Adriano Marcos Maia Reges

O ENSINO DA GEOMETRIA COM ENFOQUE NA ETNOMODELAGEM

Mossoró - RN, Brasil

29 de março de 2013

Adriano Marcos Maia Reges

O ENSINO DA GEOMETRIA COM ENFOQUE NA ETNOMODELAGEM

Dissertação apresentada na Universidade Federal Rural do Semi-Árido como parte dos requisitos para obteção do título de mestre em matemática

Orientador:
Walter Martins Rodrigues

Departamento de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós Graduação em Matemática
Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Mossoró - RN, Brasil

29 de março de 2013

Dissertação de Projeto Final de Mestrado sob o título *"O ENSINO DA GEOMETRIA COM ENFOQUE NA ETNOMODELAGEM"*, defendida por Adriano Marcos Maia Reges e aprovada em 29 de março de 2013, em Mossoró, Estado do Rio Grande do Norte, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues
UFERSA
Orientador

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia
UFERSA
Membro Interno

Prof. Dr. Josildo José Barbosa da Silva
UERN
Membro Externo

Resumo

Nesta dissertação são apresentados resultados de uma pesquisa realizada com alunos do segundo ano do Ensino Médio, da Escola de Ensino Fundamental e Médio Arsênio Ferreira Maia, na cidade de Limoeiro do Norte, CE, analisando as contribuições do conhecimento da Geometria Espacial na indústria de alimentos, fazendo um paralelo com a produção em escala comercial de doce pela fábrica Limoeiro. Além disso, levando o aluno a trabalhar com situações do seu dia a dia para que ele se aproprie com mais facilidade dos conteúdos abordados. Foi feita também uma pesquisa com abordagem qualitativa e quantitativa a respeito das impressões que os alunos têm a respeito da matématica cujos resultados foram apresentados em gráficos. Verificou-se nessa análise que o ensino da Geometria Espacial no Ensino Médio precisa ser revisto, pois ainda encontra-se esquecido ou fora da matriz currícular de muitas escolas. No âmbito profissional, percebeu-se como é grande o despreparo dos professores para ensinar esse conteúdo, que não tem sido explorado nas salas de aula de modo adequado, discutindo situações reais e desafiadoras. Assim, torna-se necessário uma maior conscientização das escolas como instituição de formação, trabalhando a questão da elaboração de uma proposta pedagógica voltada para uma educação articulada com a cidadania. Para o desenvolvimento das atividades utilizaram-se práticas de laboratório usando material concreto, a saber: os sólidos geométricos em acrílico, prismas, cilíndros, cones, tronco de cone, esfera. Sempre fazendo comparação com os equipamentos utilizados na fábrica como caldeira, funil, depósitos de doce, etc. Os instrumentos escolhidos para a coleta de dados foram a observação participante, por meio de registros fotográficos, fichas de observação e anotações feitas pelo professor e por um questionário aplicado aos alunos participantes da pesquisa, com questões de múltiplas escolhas. A partir da análise dos dados obtidos foi possível inferir que quando os conteúdos matemáticos surgem de suas realidades, despertam maior interesse e motivação para a aprendizagem. No que concerne à aquisição do conhecimento, a principal evidência da pesquisa foi a de que o trabalho pedagógico, orientado pelos pressupostos básicos descritos no referencial teórico, favoreceu efetivamente, a aprendizagem dos alunos. Pode-se perceber claramente que essa prática pedagógica apresentou resultados positivos, quando utilizada em sala de aula.

Palavras-Chaves: Modelagem Matemática, Ensino de Matemática, Fabrica de Doces.

Abstract

This thesis presents the results of a research made with students from the 2nd year of a high school, Arsênio Ferreira Maia, in Limoeiro do Norte city, CE, with the goal of to analyze the contributions of the Geometry Space knowledge in the food industry, making a parallel with the commercial scale production of sweet factory Limoeiro as well as to lead the student to work with daily situations so that they appropriates more easily of the content studied. It was also made a research of qualitative and quantitative approach about the impressions that students have about mathematics whose results were presented in graphs. In this analysis it was possible to verify that the teaching of Space Geometry in high school needs to be revised because it still is forgotten and outside the curriculum of many schools. In the professional ambit it was perceived, how great is the unpreparedness of teachers to teach that content, which has not been explored in classrooms adequately, discussing real and challenging situations. Thus, it is necessary a greater awareness of schools as training institution, working the issue of developing an educational project focused on education associated with citizenship. In order to develop the activities we based our methodology on laboratory practice using concrete materials namely: geometric solids acrylic, prisms, cylinders, cones, truncated cone and sphere. Doing, in every moment a comparison with the equipment used in the factory like boiler, funnel, deposits of candy, etc. The instruments chosen for the data collection were participant observation, through photographic records, observation forms and notes made by the teacher and a questionnaire administered to students participating in the research, with multiple choice questions. From the data analysis it was possible to infer that when the mathematical contents arise from their realities, there are most interest and motivation for learning. Regarding the acquisition of knowledge, the primary research evidence was that the pedagogical work, guided by the basic assumptions described in the theoretical framework favored effectively the students' learning. One can clearly see that this teaching practice showed positive results when used in the classroom.

Keywords: Mathematical Modeling, Mathematics Teaching, Fabrica de Sweets.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha esposa Luzanira e a meu filho Marcos Vinícius que estão sempre a meu lado, me apoiando e dando força em todos os momentos. Dedico também a meus pais (in memóriam) e a todos os meus irmãos. E por fim dedico a meu orientador Walter Martins, que contribuiu de forma satisfatória para a conclusão do curso.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças nos momentos difíceis, quando pensei em desistir. Agradeço a meu pai Eliseu (in memórian) e a minha mãe Elódia (in memórian) , que mesmo não estando presentes fisicamente, estão sempre em meus pensamentos e fizeram de tudo para que fossemos pessoas de bem. Agradeço a minha esposa Luzanira e a meu filho Marcos Vinicius que tiveram paciência para suportar as ausências e as muitas noites que passei estudando, sem podê-los dar a atenção que mereciam. Agradeço a meus irmãos Socorro, Rosa, Luiz, João, Fátima, Raimundo, Emília e Inêz(in memória) que muitas vezes distantes, ligavam com uma palavra amiga. Agradeço a meus sobrinhos Daniela, Alexandre, Luiz Carlos, Davi, Estéfano, Samuel e Sofia que sempre me apoiaram e em especial aos meus outros quatro sobrinhos Ronnison, Diego, Dandara e Marlon que souberam me acolheram em suas casas quando mais precisei. Agradeço a meus colegas e professores, que tanto me ajudaram nas tarefas mais dificéis. E por fim, agradeço a todos os meus alunos que participaram incondicionalmente nas atividades propostas.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Ao trabalhar como professor em escolas públicas de ensino médio, tivemos a oportunidade de sentir e conviver com a possibilidade de transformar a nossa atuação e a dos nossos alunos em relação a disciplina de Matemática e de tentar enfocar o processo de ensino e aprendizagem sob uma nova perspectiva. Em geral, observa-se que a maioria dos alunos estuda Matemática apenas por imposição dos currículos escolares, havendo expressivo número de reprovações e, em relação ao conteúdo estudado, frequentes questionamentos: "Onde iremos aplicar isso?", "Para que estudar isso?". Verifica-se, em algumas pesquisas em Educação Matemática a idéia de que a principal causa do fracasso do ensino desta disciplina estaria no fato de que o conteúdo estudado em parte está desvinculado da realidade do aluno, ou seja, as dificuldades de apropriação dos conceitos escolares são devidas ao fato de a Matemática ensinada nas escolas básicas, estar muito afastada do vivenciado pelo estudante no seu mundo real. Essas pesquisas vêm contribuindo para a compreensão da necessidade de utilizar o conhecimento cotidiano, conectando a teoria e a prática no processo pedagógico, e isso pode ocorrer se os conteúdos forem trabalhados de forma interdicisplinar. Com isso, chega-se à conclusão de que é preciso encontrar alternativas no sentido de reconstruir nossa prática, diversificar nossas metodologias, incrementar nossas aulas com ferramentas mais atraentes para criar um ambiente mais favorável a aprendizagem dos alunos.

