triângulos.

O terceiro capitulo aborda o GeoGebra como recurso didático aplicado em sala de aula, o passo a passo na construção dos triângulos, perímetros e áreas dessa figura geométrica.

Na conclusão do trabalho foram listados exercícios propostos pertencente aos que foram estudados com os alunos na obtenção de resultados obtidos que foi um maior esclarecimento sobre o tema abordado: O ensino dos triângulos notáveis com o recurso do GeoGebra.

:

1. A HISTÓRIA DA GEOMETRIA E SEUS CONCEITOS

Na definição moderna, geometria é a disciplina matemática que tem por objetivo o estudo do espaço e das formas que estão contidas. A Palavra tem a origem grega formada por geo (terra) e metria (medida). Há cerca de cinco mil anos, os agrimensores egípcios eram capazes de marcar terrenos e medir seus perímetros e áreas. Sendo assim uma tarefa importante, pois esclarecia quanto de imposto cada dono de terra pagaria. Esse conjunto de entendimentos ao qual possibilitava a medição de terras foi chamado de geometria pelo historiador grego Heródoto. A partir de 600 a.C. os gregos avançaram muito nesses conhecimentos.

Sendo assim, a geometria deixou de servir apenas para medição de terras, transformando-se na ciência que estuda figuras como retângulos, cubos, esferas, etc e que é um dos ramos fundamentais da matemática. Apesar de os egípcios terem sido os primeiros agrimensores, antes deles alguns povos pré-históricos já mostravam conhecimentos de geometria fazendo, por exemplo, tecidos ornamentados com losangos e quadrados e usando simetrias de vários tipos.

> A geometria é o estudo das propriedades das curvas e superfícies, e suas generalizações porão meio do cálculo. Na maior parte dos casos, a geometria diferencial investiga curvas e superfícies nas vizinhanças imediatas de qualquer de seus pontos. Conhece-se esse aspecto da geometria diferencial como geometria diferencial local. Porém, há às vezes propriedades da estrutura total de uma figura geométrica que decorrem de certas propriedades locais que a figura apresenta em cada um de seus pontos. Isso leva ao que se chama de geometria integral ou geometria diferencial global (EVES, 2004, p. 601)

A geometria bem como seus estudos é visto como entendimento das formas e do espaço, de suas medidas e de suas propriedades. Os estudantes descobrem relações e constroem o senso espacial desenvolvendo, desenhos, medições, visualizando, comparando, transformando e classificando figuras. A discussão de idéias, o levantamento de conjeturas e a experimentação das hipóteses precedem as definições e o desenvolvimento de afirmações formais.

A exploração informal da Geometria pode ser motivadora e matematicamente produtiva, nos primeiros ciclos do Ensino Fundamental. Nesta etapa, o ensino de Geometria deve recair sobre a investigação, o uso de idéias geométricas e relações, ao invés de se ocupar com definições a serem memorizadas e fórmulas a serem decoradas.

Nas civilizações antigas ao que se diz respeito às culturas do Egito e da Mesopotâmia, a geometria consistia simplesmente de um conjunto de regras experimentais. Os gregos, entre os quais se destacou Euclides, no século III a.C., sistematicamente utilizaram-se todos os conhecimentos existentes sobre o tema e estabeleceram-se seus fundamentos num conjunto de axiomas dos quais, segundo princípios dedutivos, se obteve os demais resultados. Diante das argumentações e os princípios da geometria euclidiana levou à construção, no século XIX, de novos sistemas geométricos, denominados geometrias não euclidianas, e desembocou na generalização de seus métodos e sua aplicação a espaços cada vez mais abstratos.

A necessidade de medir terras determinou os primeiros passos da geometria. O filósofo grego Eudemo de Rodes, do século IV a.C., um dos primeiros historiadores das ciências, conta que os egípcios mediam suas terras para acompanhar o regime de inundações anuais do rio Nilo. De fato, o termo provém das palavras gregas geo (terra) e metron (medida).

> As origens da Geometria (do grego medir a terra) parecem coincidir com as necessidades do dia-a-dia. Partilhar terras férteis às margens dos rios, construir casas, observar e prever os movimentos dos astros são algumas das muitas atividades humanas que sempre dependeram de operações geométricas. Documentos sobre as antigas civilizações egípcia e babilônica comprovam bons conhecimentos do assunto, geralmente ligados à astrologia. Na Grécia, porém, é que o gênio de grandes matemáticos lhes deu forma definitiva. Dos gregos anteriores a Euclides, Arquimedes e Apolônio, consta apenas o fragmento de um trabalho de Hipócrates. E o resumo feito por Proclo ao comentar os "Elementos" de Euclides, obra que data do século V a.C., refere-se a Tales de Mileto como o introdutor da Geometria na Grécia, por importação do Egito (BURIASCO, 1994, p. 53)

As primeiras unidades de medida referiam-se direta ou indiretamente ao corpo humano: palmo, pé, passo, braça, cúbito. Por volta de 3500 a.C. - quando na Mesopotâmia e no Egito começaram a serem construídos os primeiros templos - seus projetistas tiveram de encontrar unidades mais uniformes e precisas. Adotaram a longitude das partes do corpo de um único homem (geralmente o rei) e com essas medidas construíram réguas de madeira e metal, ou cordas com nós, que foram as primeiras medidas oficiais de comprimento.

> Tanto entre os sumérios como entre os egípcios, os campos primitivos tinham forma retangular. Também os edifícios possuíam plantas regulares, o que obrigava os arquitetos a construírem muitos ângulos retos (de 90º). Embora de bagagem intelectual reduzida, aqueles homens já resolviam o problema como um desenhista de hoje. Por meio de duas estacas cravadas na terra assinalavam um segmento de reta. Em seguida prendiam e esticavam cordas que funcionavam à maneira de compassos: dois arcos de circunferência se cortam e determinam dois pontos que, unidos, secionam perpendicularmente a outra reta, formando os ângulos retos (OLIVEIRA, 1986, p. 12)

Os sacerdotes encarregados de arrecadar os impostos sobre a terra provavelmente começaram a calcular a extensão dos campos por meio de um simples golpe de vista. Certo dia, ao observar trabalhadores pavimentando com mosaicos quadrados uma superfície retangular, algum sacerdote deve ter notado que, para conhecer o total de mosaicos, bastavam contar os de uma fileira e repetir esse número tantas vezes quantas fileiras houvesse. Assim nasceu a fórmula da área do retângulo: multiplicar a base pela altura.

> Quando deparavam com uma superfície irregular da terra (nem quadrada, nem triangular), os primeiros cartógrafos e agrimensores apelavam para o artifício conhecido como triangulação: começando num ângulo qualquer, traçavam linhas a todos os demais ângulos visíveis do campo, e assim este ficava completamente dividido em porções triangulares, cujas áreas somadas davam a área total. Esse método - em uso até hoje - produzia pequenos erros, quando o terreno não era plano ou possuía bordos curvos (BOYER, 1994, p. 76)

De fato, muitos terrenos seguem o contorno de um morro ou o curso de um rio. E construções há que requerem uma parede curva. Assim, um novo problema se apresenta: como determinar o comprimento de uma circunferência e a área de um círculo. Por circunferência entende-se a linha da periferia do círculo, sendo este uma superfície. Já os antigos geômetras observavam que, para demarcar círculos, grandes ou pequenos, era necessário usar uma corda, longa ou curta, e girá-la em torno de um ponto fixo, que era a estaca cravada no solo como centro da figura. O comprimento dessa corda - conhecido hoje como raio - tinha algo a ver com o comprimento da circunferência. Retirando a corda da estaca e colocando-a sobre a circunferência para ver quantas vezes cabiam nela, puderam comprovar que cabia um pouco mais de seis vezes e um quarto.

Qualquer que fosse o tamanho da corda, o resultado era o mesmo. Assim tiraram algumas conclusões como o comprimento de uma circunferência é sempre cerca de *6,28* vezes maior que o de seu raio e para conhecer o comprimento de uma circunferência, basta averiguar o comprimento do raio e multiplicá-lo por *6,28.*

A história da Geometria explica a área do círculo de modo simples e interessante. Cerca de 2000 anos a.C., um escriba egípcio chamado Ahmes matutava diante do desenho de um círculo no qual havia traçado o respectivo raio. Seu propósito era encontrar a área da figura. Conta à tradição que Ahmes solucionou o problema facilmente: antes, pensou em determinar a área de um quadrado e calcular quantas vezes essa área caberia na área do círculo. Que quadrado escolher? Um qualquer? Ponderando, seria razoável tomar o que tivesse como lado o próprio raio da figura. Assim fez, e comprovou que o quadrado estava contido no círculo mais de 3 vezes e menos de 4, ou aproximadamente, três vezes e um sétimo (atualmente dizemos ***3,14 vezes***).

Conclui-se então que, para saber a área de um círculo, é necessário calcular a área de um quadrado construído sobre o raio e multiplicar a respectiva área por ***3,14***. O número **3,14** é básico na Geometria e na Matemática. Os gregos tornaram-no um pouco menos inexato: ***3,1416****.* Atualmente, o símbolo ***p ("pi")*** faz referência a esse número irracional, tendo uma determinação com aproximação de várias dezenas de casas decimais. Seu nome só tem uns duzentos anos e foi tirado da primeira sílaba da palavra *peripheria*, significando circunferência.

> Por volta de 500 a.C., as primeiras universidades eram fundadas na Grécia. Tales e seu discípulo Pitágoras coligiram todo o conhecimento do Egito, da Etúrria, da Babilônia, e mesmo da Índia, para desenvolvê-los e aplicá-los à matemática, navegação e religião. A curiosidade crescia e os livros sobre Geometria eram muito procurados. Um compasso logo substituiu a corda e a estaca para traçar círculos, e o novo instrumento foi incorporado ao arsenal dos geômetras. O conhecimento do Universo aumentava com rapidez e a escola pitagórica chegou a afirmar que a Terra era esférica, e não plana. Surgiam novas construções geométricas, e suas áreas e perímetros eram agora fáceis de calcular (FERREIRA, 1991. p. 121)

Uma dessas figuras foi chamada polígono, do grego polygon, que significa "muitos ângulos". Atualmente até rotas de navios e aviões são traçadas por intermédio de avançados métodos de Geometria, incorporados ao equipamento de radar e outros aparelhos. “O que não é de estranhar” desde os tempos da antiga Grécia, a Geometria sempre foi uma ciência aplicada, ou seja, empregada para resolver problemas práticos. Dos problemas que os gregos conseguiram solucionar, dois merecem referência: o cálculo da distância de um objeto a um observador e o cálculo da altura de uma construção.

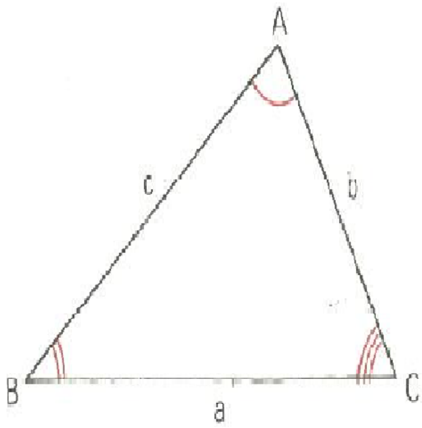
Ao olhar com brevidade a História, encontra-se em Heródoto, historiador do século V a.C., relatos que explicam como eram divididas as terras para tributação no Antigo Egito. As civilizações de beira-rio (as do Nilo e também as dos rios Tigre, Eufrates, Ganges, indo a outras regiões) desenvolvem-se uma habilidade em engenharia na drenagem de pântanos, na irrigação, na defesa contra inundação, na construção de templos e edifícios.

Era uma Geometria prática, em que o conhecimento matemático tinha uma função meramente utilitária. De acordo com essa função, a Geometria, que significa "medida de terra", associa-se à prática de medição das terras, como por exemplo: a demarcação dos lados de um terreno; a ideia de área para a tributação e para a divisão entre herdeiros; a ideia de volume na irrigação; a construção de templos etc.

2. FUNDAMENTAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

Segundo Dolce e Pompeo (2005), são dados três pontos *A, B* e *C* não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se triângulo ABC. O Triangulo *ABC* $= \Delta ABC$, onde $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup BC$.

Figura 1 – Elementos do triângulo

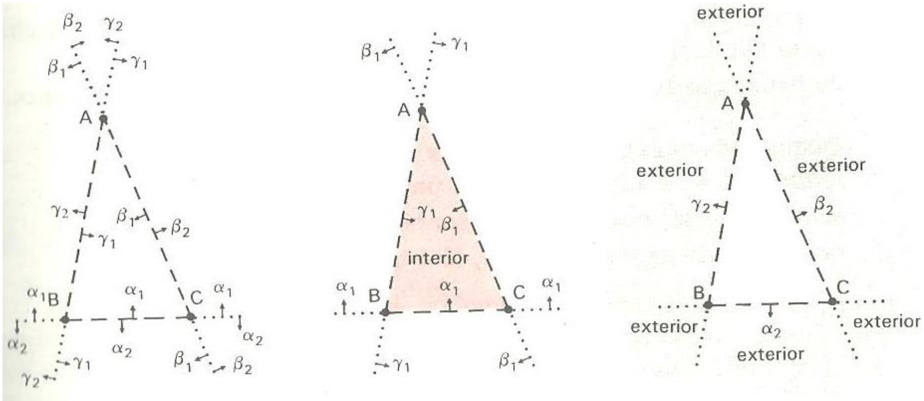


2.1 Elementos dos Triângulos

Os pontos *A*, *B* e *C* são os vértices do ΔABC.os seus lados são os segmentos $\overline{AB}$ (de medida c), $\overline{AC}$ (de medida b) e $\overline{BC}$ (de medida a). Os ângulos $B\hat{A}C$ ou $\hat{A}$, $A\hat{B}C$ ou $\widehat{B}$ e $A\hat{C}B$ ou $\hat{C}$ são ângulos do ΔABC ou ângulos internos.