Como nos diz Machado (ver [4]) "De fato, a falta de clareza com relação ao papel que a Matemática deve desempenhar no campo de conhecimentos sistematizados pode ser o principal responsável pelas dificuldades crônicas de que padece seu ensino".

As concepções que os alunos constroem da Matemática e a maneira como estudam seus conteúdos também têm gerado grandes barreiras na aprendizagem. A grande maioria enxerga a Matemática como um amontoado de regras, fórmulas sem sentido e sem utilidade nenhuma, simplesmente eles são levados a memorizar fórmulas, e consequentemente a resolver exercícios, sem a preocupação de perceber a lógica que existe por trás de cada expressão que lhes foi apresentada e a relação que existe entre elas e os diversos assuntos já abordados ou que serão abordados no futuro, ou mesmo vivenciam em seu dia a dia.

Segundo Machado (ver [4]):

> Na verdade, em nenhum outro setor do conhecimento as possibilidades de compreensão dos vinculos entre a teoria e a prática são mais ricas que a Matemática. Tal relação, por se apresentar excessivamente simplificada em outros setores, possibilita caricaturizações onde as vias fundamentais para a sua compreensão não são devidamente consideradas ou, às vezes sequer percebidas.

Percebe-se, mesmo assim, uma tendência por parte dos professores em insistir numa abordagem formal e conservadora do conteúdo que afasta cada vez mais os alunos da matemática. De um modo geral, ignora-se a necessidade de se levar em consideração os conhecimentos preliminares dos alunos como ponto de partida para novos assuntos estudados e a relação entre eles. Ignora-se o uso de material concreto como ferramenta fundamental na associação entre teoria e prática ou não havendo tempo por parte do docente, não se pratica. Descarta-se, também muitas vezes o uso de "‘softwares"’ matemáticos no ambiente da sala de aula por não ter conhecimento do manuseio de tais aplicativos ou por falta de incentivo governamental em oferta as condições necessárias para que o docente possa buscar tais conhecimentos. E, por fim, ignora-se também a importância da interação social na criação dos novos saberes, persistindo-se numa tradição pedagógica que tende a eternizar a imagem da Matemática como algo difícil e, até mesmo, para alguns, inacessível. Reforça-se assim, na sociedade, o conceito de que a Matemática é uma disciplina difícil e que a compreensão de seus conteúdos é para poucos, só para aqueles que têm uma espécie de dom, portanto é desculpável o aluno ter maus resultados nas avaliações que lhes são propostas.

De acordo com Machado (ver[4])

> Quanto a produção do saber matemático, há um aparente interesse em que se divulgue aos quatro ventos que as características intrísecas da matéria tornam-na um assunto para individuos eleitos, com especial talento ou tendências inatas.

Essa maneira de ensinar Matemática de forma isolada das demais áreas do conhecimento ou então explorar conteúdos apenas como pré-requisito para depois estudar outros conteúdos mais avançados, sem fazer uma conexão entre a teoria e a prática que é vivenciada pelo aluno, não contribui para a formação integral do educando. De maneira geral, é comum se pensar dentro do ambiente das escolas, que a Matemática é uma ciência que não evolui, que não se modifica ao longo do tempo e, além do mais, ela é vista como um enorme corpo de conhecimentos prontos que devem ser simplesmente repassados. É notório reforçar que existe nas escolas uma preocupação cada vez maior de se transmitir a todo custo uma gama muito grande de conteúdos, muitas vezes não respeitando a heterogeneidade de cada turma e o ritmo de cada aluno. É de praxe que se escolha o livro didático que não apresente a melhor qualidade por ser mais cômodo de se ministrar as aulas, onde o professor segue fielmente, sem haver preocupação de buscar novas fontes de pesquisa e novas metodologias de ensino que poderiam de certa forma auxiliá-lo na sua prática docente como, por exemplo: vídeos, softwares educacionais, material concreto, no caso da Geometria Espacial (caixas, latas, sementes, palitos, etc). Essa prática leva a uma acomodação, pois qualquer atividade inovadora requer do educador ousadia, criatividade, vontade de mudar o ambiente da sala de aula e, além disso, uma maior disponibilidade de tempo, ou seja, desenvolver novas metodologias exige do professor uma maior carga de trabalho. Conforme BRASIL (ver [6])

> O que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos.

Atualmente estamos vivendo um processo de transformação em que novas orientações curriculares propõem um ensino de Matemática voltado para o desenvolvimento de competências e habilidades para o exercício pleno da cidadania. Então não é mais admissível ensinar matemática como qualquer outra disciplina, pensando apenas em aprovar determinado grupo de alunos no vestibular, visto que, nem todos os alunos que ingressam na escola básica conseguem passar no vestibular ou até mesmo concluir o ensino médio. Assim, os objetivos da escola que trabalha especificamente com essa perspectiva não estão sendo alcançados e os questionamentos dos professores são constantes em relação a sua prática: "Para que estamos preparando nossos alunos? O que devo fazer, se os alunos chegam no ensino médio detestando Matemática? Por que os alunos não gostam de Matemática, se tudo que fazemos depende dela? " Tal pensamento é ratificado por BRASIL (ver [5]):

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos, traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

Uma possível resposta pode vir das simples atividades realizadas nas aulas de Matemática, onde o conhecimento pode está sendo explorado de forma estanque, sem relação com a vivência dos alunos e, neste caso, o educando não encontra sequer uma aplicabilidade. Ou ainda, a maneira como a Matemática está sendo trabalhada nas séries iniciais esteja contribuindo de forma negativa para o processo de aprendizagem das crianças, que desde então começam a ver tal disciplina como "o bicho papão". Esse processo pode-se agravar mais e mais devido aos cursos de formação dos professores dessas séries não exigirem uma preparação adequada para o ensino da Matemática, ou seja, os professores concluem o curso, mas muitos deles saem sem qualificação para o exercício da profissão. Além disso, existe o fato de que a maioria dos educadores das séries iniciais não têm afinidade com a disciplina e, portanto, não têm como desenvolver na criança o hábito ou o gosto pelos os números. Segundo BRASIL (ver [5]):

> Há questões institucionais que impedem a construção de identidade própria dos futuros professores, como a ausência de espaço institucional para os estágios necessários à formação, a falta de integração da escola com os diversos espaços educacionais na sociedade, o distanciamento entre as instituições de formação de professores e os sistemas de ensino da educação básica. [...] O professor não aprende a criar situações didáticas eficazes nas quais sua área de conhecimento surja em contextos de interesse efetivo de seus estudantes. Sendo essa herança histórica, não há dúvida de que tais deficiências estão hoje dificultando o trabalho escolar e, portanto, demandam ações no próprio âmbito escolar, já que há consenso de que a formação é mais eficaz quando inserida na realidade em que o professor atua cotidianamente, como prática diária, e não à distância, em caráter eventual.

A partir das dificuldades relatadas anteriormente e tendo-se em vista as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, sente-se a necessidade de melhorar o processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Para isso, os cursos de formação de professores devem ser reformulados, torna-se necessário diversificar as metodologias de ensino e os conteúdos devem ser abordados em forma de problemas e estes devem ter relacão com o cotidiano dos educandos para evitar que alunos imaginem que a aprendizagem de Matemática se resuma a memorização de técnicas em situações fáceis que depois podem ser aplicadas em situações semelhantes e maior complexidade. De acordo com BRASIL (ver [5]):

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Esta competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.

A motivação inicial deste trabalho baseou-se nas dificuldades encontradas pelos alunos, em especial os do segundo ano do ensino médio da Escola de Ensino Médio Arsênio Ferreira Maia, em contextualizar a Matemática e relacioná-la com fatos do cotidiano deles. Como, por exemplo, calcular o volume de água existente na caixa d' água de sua própria casa, reconhecer a relação que existe entre um metro cúbico e litros, a quantidade de papel usado na confecção de uma caixa cúbica ou em forma de um paralelepípedo e muitas outras situações, foram, de certa forma, motivadoras para o início deste trabalho. Isso, na verdade, reflete, de alguma forma, nossa vontade de mudar e desenvolver uma abordagem alternativa para o ensino da Geometria Espacial, como forma de reverter este quadro, ou seja, para tentar tornar interessante e útil a Matemática a ponto de estimular a curiosidade do aluno para querer estudá-la. Sob essa perspectiva, acredita-se que sejam possíveis mudanças positivas, mas para que isso ocorra, torna-se necessária a aplicação de metodologias para tornar as aulas mais interessantes.

O primeiro momento será de vincular as aulas teóricas com as práticas que realizadas no laboratório de Ciências e Matemática onde os alunos manipularão os sólidos geométricos, em material acrílico transparente, Figura 1, no qual é possível de forma experimental, calcular comprimentos de segmentos, áreas e volumes de qualquer um desses sólidos. Essa metodologia permite que sejam trazidos para a sala de aula temas de interesse dos alunos, com problemas vinculados à sua realidade. Isso possibilita desenvolver no aluno a capacidade de perceber a importância da Matemática no contexto social e político.

Figura 1: *Sólidos geométricos em acrílico.*

Num segundo momento serão feitas visitações a uma pequena fábrica de doce com o objetivo de conhecer os equipamentos utilizados na moajem, cozimento, resfriamento e embalagem afim de calcular suas áreas e volumes, verificar a relação que existe entre a quantidade de frutas utilizadas e a quantidade de doce obtidos, que tipos de frutas requer maior adição de açucar na hora de fabricar o doce, o formato do doce e das embalagens e como é feito o escoamento da produção. Assim vamos desenvolvendo conceitos relacionados com Geometria Espacial, enquanto é explorado o tema fabricação de doce.

Paralelo a isso, serão feitas novas visitas ao Laboratório de Ciências e Matemátia para a realização de mais experimentos agora voltados para o cálculo de volumes, áreas, comprimentos de diagonais de cubos e de paralelepípedos e sempre fazendo uma conexão com os equipamentos da fábrica. Quando os alunos, em sala de aula ou no laboratório têm a oportunidade de trabalhar com situações reais manipulando objetos que são réplicas de equipamentos ou objetos usados no dia a dia por eles ou que são de alguma utilidade na indústria ou no comércio e além disso fazendo a coleta de informações para depois interpretá-las juntamente com o professor, deduzindo ou justificando fórmulas que são apresentadas nos livros didáticos eles estão na prática participando da construção do conhecimento teórico e se apropriando dele de tal maneira que, tal fato não aconteceria em outro ambiente ou através de outra metodologia. Assim, a aula de Matemática pode se tornar mais atrativa e consequentemente poderá ocorrer um desenvolvimento maior do pensamento crítico e reflexivo dos alunos.

Na presente pesquisa, selecionou-se o tema "aplicações da Geometria Espacial na indústria", em particular em "uma pequena fábrica de doces", por ser de fácil acesso para os alunos e ser uma atividade sócio-econômica que está intimamente ligada a eles e as suas famílias, sendo para alguns a principal fonte de renda. Sendo assim, é possível fazer uma interdisciplinaridade com as demais disciplinas. No caso da Geografia, podem ser estudadas as atividades econômicas desenvolvidas no município de Limoeiro do Norte, bem como os problemas sociais e ambientais provocados pela fábrica, assunto que também pode ser abordado na Biologia. Na Química, pode ser explorado o uso de produtos químicos no processo de produção e até que ponto eles podem fazer mal a saúde humana. Pode ser feito um apanhado histórico sobre a origem da fábrica para ser usado nas aulas de História. Na Física, podem ser discutidas as questões da calorimetria, a velocidade média, o espaço percorrida da escola até a fábrica, dentre outros. Olhando por esse ângulo, o conteúdo estudado deixa de ser desprovido de significados e os alunos serão orientados e estimulados a serem autores e construtores de seu próprio conhecimento. Desta forma, eles têm a oportunidade de desenvolver competências gerais, que vão além de aprender o conteúdo estabelecido pelos programas curriculares.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. No primeiro Capítulo, 1.4, foi feita uma abordagem sobre o surgimento da Etnomatemática e as diversas dimensões propostas por Ubiratam D' Ambrosio [1]. Foi reservado, também, para abordar os princípios básicos da Modelagem Matemática, bem como suas etapas principais e os procedimentos básicos que viabilizam sua aplicação em sala de aula com base nos trabalhos de Biembengut e Hein [2]. O terceiro Capítulo, 2.6, corresponde aos procedimentos metodológicos utilizados no trabalho, ou seja, como se deu a escolha do tema, quem são os agentes da pesquisa, que tipo de pesquisa foi realizada, onde e quando ele foi desenvolvida. No quarto Capítulo, 3.6.1, são descritos os resultados das pesquisas, levantamentos de situações-problemas a serem modeladas e suas resoluções, seja usando os conhecimentos do livro didático ou os conhecimentos empíricos. No quinto e último Capítulo, 4, são descritas as conclusões a respeito do trabalho propriamente dito. As dificuldades, os resultados obtidos e pespectivas de novos trabalhos.

"*Não há fé inabalável senão aquela que pode encarar a razão face a face, em todas as épocas da Humanidade.*"
Allan Kardec

1 PRINCÍPIOS DA ETNOMATEMÁTICA E DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo vamos falar um pouco sobre o surgimento da Etnomatemática, para que tenhamos uma noção de todo o desenvolvimento dessa nova tendência em Educação Matemática bem como suas contribuições no âmbito escolar. Depois do fracasso da Matemática Moderna, na década de 70, que primava por uma Matemática mais voltada para a teoria do que para a prática, apareceram entre os educadores matemáticos, várias correntes educacionais desta disciplina, que tinham uma componente comum – a forte reação contra a existência de um currículo comum e contra a maneira imposta de apresentar a matemática de uma só visão, como um conhecimento universal e caracterizado por divulgar verdades absolutas. Além de perceberem que não havia espaço na Matemática Moderna para a valorização do conhecimento que o aluno traz para a sala de aula, proveniente do seu social, estes educadores matemáticos voltaram seus olhares para este outro tipo de conhecimento: o do vendedor de rua, das brincadeiras, dos pedreiros, dos artesões, dos pescadores, das donas de casas na suas cozinhas, etc.. Nascem, então termos metafóricos para designar esta matemática para diferenciá-la daquela estudada no contexto escolar, nasce então a Etnomatemática.