Diz-se que os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ $\overline{AB}$ e os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são, respectivamente, *opostos.* Dado um triângulo *ABC, consideram-se os semiplanos abertos, tendo* $\propto_1$ Com origem na reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que contém o ponto *A,* $\propto_2$ *oposto* a $\propto_1$, β_1 com origem na reta $\overleftrightarrow{AC}$ e que contém o ponto *B,* β_2 oposto a β_1, γ_1 com origem na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e que contém o ponto *C,* γ_2 oposto a γ_1.

Figura 2 – Elementos Externos e Internos do Triângulo



O interior do $\Delta ABC = \propto_1 \cup \beta_1 \cap \gamma_1$, nesse interior forma-se um triângulo com uma região convexa, seus pontos no interior do ΔABC são pontos internos ao ΔABC .

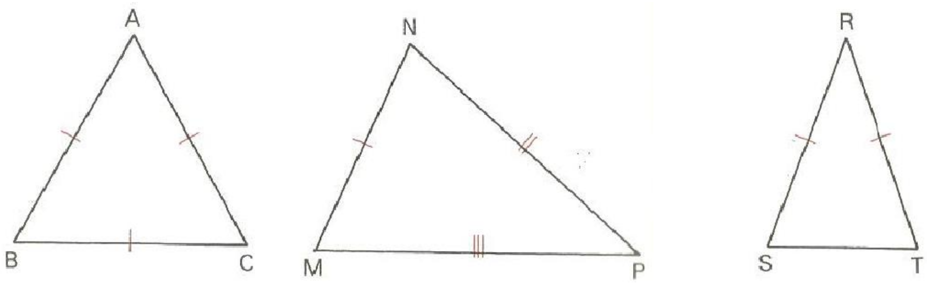
O exterior do $\Delta ABC = \propto_2 \cup \beta_2 \cup \gamma_2$ tem-se uma região côncava seus pontos do exterior do ΔABC são pontos externos ao ΔABC. A reunião do triângulo com seu interior é uma *superfície triangular* (ou superfície do triângulo).

2.2 Classificação dos Triângulos

Quanto aos lados, os triângulos se classificam em: *Equiláteros* se, somente, têm os três lados congruentes; *Isósceles* se, têm dois lados congruentes ou *Escalenos* se, somente tiver dois quaisquer lados não são congruentes.·.

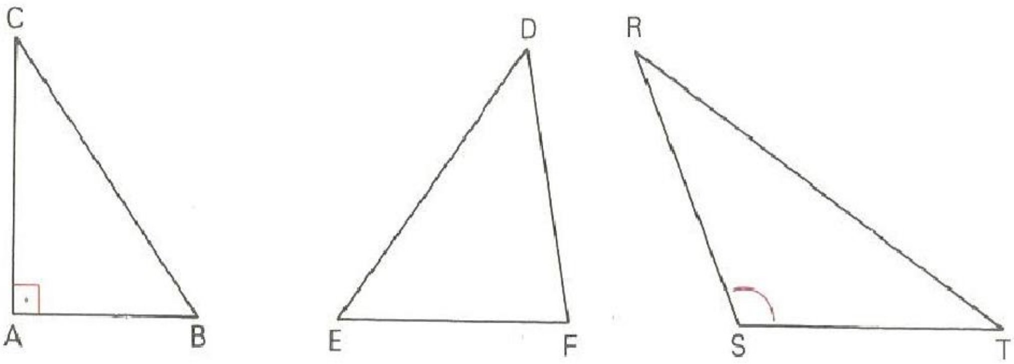
Δ*ABC* equilátero Δ*RST* isósceles Δ*MNP* escaleno

Figura 3 – Classificação dos Triângulos Quanto ao Lado



Um triângulo com dois lados congruentes é isóscele; o outro lado é chamado base e o ângulo oposto à *base* é o *ângulo* do *vértice.* Percebe-se que todo triângulo equilátero é também triângulo isósceles. Quanto aos ângulos, os triângulos são classificados em retângulos quando possuir apenas um ângulo reto, acutângulo quando tiver três ângulos agudo e obtusângulo quando o mesmo apresentar um ângulo obtuso.

Figura 4 – Classificação dos Triângulos Quanto ao Ângulo



ΔABC retângulo em A *ΔDEF acutângulo* *ΔRST obtusângulo em S*

O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo é sua hipotenusa e os outros dois são os catetos do triângulo.

2.3 Congruência de Triângulos

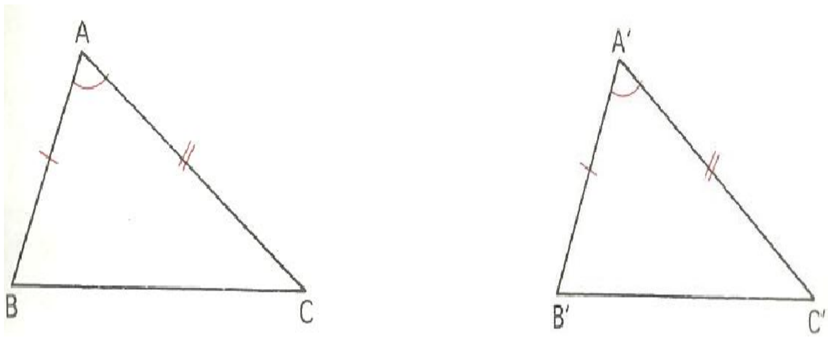
Um triângulo é congruente quando é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro. Observe a demonstração abaixo; $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \leftrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ e $\hat{A} \equiv \hat{A}'$., $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ e $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. A congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva.

A definição de congruência de triângulos dá todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Essas condições (seis congruências: três entre lados e três entre ângulos) são totais. Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes.

2.3.1 Congruência de Triângulo - Lado Ângulo Lado

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes. Esta proposição é um postulado e indica que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então o lado restante e os dois ângulos restantes também são ordenadamente congruentes.

Figura 5 – Congruência de Triângulos Lado Ângulo Lado



A seguir a demonstração da congruência de Triângulos Lado Ângulo Lado:
$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\hat{A} \equiv \hat{A}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ / $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ *e* $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. *LAL* $\Delta ABC \equiv A'B'C'$.

Teorema do Triangulo Isósceles

Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes e suas bases também formando um isoângulo.
Temos: (ΔABC, $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$) $\quad \hat{B} \equiv \hat{C}$

Consideremos os triângulos *ABC e ACB, isto é,* associemos a *A, B e C,* respectivamente, *A, C e B.*

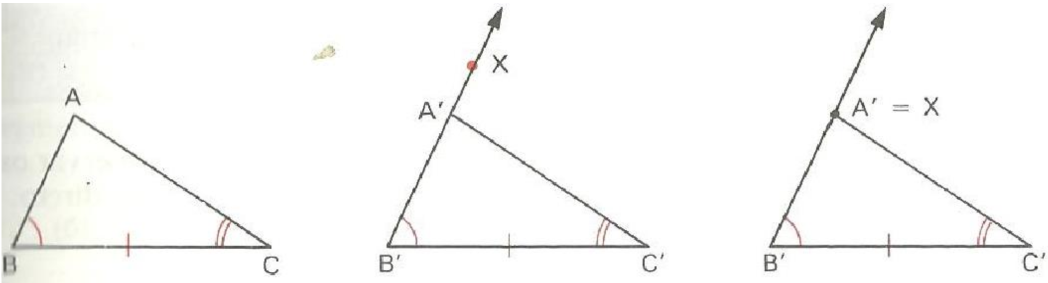
$$\left.\begin{array}{l} \text{Hipótese} \Rightarrow \quad \overline{AB} \equiv \overline{AC} \\ \\ \qquad\qquad\qquad B\hat{A}C \equiv C\hat{A}B \end{array}\right\} \Rightarrow_{LAL} \Delta ABC \equiv \Delta ACB \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$$

$$\text{Hipótese} \Rightarrow \quad \underset{\text{do } \Delta ABC}{\overline{AC}} \equiv \underset{do\ \Delta ACB}{\overline{AB}}$$

2.3.2 Congruência de Triângulo Ângulo Lado Ângulo

Os ângulos adjacentes ao lado $\overline{BC}$ são e $\hat{B}$ e $\hat{C}$; os adjacentes ao lado $\overline{B'C'}$ são $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são $\hat{B}$' e $\hat{C}$'.

Figura 6 – Congruência de Triângulos Ângulo Lado Ângulo



Hipótese *Tese*

($\hat{B} \equiv \hat{B}$ (1); $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ (2); $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ (3) $\Longrightarrow$ *ΔABC* $\equiv$ *ΔA'B'C'*

Com a demonstração prova-se que $\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$, pois com isso recai-se no 1º caso. Pelo postulado do transporte de segmentos, obtêm na semirreta $\overrightarrow{B'A'}$ um ponto X tal que $\overline{B'X} \equiv \overline{BA}$. $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ *e* $\overline{BA} \equiv \overline{B'X}$ $\Longrightarrow$ *LAL ΔACB* $\equiv$ *ΔX'B'C'* $\rightarrow$ *B$\hat{C}$A* $\equiv$ *B'$\hat{C}$'X'.*

Da hipótese *(3)* B$\hat{C}$A $\equiv$ *B'$\hat{C}$'A''A',* com *(5)* B$\hat{C}$A $\equiv$ *B'$\hat{C}$'X'* e com o postulado do transporte de ângulos, decorre que $\overrightarrow{B'A'}$ e $\overrightarrow{C'X'}$ = $\overrightarrow{C'A'}$ interceptam-se num único ponto *X = A'*. De *X ≡ A', com (4)*, decorre que $\overline{B'A'} \equiv \overline{BA}$. Então: ($\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$·, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$*)* *LAL ΔABC* $\equiv$ *ΔA'B'C'.*

Esquema do Caso 2º

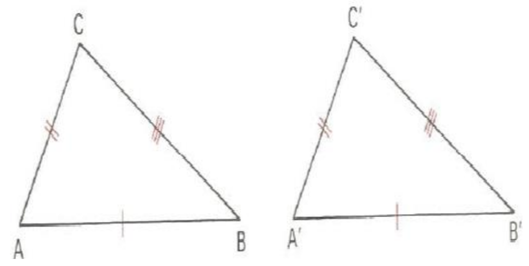
$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \hat{C} \equiv C' \end{array}\right\} \Longrightarrow_{ALA} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{array}\right.$$

Com base no 2º caso (ALA), pode-se provar que dois ângulos congruentes forma um triângulo isóscele. Considerando um triângulo isóscele *ABC* de base $\overline{BC}$, basta observar os triângulos *ABC e ACB* e proceder de modo análogo ao do teorema direto.

2.3.3 Congruência de Triângulo - Lado Lado Lado

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.

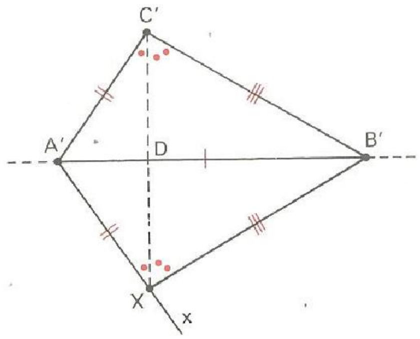
Figura 7 – Congruência de Triângulo Lado Lado Lado



($\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ (1), $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ (2) $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ (3) $\Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

Pela demonstração temos o postulado do transporte de ângulos e do transporte de segmentos obtêm um ponto *X* tal que: $X\hat{A}'B \equiv C\hat{A}B$ e $\overline{A'X} \equiv \overline{AC}$

Figura 8 – Transporte de Ângulos



Estando *X* no semiplano oposto ao de *C'* em relação à reta $\overleftrightarrow{A'B'}$. De $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, vem: $\overline{A'X}$ ≡ $\overline{A'C'}$. Seja *D* o ponto de interseção de $\overline{C'X}$ com a reta $\overleftrightarrow{A'B'}$.

$\overline{A'B'}$, $C\hat{A}B$, $\overline{AC}$ *LAL* ⟹ Δ*ABC* ≡ Δ*A'B'X'* *(7)* → $\bar{X}B'$ ≡ $\overline{CB}$ ⟹ *(3)* $\overline{XB}'$ ≡ $\overline{C'B'}$ *(8)*

$\overline{A'C'}$. ⟹ Δ*A'C'X'* é isósceles de base $\overline{C'X}$ → *A'C'X'* ≡ *A'*$\hat{X}$*'C'* *(9)*

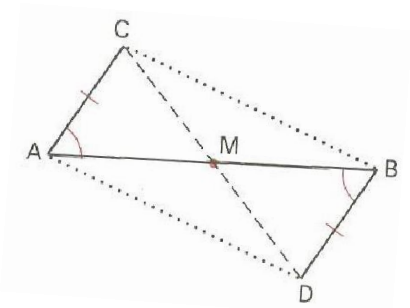
$\overline{C'B'}$ ⟹ Δ*B'C'X' é isósceles de base* $\overline{C'X}$ → *B'C'X* ≡ *B'*$\hat{X}$*'C'* *(10)*

Por soma ou diferença de *A'*$\hat{X}$*'C'* e *B'*$\hat{X}$*'C'* (conforme *D* seja interno ou não ao segmento $\overline{A'B'}$), obtêm: *A'*$\hat{C}$*B'* ≡ *A'*$\hat{X}$*B'*. $\overline{A'C'}$, *A'*$\hat{X}$*B'*, $\overline{C'B'}$ ⟹ Δ*A'B'C'* ≡ *A'B'X'* ⟹ ΔABC ≡ $\Delta A'B'C'$

2.3.4 Existência do Ponto Médio

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, usando os postulados de transporte de ângulos e de segmentos constrói-se. *C*$\hat{A}$*B* ≡ *D*$\hat{B}$*A e* $\overline{AC}$ ≡ $\overline{DB}$.

Figura 9 – Ponto Médio



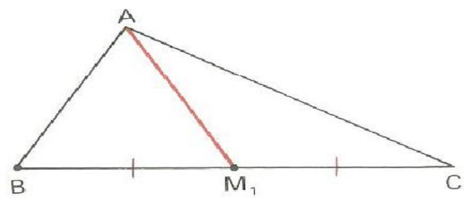
Com *C* e *D* em semiplanos opostos

em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$. O segmento $\overline{CD}$ intercepta o segmento $\overline{AB}$ num ponto *M.* nota-se a sequencia de congruências de triângulos: $\Delta CAB \equiv \Delta DBA$ (LAL, $\overline{AB}$ é comum), $\Delta CAD \equiv \Delta DBC$ (ALA, com soma de ângulos ou pelo caso LLL) e $\Delta AMD \equiv \Delta BMC$ (ALA). Desta última congruência decorre que⇒ $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$, ou seja, *M é o ponto médio* de $\overline{AB}$.