Segundo BRASIL (ver [6])

> Nas décadas de 60 e 70, o ensino de matemática no Brasil e em outros países, foi influenciado por um movimento que ficou conhecido como Matemática Moderna. Este movimento educacional nasceu inscrito numa política de modernização econômica e, juntamente com a área de Ciências Naturais, se constituía via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico. O ensino passou a ter preocupações excessivas com abstrações, mais voltadas à teoria do que à prática.

Em agosto de 1984, no Quinto Congresso Internacional de Educação Matemática, em Adelaide, Austrália, algumas novas tendências em Educação Matemática estavam em foco, tais como "Matemática e Sociedade", "Matemática para todos" e "História da Matemática e de sua pedagogia" entre outras. Foi neste congresso que o professor Ubiratan D'Ambrósio apresentou sua teorização para uma linha de pesquisas que se apresentava timidamente, já há alguns anos. Nascia então o Programa de Pesquisa Etnomatemática, motivado pela procura de entender o saber/fazer matemático ao longo da História da Humanidade, contextualizado em diferentes grupos de interesse, comunidades, povos e nações. Então podemos dizer que D' Ambrosio foi um dos primeiros estudiosos a trabalhar com Etnomatemática no Brasil . Sobre esse assunto ele escreveu vários livros. A base teórica deste trabalho é fundamentada no livro de sua autoria, a saber: Etnomatemática: Elo entre tradição e modernidade. Neste livro, D' Ambrosio aborda vários aspectos da etnomatemática: significados, dimensões, etc. Outros autores também deram inúmeros significados a Etnomatemática. D'Ambrósio (ver [1]) analisa a palavra de acordo com suas raízes:

> [...] nas maneiras, nos modos, nas habilidades, nas artes, nas técnicas, nas ticas de lidar com o ambiente, de entender e explicar fatos e fenômenos, de ensinar e compartilhar tudo isso, que é o matema próprio ao grupo, à comunidade, ao etno.

Então a palavra Etnomatemática é composta de três raízes, tica, matema e etno para significar que há várias maneiras e técnicas de explicar, de entender, de lidar e de conviver com diferentes contextos culturais e socioeconômicos da realidade. A etnomatemática é uma prática pedagógica que estuda o contexto sociocultural dos alunos, valorizando o conhecimento prévio dos mesmos na construção de significados caracterizados pelo conteúdo proveniente da experiência pessoal, aproximando o conteúdo matemático com a realidade. Os parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática também fazem referência a etnomatemática:

> [...] Do ponto de vista educacional, procura entender os processos de pensamento, os modos de explicar, de entender e de atuar na realidade, dentro do contexto cultural de cada indivíduo. A Etnomatemática procura partir da realidade e chegar à ação pedagógica de maneira natural, mediante um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural. BRASIL, (ver [6]).
>
> Portanto, é extremamente importante que o professor tenha sensibilidade para

saber aproveitar os conhecimentos empíricos dos alunos como ponto de partida na abordagem de novos conteúdos.

Assim como existem as correntes de estudiosos que defendem a etnomatemática como um programa de pesquisa que pode vir a auxiliar a matemática, chamada de acadêmica, a melhorar o processo de ensino e aprendizagem, existem também as correntes que enxergam com desconfiança o programa etnomatemático. Algumas críticas são feitas de forma extremamente superficiais, levando-se em consideração somente os aspectos negativos, se constituindo então numa forma destrutivas e sem uma fundamentação teórica aprofundada. Segundo Pardal Pires (ver [13]):

A Etnomatemática é ainda uma corrente relativamente nova na educação da matemática. Como tal, ainda é “vista” com alguma desconfiança por parte de alguns críticos mais conservadores, críticos esses que ainda vêem a Matemática tradicional como um ideal imutável e objetivo, à parte das realidades sócio-culturais. Por outro lado, existem correntes críticas, bem fundamentadas teoricamente, que revelam preocupações, principalmente, com a formação dos futuros professores de matemática. A preocupação, ainda segundo Pardal Pires (2008) é que se passe a desprestigiar a matemática tradicional, baseado nos moldes europeus, e passe-se a valorizar a matemática de determinados grupos populares. De acordo com Ferreira (1997) apud Esquincalha (2003) (ver [12]), as maiores críticas à Etnomatemática foram as de Milroy, Dowling e Taylor. “Milroy fala do paradoxo da Etnomatemática quando pergunta: 'como pode alguém que foi escolarizado dentro da Matemática Ocidental convencional ‘ver’ qualquer outra forma de matemática que não se pareça com esta matemática, que lhe é familiar?'” (ver [12]) “Dowling se refere ao discurso da Etnomatemática que, segundo ele, é uma manifestação ideológica. ele diz que a sociedade é heteroglóssica, composta de uma pluralidade de comunidades culturais, e as comunidades são monoglóssicas; e como a Etnomatemática faz falar estas comunidades, então ela tem um discurso ideológico monoglóssico, onde o falar de um subgrupo é privilegiado em relação ao falar de toda a sociedade que o contém.” (ver [12])

“Taylor afirma que a Etnomatemática tem um discurso político pedagógico, mas não epistêmico, ou seja, ela tenta discutir epistemologicamente, mas seu discurso fica somente na relação político-pedagógica.” (ver [12])

1.1 AS DIMENSÕES DA ETNOMATEMÁTICA

D'Ambrosio em seu livro intitulado de Etnomatemática: Elo entre as tradições e modernidade ano 2007 faz muitas considerações sobre as várias dimensões da Etnomatemática. Então, baseado nessas considerações vamos explicitar de forma bem clara os pensamentos dele em relação a cada uma dessas dimensões.

1.1.1 A DIMENSÃO CONCEITUAL

Ao longo do tempo o homem vem desenvolvendo um conjunto de conhecimentos que são a base para a resolução de seus problemas diários. Essa ideia vai de acordo com o que propunha D' Ambrósio (ver [1]):

> A matemática, como conhecimento em geral, é resposta às pulsões de sobrevivência e de transcendência, que sintetizam a questão existencial da espécie humana. A espécie cria teorias e práticas que resolvam a questão existencial. Essas teorias e práticas são as bases de elaboração de conhecimento e decisões de comportamento, a partir de representações da realidade.

Com o passar do tempo o homem vem acumulando experiências que se constitui num conjunto de conhecimentos que são transmitidas de gerações em gerações dentro do próprio grupo de convivio e também para outros grupos. Isso faz com que cada individuo compartilhe as experiencias vividas por outras pessoas e assim vá construindo o seu conjunto de conhecimentos que serão passados posteriormente para outras gerações.

Para D'Ambrósio (ver [1]):

> O acúmulo de conhecimentos compartilhados pelos individuos de um grupo tem como consequencia compatibilizar o comportamento desses indivíduos e, acumulados, esses conhecimentos compartilhados e comportamentos compatibilizados constituem a cultura do grupo.

Então podemos dizer que a cultura de um grupo é a base para a sobrevivência desse grupo e que quanto mais conhecimento e experiencias forem trocadas entre os membros do grupo este tende e se fortalecer cada vez mais e mais conhecimentos são compartilhados e mais comportamentos são compatibilizados. Então a palavra sobrevivência seria o ato de ver o futuro ou chegar até ele. A fim de justificar essa ideia, recorremos as palavras de D'Ambrósio (ver [1]):

> [...] a questão da sobrevivência é resolvida por comportamento de resposta imediata, aqui e agora, elaborada sobre o real e recorrendo a experiências prévias [conhecimento] do indivíduo e da espécie [incorporada no código genético]. O comportamento se baseia em conhecimentos e ao mesmo tempo produz novo conhecimento Essa simbiose de comportamento e conhecimento é o que denominamos instinto, que resolve a questão da sobrevivência do indivíduo e da espécie.
>
> Portanto, podemos concluir que, o acúmulo de conhecimentos adquiridos por uma pessoa ou pelo grupo em que ele está inserido é fator determinante para a sobrevivência dele e do proprio grupo.

1.1.2 A DIMENSÃO HISTÓRICA

Para termos uma real dimensão histórica da evolução do conhecimento matemático devemos recorrer a fatos que tiveram seus primeiros registros há mais de 3000 anos que se originaram na bacia do Mediterrâneo e que se impôs a todo planeta. Percebemos que houve uma rápida evolução em se comparando com toda história da humanidade e também não se pode garantir que será permanente. Segundo D'Ambrosio (2007, p.29) "para compreendermos melhor a evolução intelectual da humanidade, é preciso ter em mente uma interpretação histórica dos conhecimentos de egípcios, babilônicos, judeus, gregos e romanos, que estão nas origens do conhecimento moderno".

No decorrer de quase três milênios, os fatos e fenômenos transitaram entre o raciocínio quantitativo dos babilônicos e o raciocínio qualitativo dos gregos, que prevaleceu durante toda a Idade Média. A modernidade privilegiou o raciocínio quantitativo, graças a aritmética (tica = arte + aritmos = números) feita com algarismos indo-arábicos e, posteriormente, com as extensões de Senion Stevin (decimais) e de John Neper (logaritmos), culminando com os computadores. Mais recentemente, evidencia-se o raciocínio qualitativo, principalmente através da inteligência artificial, o que ressalta o interesse pelas etnomatemáticas, já que as mesmas apresentam um caráter predominantemente qualitativo. D'Ambrosio (2007, p.29) "estamos vivendo agora um momento que se assemelha à efervescência intelectual da Idade Média. Justifica-se, portanto, falar em novo renascimento. Etnomatemática é uma das manifestações desse novo renascimento". Diante do que foi exposto, é importante que hajam mudanças no campo educacional para que o conhecimento que os jovens trazem para sala de aula que são oriundos das experiências de seu grupo sejam levadas em consideração para que haja uma maior percepção dos conhecimentos.

1.1.3 A DIMENSÃO COGNITIVA

A psicologia cognitiva estuda os processos de aprendizagem e de aquisição de conhecimento. Cognitio, que significa a aquisição de um conhecimento através da percepção. É o conjunto dos processos mentais usados no pensamento e na percepção, também na classificação, reconhecimento e compreensão para o julgamento através do raciocínio para o aprendizado de determinados sistemas e soluções de problemas. De uma maneira mais simples, podemos dizer que cognição é a forma como o cérebro percebe, aprende, recorda e pensa sobre toda informação captada através dos cinco sentidos. No que diz respeito a Etnomatemática, essa dimensão nos reporta a questão de como os diversos grupo culturais adquiriram um pensamento ou ideias matemáticas. Fazendo um apanhado histórico desde a época em que viveram os australopitecos e as espécies que as antecederam e as que as sucederam, reportamos a colocação de D'Ambrósio (ver [1]):

> Nessa expansão, as espécies vão se transformando, sob influência de clima, alimentação e vários outros fatores, e vão desenvolvendo técnicas e habilidades que permitem sua sobrevivência nas regiões novas que vão encontrando. Aos se deparam com situações novas, reunimos experiências de situações anteriores, adaptando-as às novas circunstâncias e, assim, incorporando à memória novos fazeres e saberes. Graças a um eleborado sistema de comunicação, as maneiras e modos de lidar com situações vão sendo compartilhadas, transmitidas e difundidas.

Então percebemos que a cognição é mais do que uma simplesmente aquisição de conhecimento. É também um mecanismo de conversão do que é captado para o nosso modo de ser interno. Ela é um processo pelo qual o ser humano interage com os seus semelhantes e com o meio em que vive, sem perder a sua identidade existencial. Ela começa com a captação dos sentidos e logo em seguida ocorre a percepção. É, portanto, um processo de conhecimento, que tem como material a informação do meio em que vivemos e o que já está registrado na nossa memória.

1.1.4 OS DESAFIOS DO COTIDIANO

Os maiores desafios enfrentados pelos humanos no decorrer do tempo foi a aquisição de alimentos e a proteção de sua família e de si próprio. Cada grupo de pessoas, dependendo da região em que habita, tem um estilo de vida diferente que pode variar de acordo com o clima. Logo a agricultura, a caça e a pesca dependem desses fatores climáticos bem como a confecção de suas residências e vestimentas. O homem durante grande parte de sua vida foi nômade, a fixação dele em uma determinada região foi decorrente do dominio de certas técnicas de agricultura, pastoreio e construção. Nesse momento, percebe-se um desenvolvimento de um conhecimento matemático e uma prévia organização desse conhecimento, então baseado nessas idéias, as etnomatemáticas não são iguais para os diversos grupos de pessoas, ela varia dependendo da região, consequentemente do clima, da cultura, etc. Para D'Ambrosio (ver [1]):

> [...] em ambientes diferentes, as etnomatemáticas são diferentes. Os esquimós no Círculo Polar Àrtico quando estão procurando se nutrir, não podem pensar em plantar e, portanto, não desenvolveram agricultura. Dedicaram-se então à pesca. Logo, ele tem que saber qual boa hora de pescar. [...] portanto, sua distribuição de tempo, e a percepeção que tem dos céus e das forças que influenciam seu dia a dia, distintas daqueles que tem seu cotidiano na região do Mediterrâneo ou na faixa Equatorial, bem como as maneiras de lidar com seu cotidiano. Sua etnomatemática é diferente. Portanto, podemos concluir que a etnomatmática de um grupo pode variar de acordo com vários fatores, como por exemplo, o tempo e espaço em que ele está inserido.

1.1.5 A DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA

Essa dimensão repousa sobre a integração do sistema de conhecimento com as questões inerentes a sobrevivência e transcendência do homem. É a relação entre os saberes e os fazeres da cultura de um grupo, desde sua observação da realidade até os fundamentos teóricos da ciência. Para entender esse relacionamento entre a observação da realidade (empírico) e o teórico, D'Ambrosio (2007) considera uma seqüência de três questões diretas, que iremos aqui transcrever: 1. Como passamos de observações e práticas *adhoc* para experimentação e método? 2. Como passamos de experimentação e método para reflexão e abstração? 3. Como procedermos para invenções e teorias?

Essas questões norteiam a reflexão sobre a evolução do conhecimento e D'Ambrosio (2007) propõe um ciclo harmonioso do conhecimento de forma integrada e que considera a constante inter-relação do indivíduo com a realidade e sua ação. A realidade é o ambiente, inclui o natural e o artificial, o sócio-cultural, o emocional, o psíquico e o cognitivo; considera o indivíduo como parte integrante da sociedade; manifesta seu comportamento e conhecimento na totalidade do processo, ou seja, sua ação sobre a realidade. Assim, a geração, a organização e a difusão do conhecimento retornam àqueles que o produziram, num ciclo harmonioso.