2.3.5 A Existência da Bissetriz

Dado um ângulo $a\hat{O}b$, usando o postulado do transporte de segmentos obtêm *A* e *A'* em *Oa* e *B* e *B'* em *Ob* tais que: $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ e $\overline{OA}' \equiv \overline{OB}$'. Com $\overline{OA}$ > $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ > $\overline{OB}$.

Figura 10 - Bissetriz no Triângulo

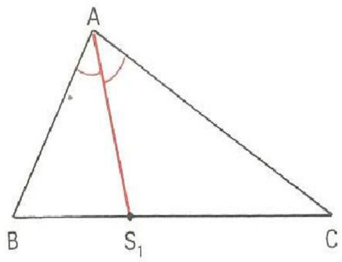


Seja C o ponto de interseção de $\overline{AB}$' com $\overline{A'B}$ e consideremos a semirreta $\overleftrightarrow{OC}$ = *Oc.* Com a bissetriz traçada no triangulo forma-se uma sequencia de congruência: $\Delta AOB' \equiv \Delta BOA'$ (LAL, $\alpha\hat{O}$b (comum), $\Delta ACA' \equiv \Delta BCB'$ (ALA, ângulos adjacentes suplementares, diferenças de segmentos) e $\Delta OAC \equiv \Delta OBC$ (LAL). Desta última congruência decorre que *AÔC* ≡ *BÔC, ou seja, Oc* é bissetriz de $\alpha\hat{O}$b.

2.3.6 Mediana de um Triângulo

Mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num vértices e no ponto médio do lado oposto tendo o M_1 o ponto médio do lado $\overline{BC}$, o $\overline{AM}_1$ é a mediana relativa ao $\overline{BC}$ e $\overline{AM}_1$ é a mediana relativa ao vértice *A.*

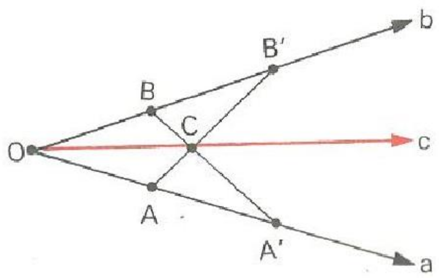
Figura 11 – Mediana do Triângulo



2.3.7 Bissetriz Interna de um Triângulo

Bissetriz interna de um triângulo é o segmento, com extremidades num vértice e no lado oposto, que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes. $S_1 \in \overline{BC}$, $S_1\hat{A}B \equiv S_1\hat{A}C$, $\overline{AS_1}$ é a bissetriz relativa ao lado $\overline{BC}$ e $\overline{AS_1}$ é a bissetriz relativa ao vértice A.

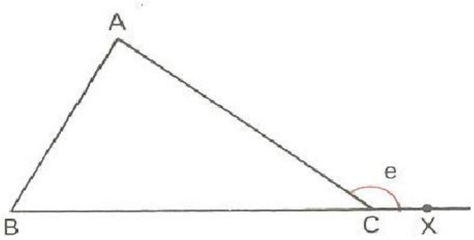
Figura 12 – Bissetriz Interna do Triângulo



2.3.8Teorema do Ângulo Externo

Dado um ΔABC e sendo $\overleftrightarrow{CX}$ a semirreta oposta à semirreta $\overleftrightarrow{CB}$, o ângulo $\hat{e}$ = $A\hat{C}X$, *sendo* o ângulo externo do ΔABC adjacente a $\hat{C}$ e não adjacente aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$. O ângulo $\hat{e}$ o suplementar adjacente de $\hat{C}$.

Figura 13 – Teorema Externo do Ângulo

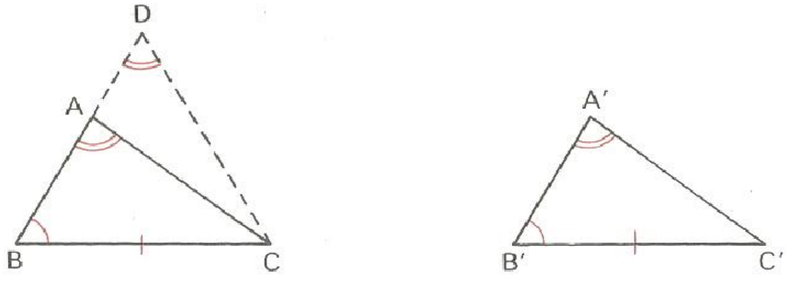


Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes. Observe-se a hipótese a seguir: (ΔABC, é externo adjacente a $\hat{C}$) $\Rightarrow$ ($\hat{e}$ > $\hat{A}$ e $\hat{e}$ > $\hat{B}$).

Observando a demonstração percebe-se *M* o ponto médio de $\overline{AC}$ e *P* pertencente à semirreta $\overleftrightarrow{BM}$ tal que: $\overline{BM}$ $\equiv$ $\overline{MP}$. Pelo caso *LAL*, ΔBAM, $\equiv$ $P\hat{C}M$. Como *P* é interno ao ângulo $\hat{e}$ = $A\hat{C}X$, vem que $\hat{e}$ > $P\hat{C}M$. De *(*$P\hat{C}M$*) e (*$\hat{e}$ > $P\hat{C}M$*),* decorre que $\hat{e}$ > $\hat{A}$. Analogamente, tomando o ponto médio de $\overline{BC}$ e usando ângulos opostos pelo vértice, conclui-se que: $\hat{e}$ > $\hat{B}$.

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

Figura 14 - Congruência Lado Ângulo Ângulo Oposto



Em relação à congruência observa-se a demonstração: $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{A} \equiv \hat{A}' \Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. Para a demonstração temos três possibilidades para $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$: a primeira é $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$·, depois a segunda com $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ e última possibilidade $\overline{AB} > \overline{A'B'}$.

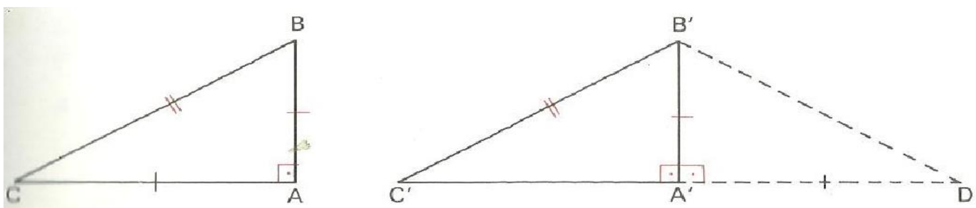
Verifica-se na primeira possibilidade que: ($\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \Longrightarrow$ *LAL* $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C$. *Na segunda observa-se* que tomando um ponto *D* da semirreta $\overrightarrow{BA}$ tal que $\overline{BD} = \overline{A'B'}$ fazendo o transporte de segmentos temos: ($\overline{DB} \equiv \overline{A'B'}$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$) $\Longrightarrow$ *LAL* $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Longrightarrow \widehat{D} \equiv \hat{A} \Longrightarrow$ *(* $\hat{A} \equiv \hat{A}'$*) e* $\hat{A} \equiv \hat{A}$.

O que é absurdo, de acordo com o teorema do ângulo externo no ΔADC. Logo, a segunda possibilidade não se verifica, pelo mesmo motivo, com a diferença que *D* estaria entre *A* e *B.* Como só pode ocorrer na primeira possibilidade tem: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

2. 3. 9 Congruência de Triângulos Retângulos.

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

Figura 15 – Congruência no Triangulo Retângulo



$\hat{A} \equiv \hat{A}'$ (retos), $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

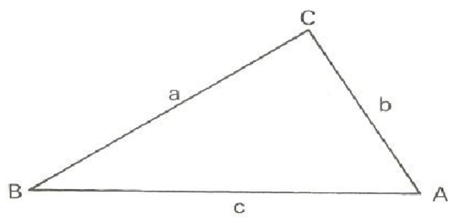
Pela demonstração toma-se o ponto *D* na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{A'D} \equiv \overline{AC}$·, fazendo o transporte de segmentos temos: ($\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'D}$) $\Longrightarrow$ *LAL* $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Longrightarrow \overline{BC} \equiv \overline{B'D}$ e $\hat{C} \equiv \widehat{D}$. ($\overline{B'D}$) e ($\overline{B'C'}$) $\Longrightarrow \overline{B'C'} \equiv \overline{B'D} \Longrightarrow \Delta A'B'C'$ é isósceles de base $\overline{C'D}$ e $\hat{C} \equiv \widehat{D}$ e ($\widehat{D}$) e ($\widehat{D}$) $\Longrightarrow \hat{C} \equiv \hat{C}'$

.Considerando agora os triângulos *ABC* e *A'B'C'* tem-se: ($\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$) $\Rightarrow_{LAL_0}$ ΔABC $\equiv$.

2.4. As Desigualdades nos Triângulos

Nas *desigualdades dos triângulos o maior lado opõe-se o maior ângulo.* Nos dois lados de um triangulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.Desta forma temos: $\overline{BC} > \overline{AC}$ $\Rightarrow$ $B\hat{A}C > A\hat{B}C$ *ou* a > b $\Rightarrow \hat{A} > \hat{B}$.

Figura 16 – Desigualdades nos Triângulos

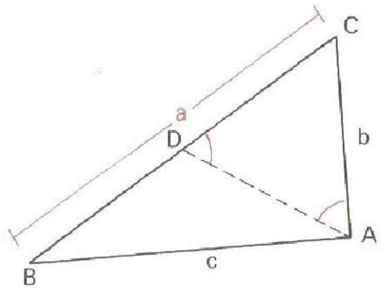


A seguir temos a demonstração:

Considera-se *D* em $\overline{BC}$ tal que $\overline{CD} \equiv \overline{CA}$. $\overline{BC} > \overline{AC}$ $\Rightarrow$ *D* é interno a $C\hat{A}B \Rightarrow$ $C\hat{A}B > C\hat{A}D$ *e o* ΔCAD Isósceles de base $\overline{AD}$ $\Rightarrow$ $C\hat{A}D \equiv C\hat{D}A$ $\Rightarrow$ $C\hat{A}B > C\hat{D}A$. $C\hat{D}A$ è ângulo externo no ΔABD $\Rightarrow$ $C\hat{D}A > A\hat{B}D = A\hat{B}C$. De ($C\hat{D}A$) e ($A\hat{B}C$), vem: $C\hat{A}B > A\hat{B}C$, *ou seja,* $\hat{A} > \hat{B}$.

Ao maior ângulo opõe-se o maior lado quando dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruente e o maior deles está oposto ao maior lado. $B\hat{A}C > A\hat{B}C$ $\Rightarrow \overline{BC} > \overline{AC}$ *ou*$\hat{A} >$ $\Rightarrow$ *a > b.*

Figura 17 – Ângulo Opondo-se ao Maior lado do Triângulo



Há três possibilidades para $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$: a primeira é $\overline{BC} < \overline{AC}$ a segunda temos $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$ e a terceira $\overline{BC} > \overline{AC}$. Se $\overline{BC} < \overline{AC}$, então, pelo teorema anterior, $\hat{A} < \hat{B}$, o que contraria a hipótese e também $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$, então, pelo teorema do triângulo isósceles, $\hat{A} \equiv \hat{B}$, o que contraria a hipótese. Logo, por exclusão, temos: $\overline{BC} > \overline{AC}$

A desigualdade triangular cada lado é menor que a soma dos outros dois. *Daí tem: A, B e C* não colineares $\Longrightarrow \overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$ e *a, b e c* lados de um triângulo $\Longrightarrow$ a < b + c.

De acordo com a demonstração considera-se um ponto *D* na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{AC}$, tal que $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$. $\overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AD} \Longrightarrow \overline{AB}$ e $\overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AB}$. $\overline{AB} \Rightarrow$ *ΔABD* Isósceles de base $\overline{BD}$ $\Rightarrow A\hat{D}B \equiv A\hat{B}D \Rightarrow C\hat{B}D > A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D$. *A é interno ao ângulo* $C\hat{B}D \Rightarrow C\hat{B}D > A\hat{B}D$.

No triângulo *BCD* com $C\hat{B}D$ e o teorema anterior, vem: $\overline{BC} < \overline{DC}$ e com $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$, ou ainda: *a < b + c.*

Nas desigualdades triangulares também pode ser enunciada como segue: Em todo triângulo, cada lado é maior que a diferença dos outros dois. Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, deve-se ter as três condições abaixo: a < *b + c, b < a + c* e *c < a + b*. Estas relações podem ser resumidas como segue: a < *b + c, b < a + c* $\Leftrightarrow$ *b – c < a* $\Leftrightarrow$ *c < a + b* $\Leftrightarrow$ *c – b < a.*

3. O RECURSO DIDÁTICO GEOGEBRA

O software GeoGebra é usado na geometria dinâmica[1] e criado para ser utilizado em sala de aula. Com esse software pode-se fazer construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas bem como funções e mudá-los dinamicamente posteriormente. Também, podem ser inseridas equações e coordenadas diretamente. Com isso, é capaz de lidar com variáveis para números, vetores e pontos, derivar e integrar funções e ainda, oferece comandos para encontrar raízes e pontos extremos de uma função.

Assim, tem-se a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo duas representações diferentes de um mesmo objeto, interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica. Uma das vantagens do GeoGebra em relação a outros programas de geometria dinâmica é que não se precisa dominar todas as ferramentas do programa para usá-lo. Também tem uma quantidade maior de recursos

> (...) o bom uso que se possa fazer do computador na sala de aula também. depende da escolha de softwares, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo.(BRASIL, 1998, p. 44)

O GeoGebra é um instrumento de fácil acesso, tecnologia que possibilita explorar e visualizar a dinamicidade existente na geometria. Sendo assim, reforçam conceitos e propriedades em que o aluno tem mais dificuldades de visualizar alterações de posições e movimentos imaginários, como as limitações da reta, da semirreta e segmentos de reta, propriedades de polígonos, teorema de Tales, condição de existência de triângulos, entre outros.

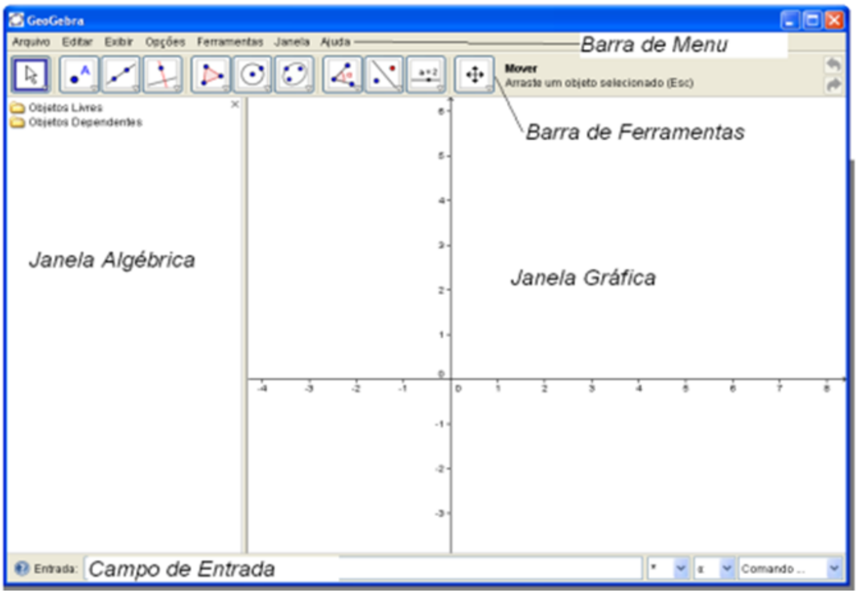
Algumas limitações foram observadas durante o estudo sobre o uso do programa GeoGebra no ensino de geometria plana. A maior delas diz respeito aos ângulos que na geometria euclidiana não são orientados. No programa a marcação é de ciclo completo, ou seja, o programa é geometria orientada.

---

[1] A Geometria Dinâmica é um ambiente virtual voltado para o Ensino e Aprendizagem de Geometria de uma forma não estática como no quadro da sala de aula, ou seja, de uma forma dinâmica.

. Para medir ângulos opostos pelo vértice, por exemplo, deverá marcar pontos nos lados do ângulo para utilizar a opção três pontos, caso contrário o programa só considera dois dos quatro ângulos.

FIGURA 18 - Comando do GeoGebra.



Fonte: Software Geogebra 2009.

Além das barras de ferramentas do Windows (arquivo, editar exibir, opções, ferramentas, janela e ajuda) o GeoGebra tem uma barra de ferramentas com caixas indicando ícones suas funções que vão desde a construção de pontos, retas vetores, bissetriz, mediatriz, retas tangentes, ângulos, polígonos, círculos, arcos, elipse, hipérbole, parábola, cônicas, inserir imagens, inserir textos e muito mais, até um campo de entrada onde se pode digitar comandos para inúmeras construções inclusive de gráficos. Todas as funções ícones e potencialidades do software GeoGebra podem ser melhor visualizadas com a prática de atividades.

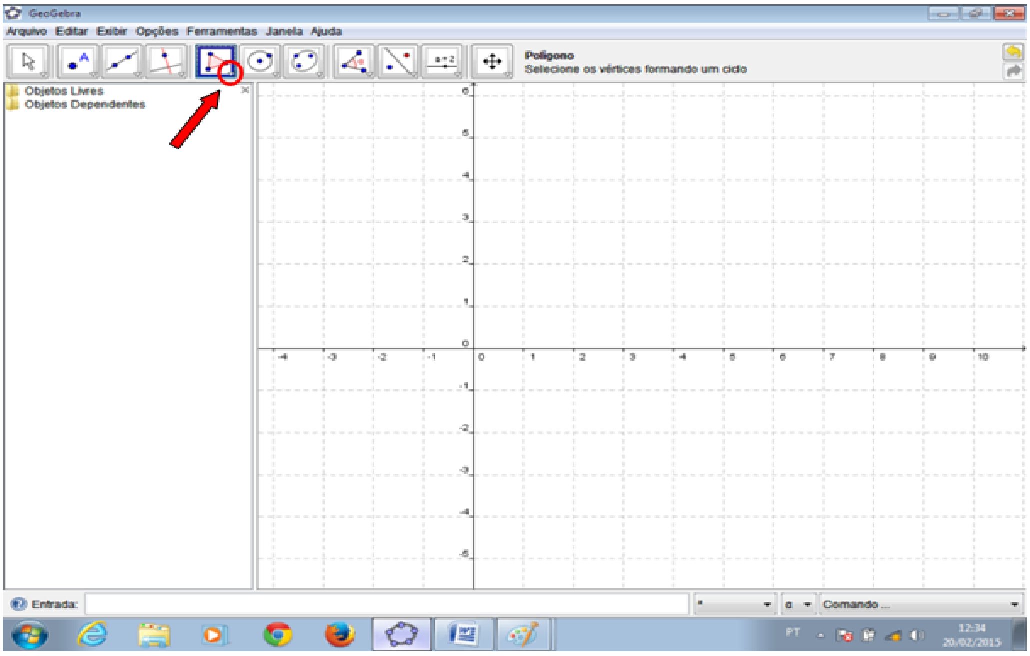
São Poucos matérias didáticos que falam sobre software de geometria dinâmica, devido a isso grande parte das atividades abaixo foram criadas ao longo de uma prática docente de Matemática.

3.1 Construção do Triângulo Escaleno no GeoGebra

EXEMPLO 01: Construir um triângulo escaleno. Determinar suas medidas de lados, perímetro, áreas e ângulos internos.

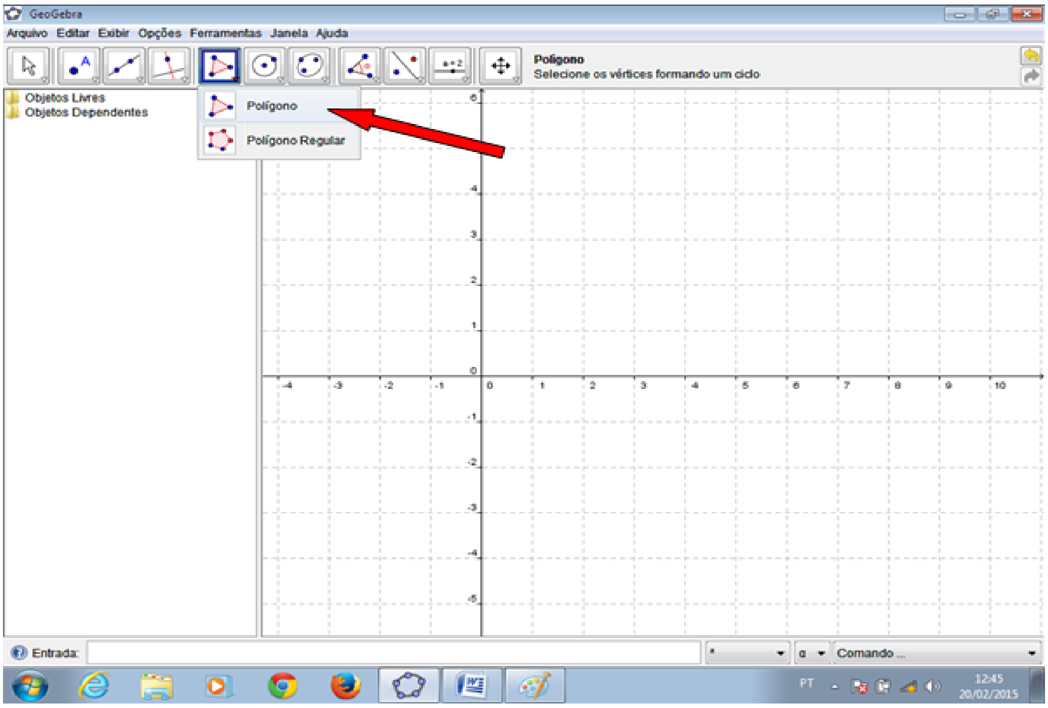
1º Passo: Clique no canto inferior direito da quarta caixa de ferramenta.

Figura 19 – Construção do Triângulo Escaleno



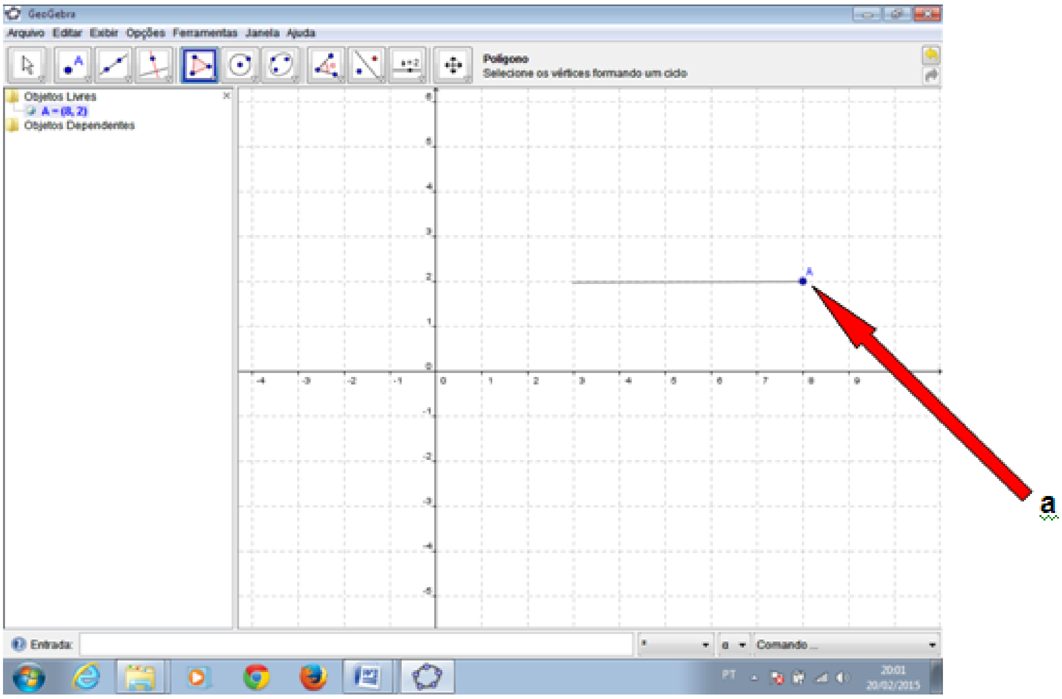
Irá, abrir uma janela com as opções Polígonos e Polígonos Regulares, escolher a opção Polígonos.

Figura 20 – Janela: Polígonos e Polígonos Regulares



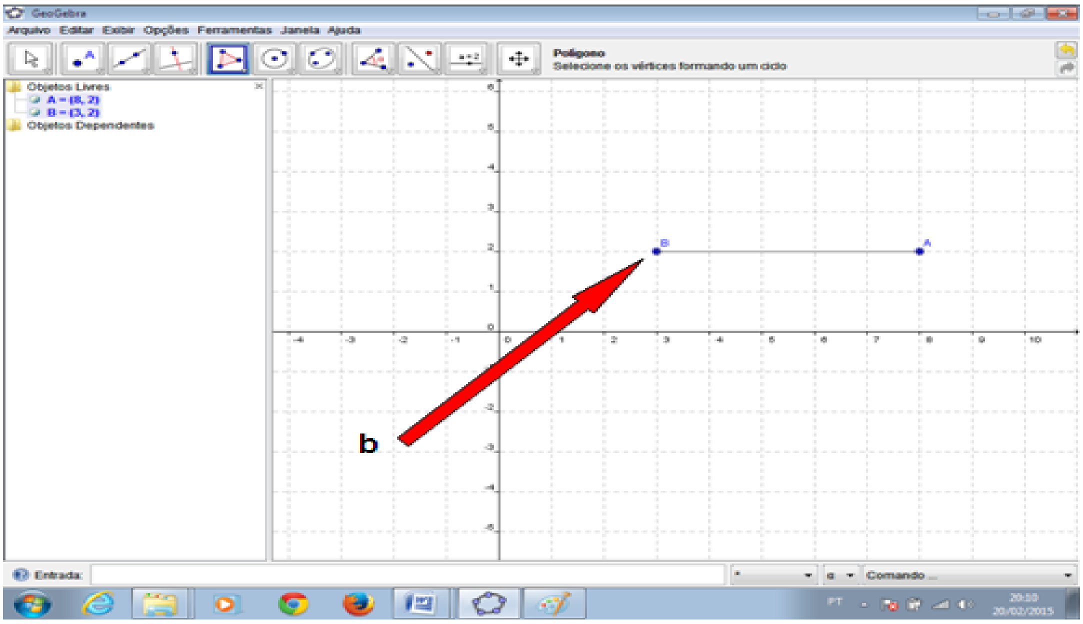
2º Passo: Clique em três pontos distintos (Ponto A, Ponto B e Ponto C) e não colineares.

Figura 21 – Pontos Não colineares



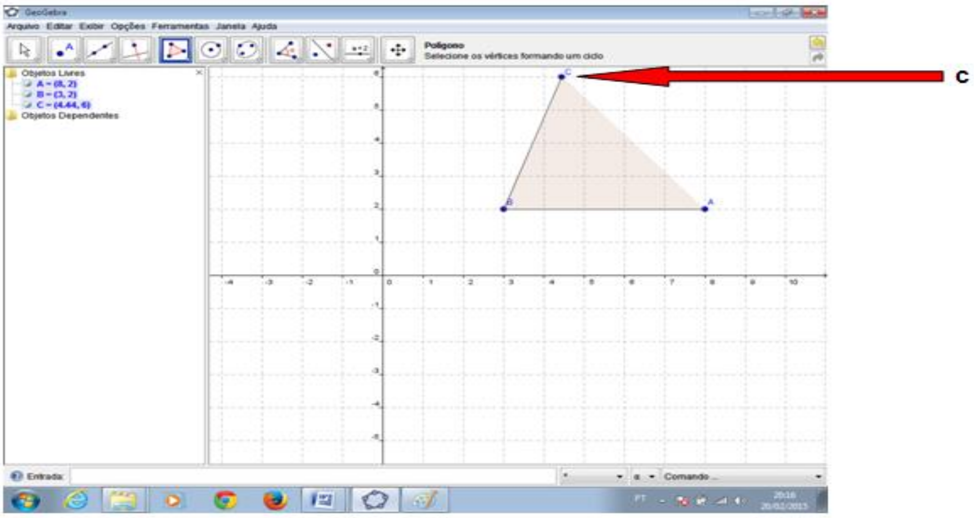
a) Clique em um ponto qualquer da janela de visualização e mova o cursor.