Portanto, podemos considerar que o conhecimento não é algo estático, ele se difunde num processo contínuo, de forma organizada de geração em geração e que esse conhecimento determina o grau de evolução e amadurecimento intelectual de um grupo.

1.1.6 A DIMENSÃO POLÍTICA

Essa dimensão repousa sobre a estrutura de nossa sociedade que se deu com o fortalecimento do conhecimento ocidental sobre nossa cultura, através de suas conquistas tanto materiais quanto ideológicas. Admitimos então, a existência predominante de um conquistador e um conquistado. É fácil perceber que o dominador utiliza uma estratégia fundamental no seu processo de conquista: manter o indivíduo ou o grupo inferiorizado, ou seja, utiliza de certos artifícios para diseminar sua cultura e de certa forma corromper a cultura do conquistado para prevalecer seu poderiu.

De acordo com D'Ambrosio (ver [1]) "a remoção da historicidade implica na remoção da língua, da produção, da religião, da autoridade, do reconhecimento, da terra e da natureza e dos sistemas de explicação em geral.

De forma eficaz esse objetivo é alcançado removendo toda a cultura do dominado, que significa enfraquecer suas raízes e seus vínculos históricos. Em nossa colonização os jesuítas desempenharam com grande destreza esta função: impuseram sua língua, seus costumes e sua religião, e trabalharam de forma eficiente para a inferiorização do povo nativo. O papel da etnomatemática, no presente momento, é reconhecer, respeitar e valorizar a tradição e o pensamento de outras culturas - não remove o referencial do indivíduo, mas reforça suas próprias raízes; não se finda em uma prática seletiva, mas restaura a dignidade do indivíduo e trabalha sobre o processo de transição da subordinação para a autonomia do indivíduo. Segundo D'Ambrosio (ver [1]):

> A etnomatemática se encaixa nessa reflexão sobre a descolonização e na procura de reais possibilidades de acesso para o subordinado, para o marginalizado e para o excluído. A estratégia mais promissora para a educação, nas sociedades que estão em transição da subordinação para a autonomia, é restaurar a dignidade de seus individuos, reconhecendo e respeitando suas raízes.
>
> Portanto é fundamental que saibamos respeitar as diferenças, os ritmos de

aprendezagens e de certa forma a cultura do outro, para que se crie um ambiente harmonioso é que o aluno se sinta motivado e aberto a novos conhecimentos.

1.1.7 A DIMENSÃO EDUCACIONAL

É notório enfatizar que o sistema educacional como um todo está repleto de falhas que compromete o processo de ensino e aprendizagem. Torna-se necessário uma série de mudanças para que se desenvolva um ensino de qualidade. Hoje, no mundo moderno, pensa-se cada vez mais numa educação qualitativa do que quantitativa. A educação qualitativa prepara o aluno para pensar e está voltada para o desenvolvimento pleno do educando. Na educação quantitativa o professor procura repassar uma quantidade máxima de conteúdos não havendo muita preocupação com a aprendizagem e com o desenvolvimento do raciocínio. Privilegiar a qualidade do ensino acaba abrindo espaço para novas áreas de estudo em matemática, como de probabilidades, modelagem matemática, fractais, etnomatemática, por exemplo.

> Segundo D'Ambrósio (ver [1]) "o raciocínio qualitativo é essencial para se chegar a uma nova organização da sociedade, pois permite exercer crítica e análise do mundo em que vivemos.

De acordo com o exposto, não é correto pensar na substituição imediata de toda a matemática desenvolvida nos meios acadêmicos atualmente, chamada de matemática acadêmica, que é todo um corpo de conhecimentos desenvolvidos ao longo do tempo e que está em constante evolução, pelo programa etnomatemática. Como bem enfatiza D'Ambrósio (ver [1]):

> Hoje, é esse conhecimento e comportamento, incorporado na modernidade, que conduz nosso dia a dia. Não se trata de ignorar nem rejeitar conhecimento e o comportamento modernos. Mas, sim, aprimorá-los, incorporando a ele valores de humanidade, sintetizado numa ética de respeito, solidariedade e cooperação.

A matemática sempre desempenhou um papel importante no desenvolvimento das culturas de todos os povos. É importante ressaltar que ela se impôs com forte presença em todas as áreas de conhecimento e praticamente em todas as ações do mundo moderno. Sua presença no futuro será cada vez mais intensificada. Então cabe a sociedade criar alternativas para preparação dos futuros professores de matemática a fim de que desenvolvam matemática levando em consideração espectos mais qualitativos e a etnomatemática vai de encontro com essa proposto como bem diz D'Ambrosio (ver [1]):

> A proposta da etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo e no espaço, questionando o aqui e o agora. Ao fazer isso, mergulhamos nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural.
>
> Portanto, resgatar os conhecimentos prévios dos alunos e fazer com que eles trabalhem com situações reais podem tornar o ensino da matemática mais dinâmico e participativo, fazendo com que a aprendizagem seja mais qualitativa do que quantitativa.

No ambiente escolar os resultados das avaliações internas e principalmente das avaliações externas da disciplina de matemática tem mostrados que o ensino está indo de mal a pior. Vários fatores têm contribuido para esse fracasso: um deles se trata da enorme distância estabelecida entre a teoria abordadas nos livros didáticos e a resolução de situações práticas que fazem parte do cotidiano dos alunos. Então, trabalhar com a Modelagem Matemática é uma tentativa de aproximar ao máximo a teoria da prática com o objetivo de amenizar as dificuldades, melhorar o nível de ensino de Matemática e, consequentemente os índices de aprovação.

Assim como a etnomatemática, a modelagem matemática faz parte de um conjunto de novas tendências educacionais do século XXI. O surgimento de tais tendências é resultado de inúmeras pesquisas que buscam inovar a sala de aula e desenvolver uma prática docente criativa e adequada às necessidades da sociedade do referido século. Assim elas abrem espaço para pesquisas e discussões que envolvem o ensino da Matemática que, ao longo dos tempos, vem se tornando tão carente de inovações.

1.2 O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA?

Vamos pensar numa situação real que acontece todos os dias na vida das pessoas: ir ao supermercado fazer compras. Lá, o cidadão escolhe seus produtos e, na hora de pagar, pede aquele famoso desconto que, na maioria das vezes, não representa muito financeiramente, mas se a pessoa consegue tal desconto sai satisfeito e com sentimento de que fez um ótimo negócio. Situações como essas, discutidas oralmente por clientes e comerciantes todos os dias em todo lugar podem ser expressas por uma linguagem formal, conhecida como linguagem matemática. Isso se constitui modelagem matemática.

Segundo Biembengut e Hein (ver [2]):

> A modelagem matemática, arte de expressar por intermédio de linguaguem matemática situações-problema de nosso meio, tem estado presente desde os tempos mais primitivos. [...]tenta traduzir situações reais para uma linguagem matemática, para que por meio dela se possa melhor compreender, prever e simular ou ainda, mudar determinadas vias de acontecimentos, com estratégias de ação, nas mais variadas áreas do conhecimento.

Ainda segundo Biembengut e Hein (ver [2]) a modelagem matemática é tão antiga quanto a própria matemática, o surgimento dela tem origem nas aplicações em situações do cotidiano dos povos antigos. Mas foi na Física que surgiram os primeiros modelos matemáticos, isso aconteceu durante o período Renascentista. Período em que ocorreu grande impulso nas artes e nas ciências.

De acordo Biembengut e Hein (ver [2]) nas últimas três décadas, a modelagem vem ganhando espaço em diversos países. No Brasil, um dos primeiros trabalhos de modelagem no ensino foi do professor Aristides Camargos Barreto, da PUC do Rio de Janeiro, na década de 70. A consolidação e a difusão se efetuaram por vários professores, em particular, pelo professor Rodney Bassanessi, da Unicamp de Campinas e seus orientadores.

1.3 ETAPAS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Quando trabalhamos com modelagem matemática buscamos encontrar expressões ou fórmulas que resolvam situações particulares e que depois sejam testadas na resolução de situações gerais. Podemos dizer que a modelagem matemática é quem faz o intercâmbio entre a matemática e a situação real e esse intercâmbio obedece a algumas etapas. Biembengut e Hein (ver [2]) destacam três importantes etapas quando trabalhamos com modelagem, a saber: interação, matematização e modelo matemático.

Segundo esses autores, na etapa da interação, o professor, juntamente com os alunos, fazem um estudo minucioso do tema escolhido. Isso pode ser feito através de pesquisas, entrevistas, leituras de textos relacionados ao assunto. O objetivo dessa etapa é deixar os agentes do processo, ou seja, professor e alunos bem familiarizados com situações que serão criadas posteriormente. Quando estamos abordando determinado conteúdo na sala de aula, como por exemplo, o estudo do cilíndro, a interação corresponde a um esclarecimento de todos os elementos relacionados ao sólido: diâmetro, raio, altura, formato das bases, da área lateral e sua aplicabilidade no cotidiano das pessoas.

A etapa da matematização requer um pouco mais de requinte, pois é uma etapa bastante complexa. É nesse momento que as situações-problemas da vida real são escritas numa linguagem matemática. Então o professor deve estar bem atento a todas as informações e classificá-las de acordo com o grau de importância e, na medida do possível, priorizar as variáveis e constantes de maior relevância. É importante também selecionar símbolos apropriados para essas variáveis para, em seguida, descrever as relacões em termos matemáticos. Uma vez formuladas as situações-problemas, é chegado o momento de resolvê-las. Em muitas situações, é necessário o uso do computador já que não é possível resolvê-las por processo simples, então é extremamente importante que, ao trabalhar com modelagem, o professor tenha um conhecimento apurado das entidades matemáticas. A etapa da matematização no estudo do cilíndro seria levantar situações-problemas como o cálculo do volume e de área e posteriormente a resolução destes questionamentos.

Na terceira e última etapa, ou seja, a etapa de modelo Matemático, é feita a interpretação das soluções particulares e a verificação da confiabilidade do modelo para aplicação em situações derivadas da que está sendo investigada. Se a avaliação do modelo não for positiva deve-se retomar o processo na segunda etapa: matematização, a fim de fazer ajustes nas hipóteses e nas variáveis. Só depois destes ajustes é que é dada continuidade a etapa seguinte. No estudo do cilíndro, a etapa do modelo matemático corresponde apresentação das relações para calcular volume, área de cilíndros de qualquer raio e altura.

Dependendo do conteúdo estudado pode ser feita a etapa da matematização e depois o modelo matemático. No estudo de áreas de figuras planas podemos criar situações numéricas para calcular a área de um retângulo por exemplo (matematização) e depois indicar a fórmula para calcular a área usando variáveis (modelo matemático). No estudo da distância entre dois pontos no plano cartesiano, podemos chegar na relação para calcular a distância usando dois pontos genéricos (modelo matemático) e depois, atribuir valores para as coordenadas desses pontos e calcular o valor numérico (matematização).

1.4 APRENDER PARA ENSINAR MODELAGEM MATEMÁTICA

Trabalhar com modelagem na sala de aula, a princípio, pode ser uma tarefa difícil, mas se o professor for um sujeito aberto as inovações, quiser modificar sua prática como docente, as coisas podem se tornar fáceis. Entretanto, cabe ao professor ir buscar um embasamento teórico do assunto nas inúmeras contribuições literárias disponíveis nas livrarias, internet e bibliotecas. Em linhas gerais, o professor que deseja ensinar Modelagem Matemática precisa aprender a fazer modelagem, em sua essência, no processo de desenvolvimento, em suas raízes e utilizá-la como estratégia de ensino da matemática. Ter em mente que a Modelagem Matemática pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por conteúdos matemáticos que ainda desconhece ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar, matematicamente os fenômenos do cotidiano. Além disso, deve buscar exemplos de modelos já aplicadas por outras pessoas e que deram resultados satisfatórios. Esse trabalho de pesquisa é extremamente importante antes de começar a lidar com modelagem porque o professor vai partir da experiência de outras pessoas e adaptá-las à realidade de sua sala de aula. Para Biembengut e Hein (ver [2]) a habilidade e segurança nesse tipo de trabalho só se ganha com anos de experiência e, principalmente, tempo para planejar as ações.

Quando nos referimos ao planejamento das ações é porque cabe ao professor orientar e acompanhar cada passo do desenvolvimento do trabalho que pode começar com um diagnóstico feito com os alunos a respeito do que eles acham e sentem em relação a matemática. Depois, é necessário que se escolha um tema, de preferência que tenha relevância social e que seja do interesse deles, caso contrário corre-se o risco de haver desinteresse pela execução do trabalho. De acordo Biembengut e Hein (ver [2]), nessa etapa podem haver visitas a laboratórios de informática e de matemática, visitas de campo para coleta de dados para, em seguida, ser feita a formulações dos problemas, elaboração dos modelos, resolução parcial das questões, validação dos modelos e, no final, uma exposição oral e escrita dos trabalhos.

Desse modo, podemos assegurar que trabalhar com a modelagem no ensino de matemática não é algo difícil, mas requer um engajamento muito grande do professor e, principalmente dos alunos, já que, são eles os agentes ativos na execução das tarefas.

Alguns motivos são colocados como obstáculos na implantação da modelagem no ensino da matemática, como por exemplo: falta de tempo, falta de condições físicas e financeiras, às vezes torna-se dispendioso fazer uma atividade de modelagem, cobrança por parte de supervisores e diretores na preparação para o vestibular, deste modo não sobra tempo para desenvolver atividades extras como a modelagem.

Muitas vezes ouvimos que determinado conteúdo é ensinado porque "cai no vestibular", então o que se ensina nas escolas muitas vezes visa apenas à aprovação dos alunos para a universidade, mas se analisarmos bem, apenas uma pequena porcentagem dos alunos que ingressam no ensino fundamental conseguem terminar o ensino médio e uma parcela menor ainda consegue passar no vestibular. Logo não se justifica ensinar apenas para o vestibular, pois grande parte dos alunos não continuará seus estudos. Neste sentido, acredito que as autoridades e instituições de ensino bem como seu corpo docente, devem repensar o programa no seguinte sentido: Que tipo de cidadãos, nós, como professores queremos formar?

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2.1 PROBLEMA DA PESQUISA

Considerando-se o que foi exposto anteriormente no referencial teórico sobre Etnomatemática e Modelagem Matemática, vamos propor o seguinte problema que dará todo o suporte a pesquisa: "Quais são as possíveis contribuições da Modelagem Matemática na construção de conhecimentos de Geometria Espacial enquanto é explorado o tema Produção de doce em escala industrial?"