Figura 22 – Formando os lados do Triângulo Escaleno



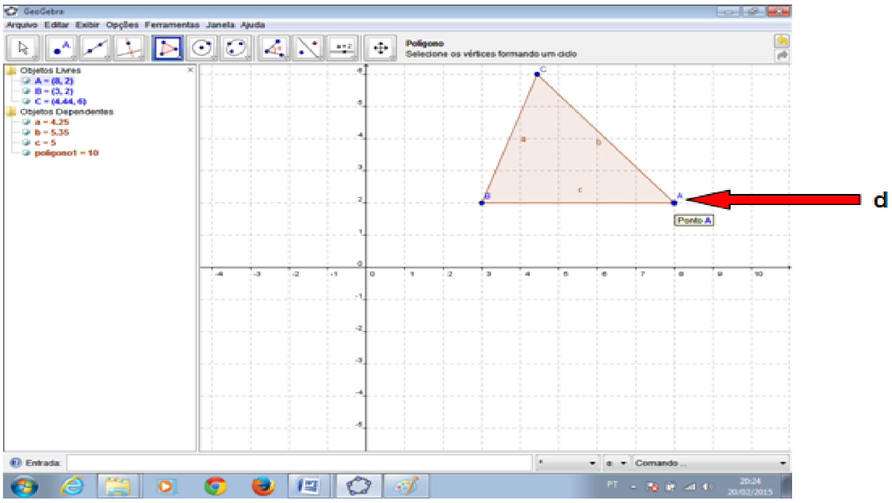
b) Dê um novo clique em um segundo ponto da janela de visualização e mova o cursor.

Figura 23 – Formando os lados do Triângulo Escaleno



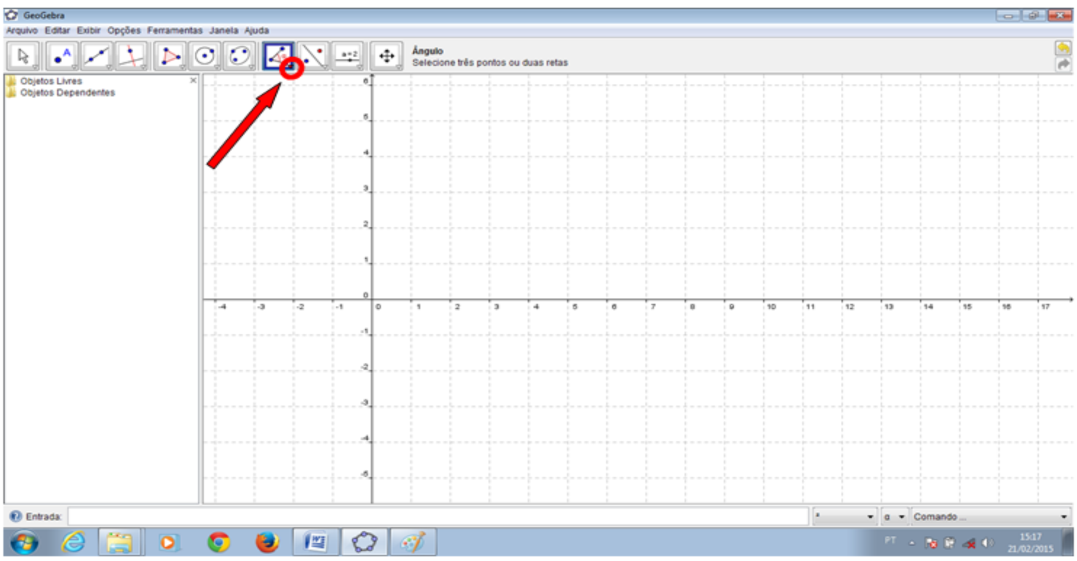
c) Dê um novo clique em um terceiro ponto da janela de visualização e coloque o cursor até primeiro o ponto (Ponto A).

Figura 24 – Finalizado o Triângulo Escaleno



d) Clique sobre o primeiro ponto (Ponto A), e estará construído o triângulo escaleno.

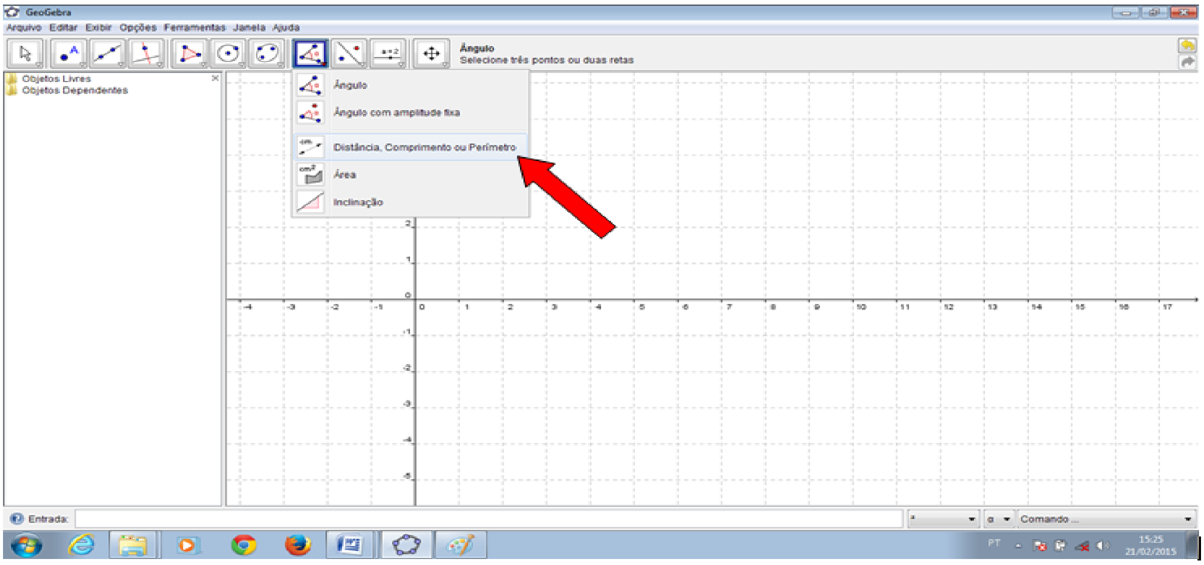
Figura 25 – Comando do GeoGebra



.

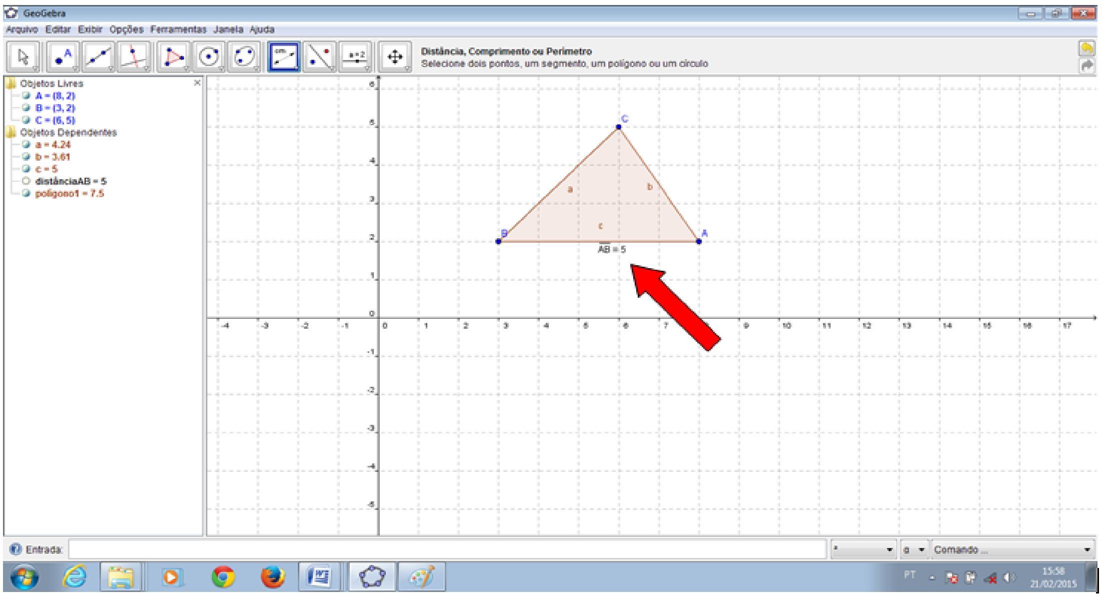
3º Passo: Clique no canto inferior direito da oitava caixa de ferramenta Irá abrir uma janela com as opções Ângulo, Ângulo com amplitude fixa, Distância, Comprimento ou Perímetro, Área e Inclinação, escolher a opção Distância ou comprimento.

Figura 26 - Caixa de Ferramenta GeoGebra



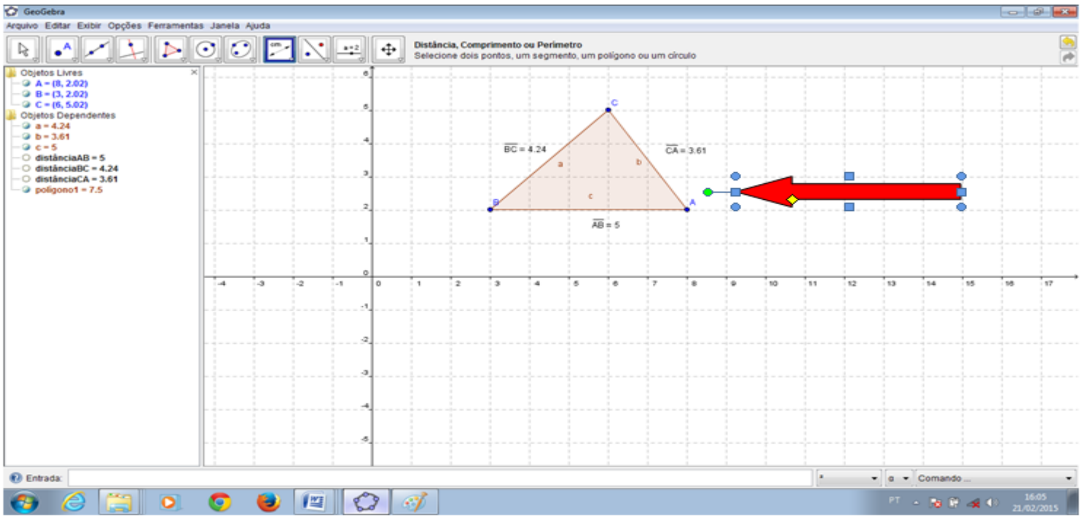
a) Clique no ponto A e depois no ponto B. Está medido o seguimento $\overline{AB}$.

Figura 27 – Construção do Segmento $\overline{AB}$



b) Repetir o terceiro passo para os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

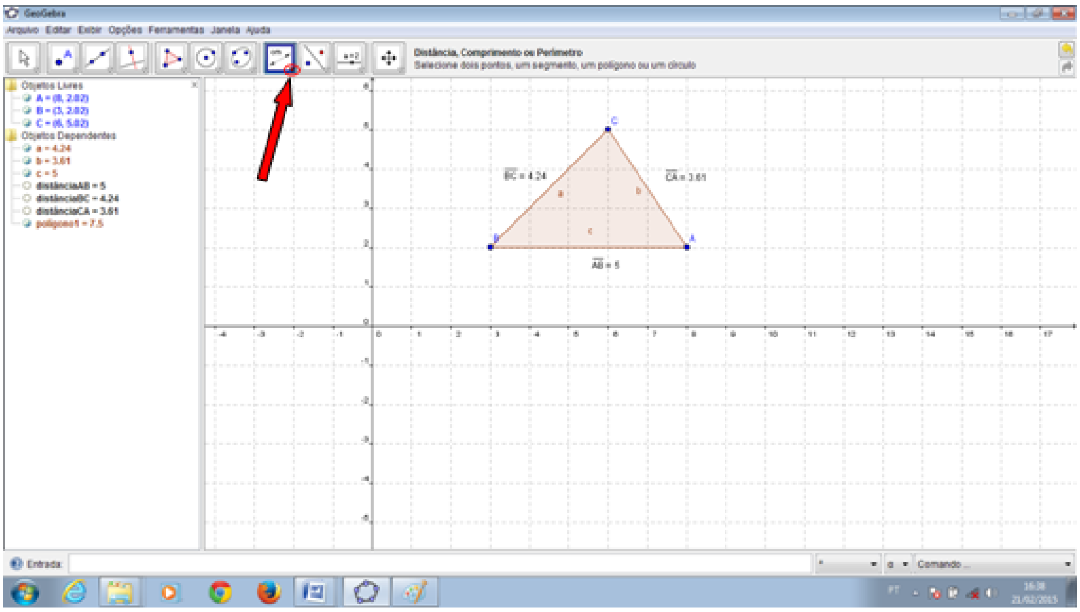
Figura 28 - Construindo os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$



c) Depois de definidas as medidas dos segmentos, para determinar o Perímetro, relembramos seu conceito “Perímetro é a soma das medidas de todos os lados de um polígono”. Portanto, é só somar os valores dos segmentos encontrados nos passos anteriores.

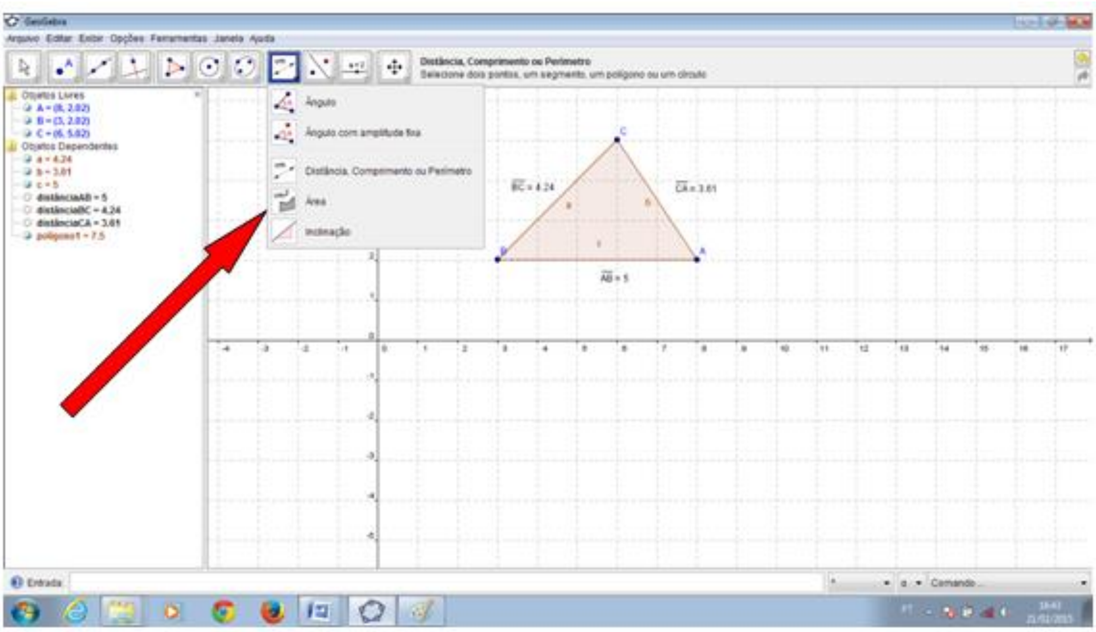
4º Passo: Clique na parte inferior do lado direito na oitava caixa de ferramenta.

Figura 29 - soma dos lados de um polígono



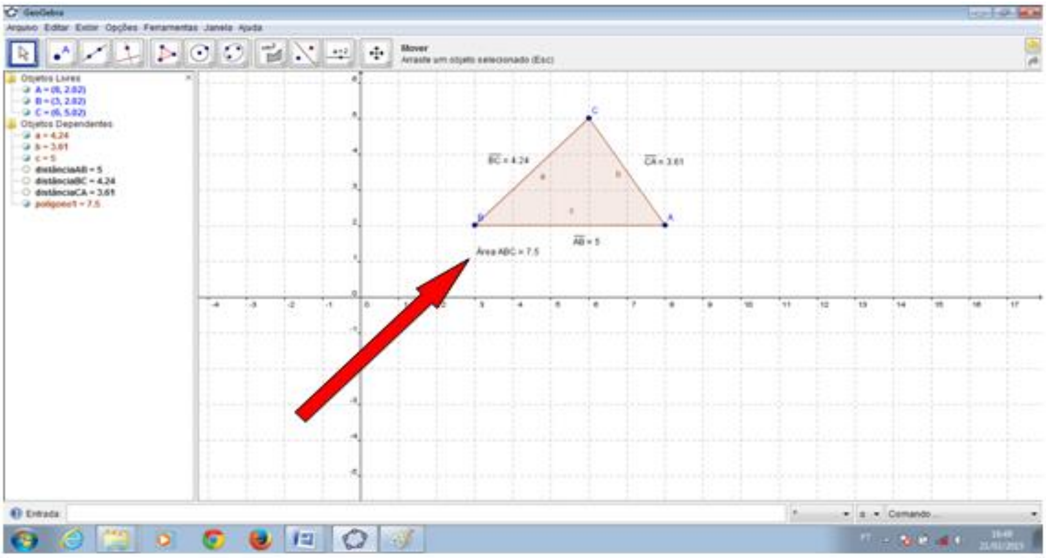
Irá abrir uma janela com as opções Ângulo, Ângulo com amplitude fixa, Distância, Comprimento ou Perímetro, Área e Inclinação, escolher a opção Área.

Figura 30 - Calculando a Área do Triângulo



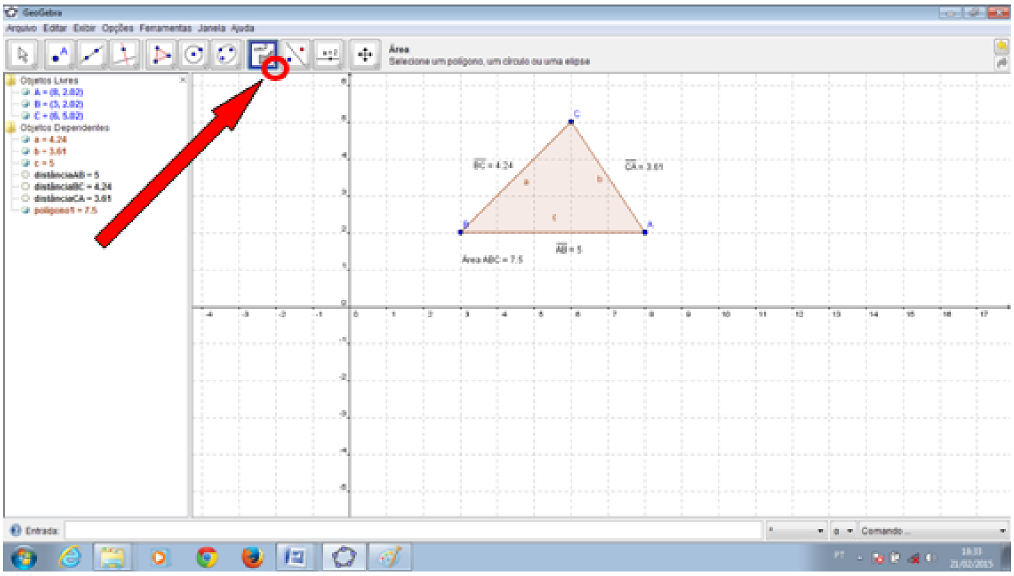
a) Clique dentro do triângulo e então aparecerá o valor da área.

Figura 31 – Resultado da Área do Triângulo



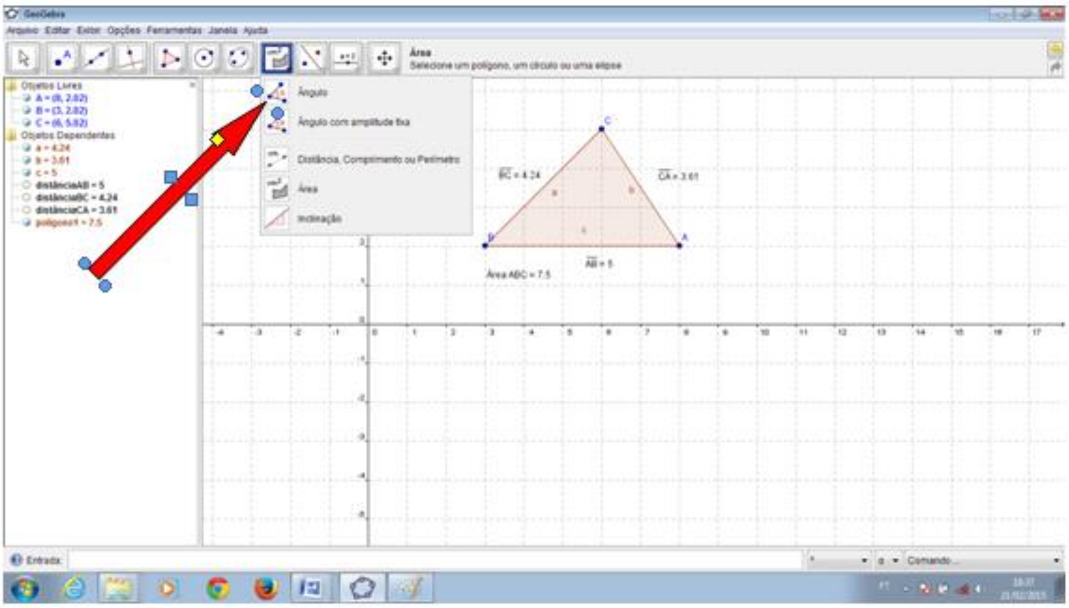
5º Passo: Clique no canto inferior direito da oitava caixa de ferramenta.

Figura 32 - Caixa de Ferramentas do GeoGebra



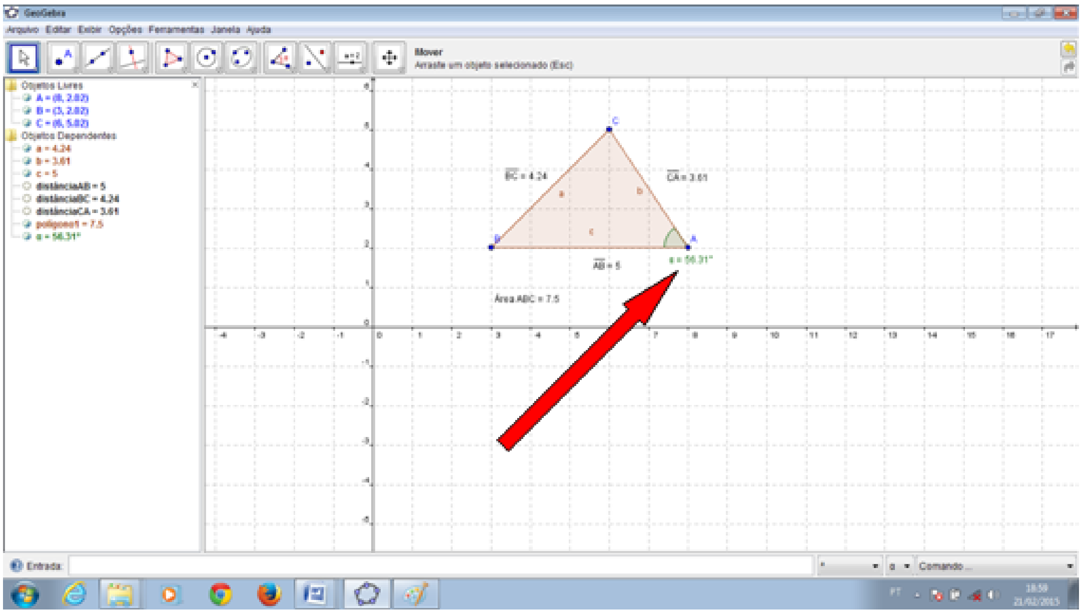
Irá abrir uma janela com as opções Ângulo, Ângulo com amplitude fixa, Distância, Comprimento ou Perímetro, Área e Inclinação, escolher a opção Área.

Figura 33 - Comando do GeoGebra: Construindo Ângulos



a) Clique em três pontos distintos, sempre em sentido anti-horário em relação aos pontos do polígono, sendo o ponto do centro, o ângulo a ser marcado. Portanto, para ser medir o ângulo $B\hat{A}C$, clique no ponto C, depois no ponto A e por fim no ponto B.

Figura 34 – Medindo o Ângulo $B\hat{A}C$ no GeoGebra



b) Repetir o quinto passo para os ângulos A C e A$\hat{C}$B.

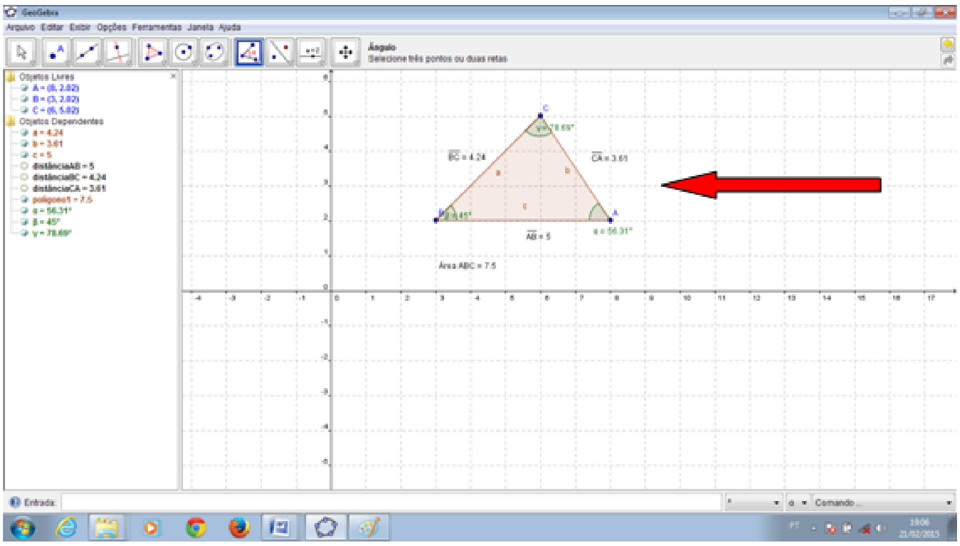
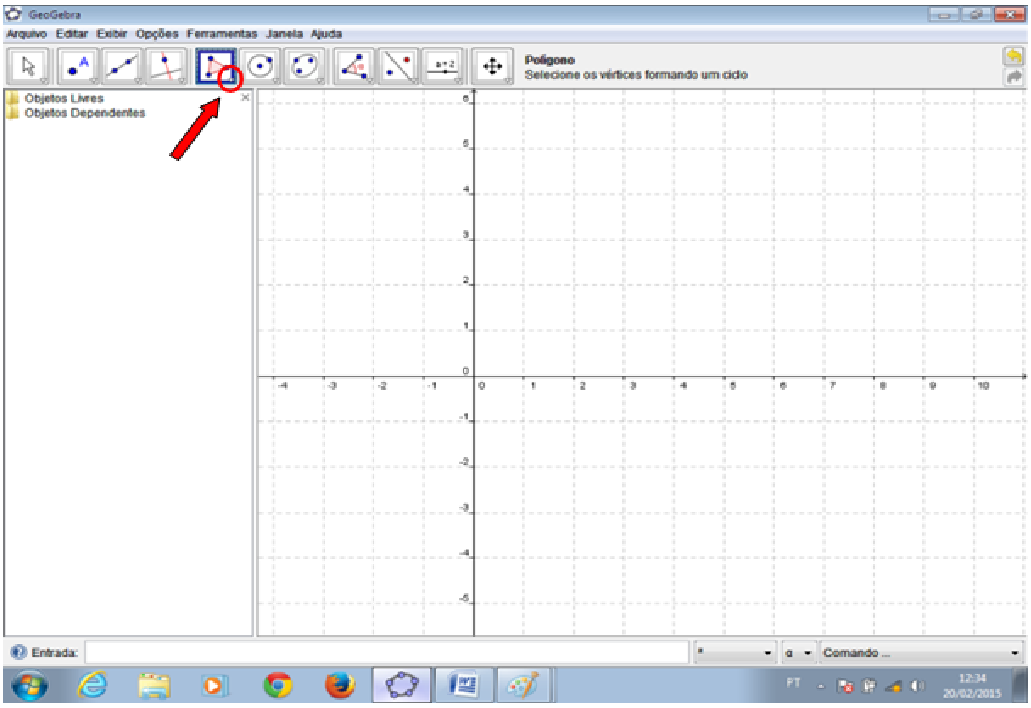


Figura 35 - Construindo o Ângulo A$\hat{C}$B

EXEMPLO 02: Construir um triângulo equilátero. Determinar suas medidas de lados, perímetro, áreas e ângulos internos.

1º Passo: Clique no canto inferior direito da quarta caixa de ferramenta.

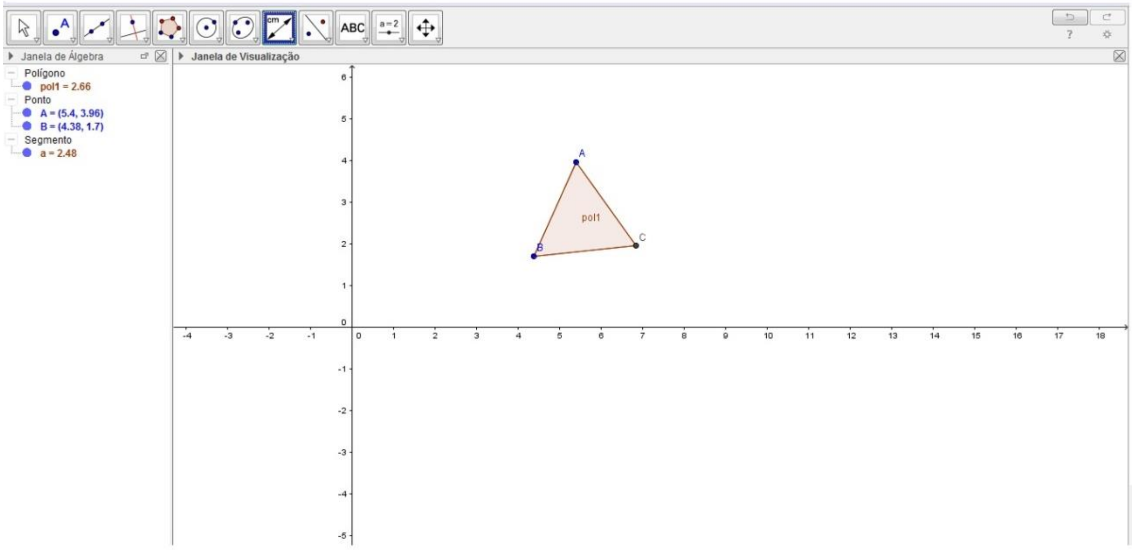
Figura 36 – Comandos do GeoGebra



Irá, abrir uma janela com as opções Polígonos, Polígonos Regulares, polígonos rígidos e polígonos semideformáveis. Escolher a opção Polígono regular.

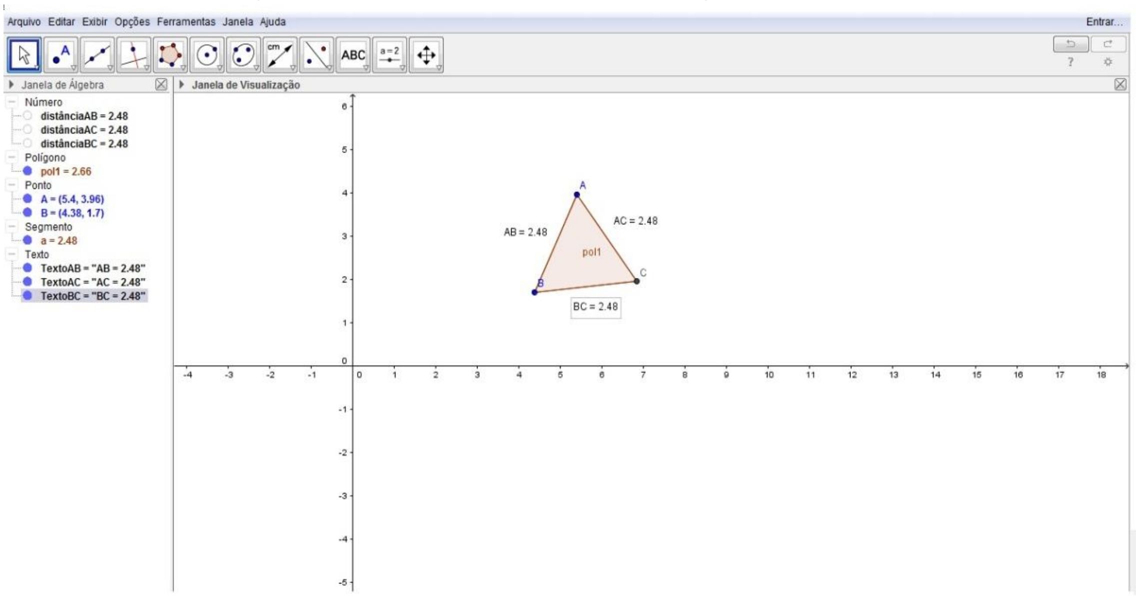
2º Passo: Clique em três pontos distintos (Pontos A, B e C) e não colineares.

Figura 37 – Pontos Não colineares



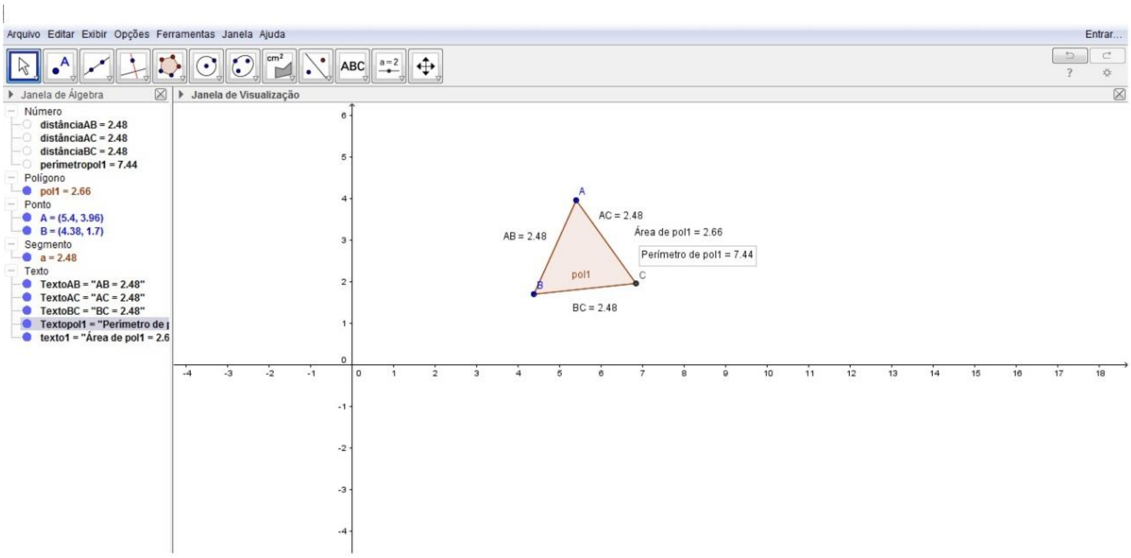
3º passo: Determine as medidas dos lados usando o mesmo processo do triângulo escaleno.

Figura 38 – Medidas dos lados no Triângulo Escaleno



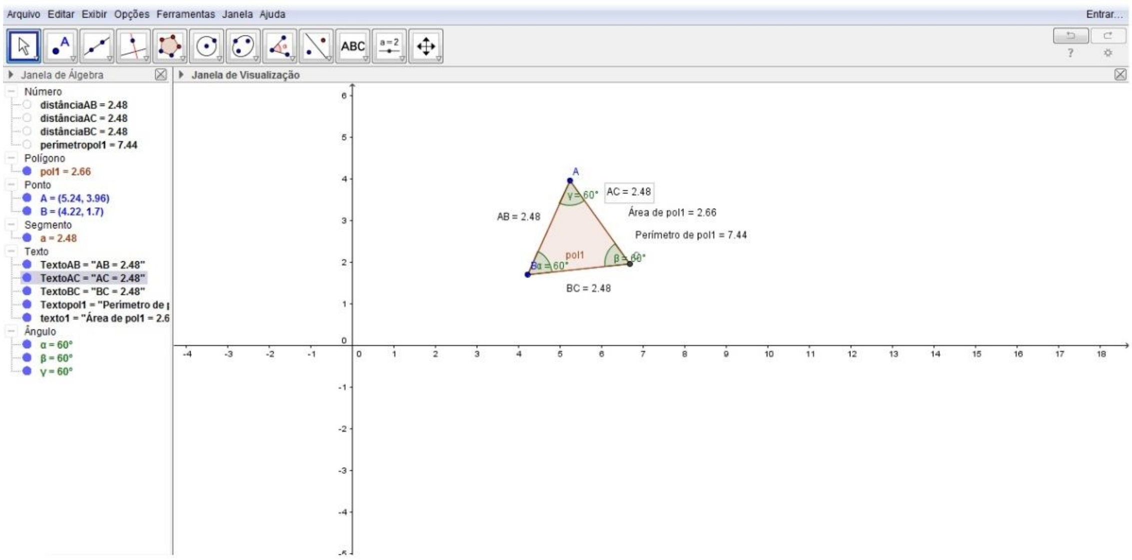
4º passo: Determine o perímetro e a área usando o mesmo processo do triângulo escaleno.

Figura 39 – Determinação do Perímetro no Triângulo Escaleno



5º passo: Determine os ângulos internos usando o mesmo processo do triângulo escaleno.

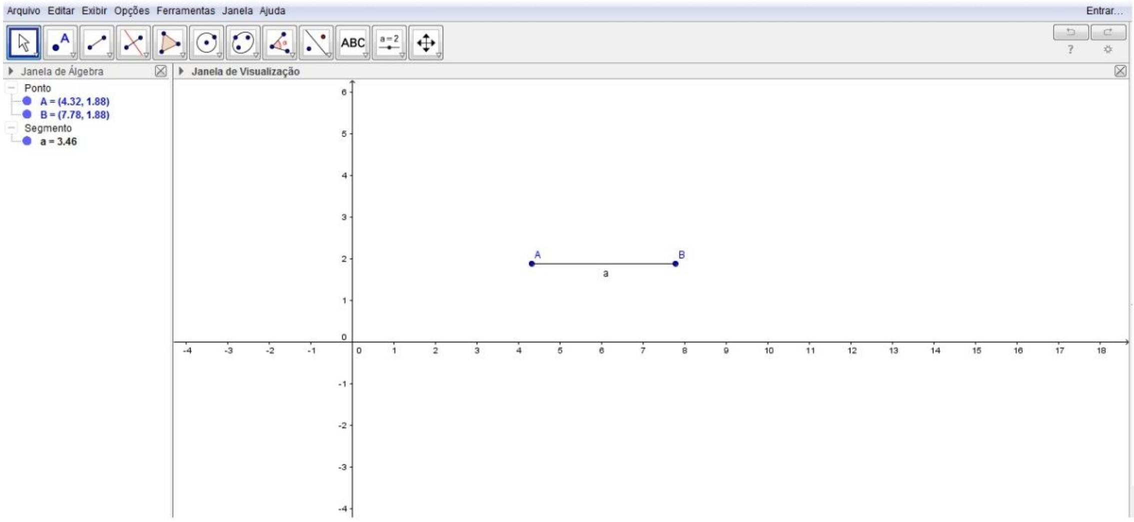
Figura 40 – Ângulos Internos no Triangulo Escaleno



EXEMPLO 03: Construir um triângulo isóscele. Determinar suas medidas de lados, perímetro, áreas e ângulos internos.

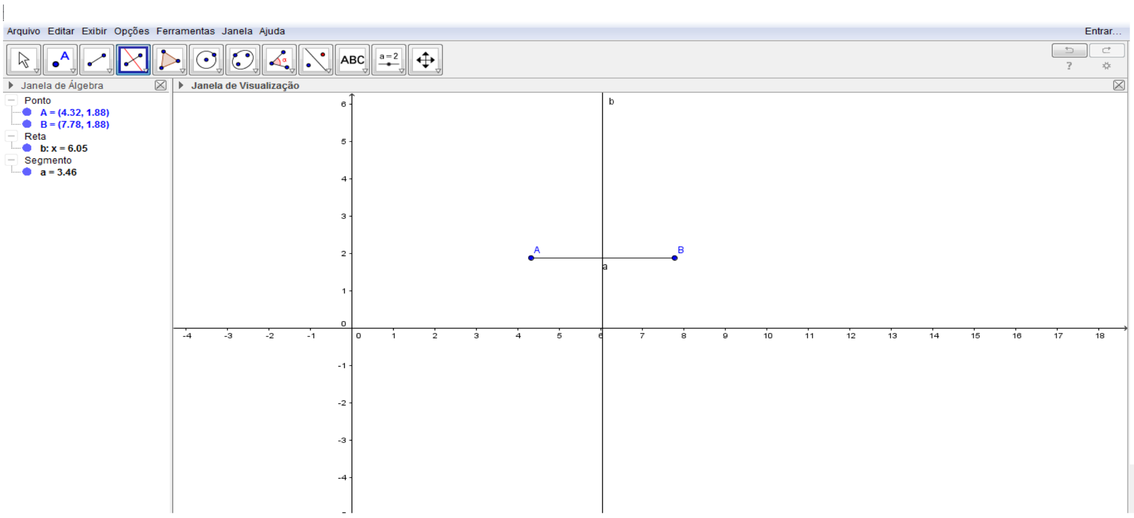
1º Passo: Clique no canto inferior direito da segunda caixa de ferramenta. Irá abrir uma janela com as opções: Reta, segmento, segmento com comprimento fixo, semirreta, caminho poligonal, vetor e vetor a partir de um ponto. Escolha a opção segmento. Clique em dois pontos quaisquer e está construído o segmento AB.

Figura 41- Construindo o Triângulo Isóscele Partindo do Segmento AB



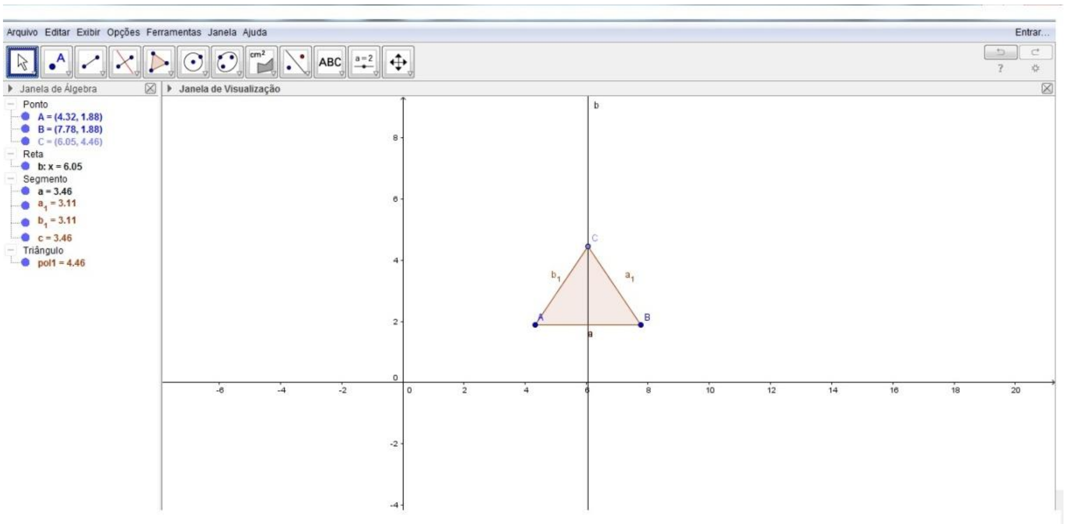
2º Passo: Clique no canto inferior direito da terceira caixa de ferramenta. Irá abrir uma janela com as opções: Reta perpendicular, reta paralela, mediatriz, bissetriz, reta tangente, reta polar ou reta diametral, reta de regressão linear e lugar geométrico. Escolha a opção mediatriz. Clique em um ponto qualquer, (de preferência acima do segmento AB) e em seguida no segmento AB, estará construído a reta que passa pelo ponto médio do segmento AB.

Figura 42 – Passo a Passo na Construção do Triângulo Isóscele



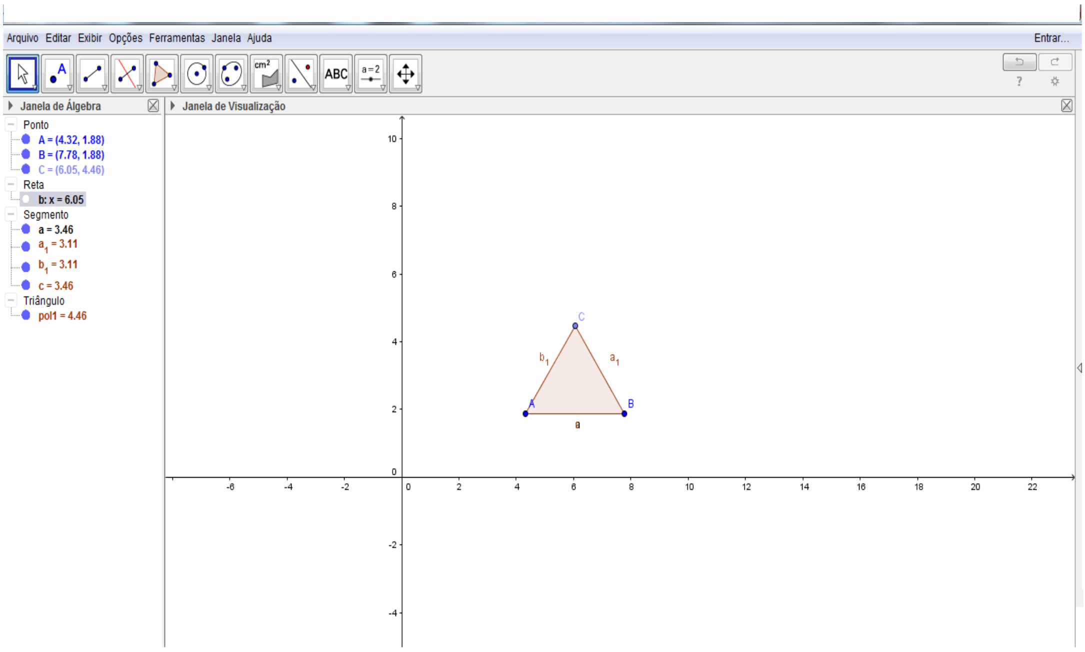
3º Passo: Clique no canto inferior direito da quarta caixa de ferramenta, e escolha a opção polígono. Em seguida construa um triângulo clicando no vértice A, depois no B e em seguida em um ponto a cima da mediatriz *b*.

Figura 43 - Passo a Passo na Construção do Triângulo Isóscele



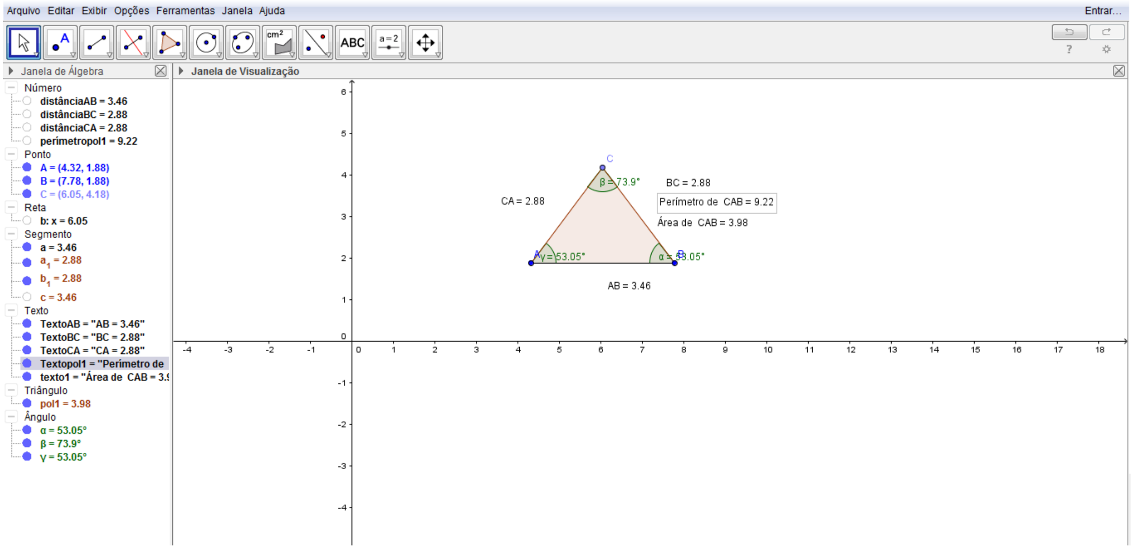
Na janela de álgebra desmarque a reta b: x = 6,05 e a reta ficará oculta.

Figura 44 - Passo a Passo na Construção do Triângulo Isóscele



4º Passo: Siga os passos feitos nos triângulos escalenos e equiláteros para determinar a área, o perímetro e os ângulos internos.

Figura 45 - Triângulo Escaleno área, Perímetro e Ângulos Internos.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os conteúdos foram colocados de maneira simples, para que a assimilação e o entendimento tenham uma grande parcela do caráter intuitivo, que sempre se espera durante o processo de ensino aprendizagem de geometria.

O conhecimento geométrico é constituído de níveis diferenciados de compreensão, que aumenta paulatinamente de acordo com a qualidade dos estudos oferecidos.

Esses níveis vão do reconhecimento visual de uma figura geométrica (mais básico), passando pela identificação das propriedades, até chegar na fase de abstração, que torna possível compreender e demonstrar teoremas.

O principal fundamento do processo ensino e aprendizagem é alteração da forma de ensino do professor para os alunos sendo que essa diferença venha a ser benéfica para o aprendizado dos alunos.

Desta forma deve ser entendido que os conteúdos dirigidos e ministrados em sala de aula devam priorizar a construção individual e a coletiva e foi com esse intuito que o software GeoGebra foi inserido em sala de aula. Devido a isso houve a oportunidade de gerar situações que os alunos interagissem com o objetivo de estabelecer e levantar hipóteses sobre conhecimentos adquiridos e gradativamente serão confirmados ou alterados.

Sem sombra de dúvidas as formas tecnológicas trouxeram mudanças positivas e consideráveis para a educação. Programas educativos na televisão computador, sites educacionais, softwares diferenciados como o GeoGebra modificam a dinâmica da aula tradicional, o espaço de ensino e aprendizagem se torna mais integrado ,no qual , anteriormente, predominava-se a lousa, o giz, o livro e a voz do professor.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) sugerem uma proposta ao Ensino Fundamental relacionado ao ensino de geometria enfatize a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e de se trabalhar explicações, argumentações e demonstrações. De acordo com o que foi mencionado pelos PCN'S, ressalta-se a importância de incorporar ao ensino os recursos tecnologias que melhorem o processo ensino-aprendizagem.

Observa que a utilização do GeoGebra estimulou e facilitou o contato com objetos geométricos, raciocínio e apoderação de conceitos. Obtivemos êxito na intencionalidade de gerar a curiosidade dos alunos e estimulá-los na comunicação com o *Software*.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgar Blöcher Ltda., 1994

BURIASCO, Isidoro. **A matemática e a história do homem**. São Paulo: Atlas, 1994.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: **introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental.** – Brasília : MEC/SEF, 1997. 126p.

DOLCE, Osvaldo, José Nicolau Pompeo. – 8. Ed – São Pauo: Atual, 2005.

Fundamentos da Matemática Elementar V.9, Atual, 2013

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**; tradução Hygino H. Domingues. 5° Ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio da Lingua Portuguesa dicionário**. 7 ed. Curitiba: Ed. Positivo. 2008.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani. **Por uma teoria da etnomatemática**. Bolema, ano 6, nº 7, 1991.

GEOGEBRA. **O que é o geogebra.** 2009, Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/info>. Acesso em: 7 jun .2015.

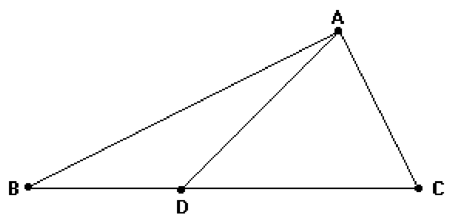
ROQUE, Tatiana. **Tópicos de História da Matemática.** SBM, 2013

APÊNDICE

1) Um dos ângulos internos de um triângulo isósceles mede 100°. Qual é a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos outros ângulos internos?

a) 20°
b) 40°
c) 60°
d) 80°
e) 100°

2) Observe a figura a seguir. Nessa figura, AD = BD, o ângulo C mede 60° e DÂC é o dobro do ângulo B. O ângulo B mede:



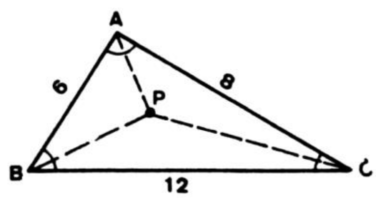
a) 20º
b) 30º
c) 40º
d) 50º
e) 60º

3) O triângulo cujos lados medem 5 cm, 6 cm e 7 cm:

a) é acutângulo
b) é retângulo
c) é eqüilátero
d) é isósceles
e) é obtusângulo

4) Na figura abaixo, cada um dos sete quadrados contém a medida de um ângulo expressa em graus. Em quaisquer três quadrados consecutivos, temos os três ângulos internos de um triângulo. O valor do ângulo x é:

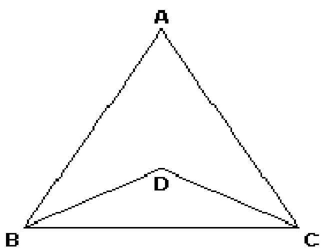
a) 10º
b) 15º
c) 20º
d) 25º
e) 30º

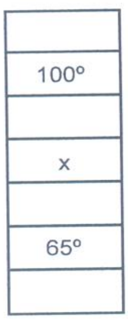


5) A distância entre o ortocentro e o baricentro de um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 24 cm é:

a) 6 cm
b) 8 cm
c) 9 cm
d) 10 cm
e) 12 cm

6) Na figura abaixo, AB = AC, D é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo ABC e o ângulo BDC é o triplo do ângulo A.





Então, a medida do ângulo B é:

a) 54°
b) 60°
c) 72°
d) 84°
e) 86º

7) A distância entre o circuncentro e o baricentro de um triângulo retângulo de hipotenusa 60 cm é:

a) 15 cm
b) 12 cm
c) 10 cm
d) 8 cm
e) 6 cm

8) A soma das distâncias do ponto **P** aos vértices da figura pode ser igual a:

a) 9

b) 10
c) 12
d) 13
e) 18

9) Na figura abaixo, ED e paralela a BC . Sendo BAE igual a 80° e ABC igual a 35°, calcule a medida de AED.