2.2 TIPO DE PESQUISA

Esta pesquisa foi desenvolvida por meio de uma abordagem qualitativa e quantitativa. Primeiro, foi feita uma entrevista com os 40 alunos da 2ª ano do Ensino Médio da Escola Arsênio Ferreira Maia. A entrevista foi composta por oito perguntas de múltipla escolhas, cada uma com quatro ítens, em que, cada aluno só poderia escolher um ítem correto. Os questionamentos vesaram sobre as impressões que eles têm em relação a Matemática. Este tipo de pesquisa busca captar o cotidiano dos alunos, analisando o que se passa em sala de aula, especialmente em situações de ensino e aprendizagem. Merecendo destaque as dificuldades apresentadas por eles, os fatores que influenciam na aprendizagem, os conteúdos em que apresentam maiores dificuldades, dentre outros.

Para o desenvolvimento das atividades, utilizaram-se como referencial as etapas da Modelagem que, sugeridas por Biembengut e Hein (ver [2]), norteiam o trabalho proposto para os encaminhamentos em sala de aula. São elas:

1. Escolha do tema: Essa etapa foi realizada durante o fim do 3º bimestre no mês de novembro, quando em uma conversa informal com os alunos em sala de aula, eles foram informados que desenvolveriam um trabalho de pesquisa sobre geometria

espacial e isso seria feito no 4º bimestre do ano letivo de 2012 que se estenderá até março de 2013 devido aos atrasos no início das aulas, em virtude de duas greves de professores cujo objetivo era a implantação do Piso Salarial aprovado pelo MEC. O professor deixou os alunos a vontade para escolherem os temas, surgiram várias sugestões, algumas de relevância social, outras não, variando com seus interesses e curiosidades, a saber: exploração da agricultura desenvolvida na Chapada do Apodi e no Chapadão de Russas ambos no município de Limoeiro do Norte, produção de polpa de frutas, artesanato, produção de telhas e tijolos, teatro. Devido a distância aos locais sugeridos, não foi possível desenvolver esses temas. Então, o professor surgeriu o tema produção de doce em escala industrial, por ser um tema que está muito relacionado ao conteúdo de Geometria Espacial, e a proximidade da fábrica de doce e a escola. O tema foi acatado sem muita resistência, pois alguns alunos ou os pais deles, já trabalharam na fábrica que foi escolhida para pesquisa.

2. Exploração do tema:

   Após escolhido o tema, o próximo passo foi coletar informações a respeito do assunto. Os alunos, divididos em grupos, foram para o Laboratório de Informática e acessaram vários sites, colheram várias informações. Em seguida, voltaram para sala de aula onde receberam um texto que falava sobre a origem e os tipos de doces produzidos no Brasil, divididos por regiões. Devido a abrangência do tema, este foi dividido em cinco subtemas, a saber: equipamentos e matérias-primas usadas na produção do doce; processo de produção; envasamento da produção; transporte e comercialização; planejamento da produção de uma tonelada de doce. Como as aulas são no período da manhã, os grupos se reuniram no período da tarde, com o objetivo de para elaborar os questionamentos de uma entrevista sobre o seu subtema. Foi agendada uma visita a Fábrica de Doce Limoeiro, Figura 2, para que cada grupo realizasse sua entrevista com o administrador da referida fábrica.

   Todas essas atividades tiveram como objetivo capturar as idéias iniciais, fazendo com que os alunos, se familiarizassem com o tema. Esse momento de busca de dados possibilitou uma maior dinâmica no ensino, pela ação e envolvimento dos grupos e do professor.

3. Levantamento dos problemas:

   Essa fase do trabalho de problematização das informações obtidas foi realizada pelo professor em conjunto com os alunos durante uma visita a fábrica de doce. Na oportunidade, todos tiveram contato com os equipamentos, as embalagens, conheceram o

Figura 2: *Visita a fábrica de doce Limoeiro.*

processo de produção, de envasamento dos produtos. Todos os equipamentos foram medidos e anotados seus dados, foram feitas indagações a respeito das máquinas e suas funções.

De volta à sala de aula, e de posse de todas as informações levantadas, foram criadas inúmeras situações que, a princípio, têm características diferentes daquelas apresentados na maioria dos livros didáticos, visto que são conseqüências da coleta de dados provenientes da pesquisa exploratória. Logo, essa pesquisa de campo teve como propósito favorecer a compreensão do tema escolhido, porque os alunos foram os sujeitos ativos dentro do processo, bem como obter dados para criação e resolução dos problemas elaborados pelo professor e por eles.

4. Resolução dos problemas e desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema.

   Esse momento foi um dos mais ricos, pois a maior parte dos conteúdos de Geometria Espacial estudado durante o ano letivo ganhou sentido e significado. Foi nessa etapa que se oportunizou a construção dos modelos matemáticos. Os modelos aqui explorados são descritos por meio de fotos e representações geométricas dos objetos reais observados e medidos na própria fábrica.

   A participação do professor foi de extrema importância nas diversas atividades, a saber: no registro das imagens, na orientação para realização das medidas dos equipamentos, na comparação dos objetos da fábrica com os sólidos geométricos estudados, no registro das informações dos instrumentais, na criação de algumas situações-problemas, na montagens dos modelos matemáticos, mas sempre com a participação ativa dos alunos. Então coube ao professor a função de propor caminhos e orientar na resolução e validação dos modelos. Sua interferência foi fundamental no desenvolvimento do conteúdo relacionado ao tema.

5. Análise crítica e validação dos modelos:

   Essa fase foi de verificação se o modelo ou representação geométrica tinha validade ou não. Os resultados foram confrontados com os valores obtidos no sistema real e testados se possuíam uma aproximação desejada. Aqueles em que essa aproximação não ocorreu foram modificados e analisados novamente. Houve também a generalização de modelos e, em alguns casos, a otimização de algumas formas para obtenção do objeto ideal.

2.3 COLETA DE DADOS

Essa etapa do trabalho que corresponde a investigação, esteve voltada para produção de dados descritivos, no qual houve um grande envolvimento do pesquisador (professor) e dos sujeitos da pesquisa (alunos).

Os instrumentos escolhidos para a coleta de dados foram a observação por meio de registros como fotos, fichas de observação e anotações feitas pelo professor e pelos alunos, um questionário aplicado aos alunos em forma de entrevista com perguntas de múltiplas escolhas questionando a visão deles em relação à matemática, um questionário aplicado ao administrador da fábrica sobre todos os pontos relacionados ao tema produção de doce.

As cinco equipes apresentaram o resultado das entrevistas na sala de vídeo usando as mídias da escola, todos os grupos, organizaram sua apresentação no power point.

Depois das apresentações, todo o material foi recolhido para ser incluido na presente dissertação. O objetivo das fotos é mostrar que as informações aqui apresentadas são fidedignas.

As informações referentes a elaboração e resoluções das situações-problemas estão descritas na subseção lavantamento e resolução de problemas relacionados ao tema. Assim, foi avaliada a capacidade dos alunos na resolução de situações e criação de novas situações a medida que as ações iam se realizando.

2.4 SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida com alunos do 2º ano do Ensino Médio, da Escola Estadual Arsênio Ferreira Maia, na cidade de Limoeiro do Norte, no Ceará. A turma tem 5 aulas semanais de matemática no período da manhã, cada aula tem a duração de 50 minutos.

A turma investigada é composta por 40 alunos, a maior parte deles reside na cidade, onde as possibilidades principais de emprego são nas pequenas indústrias e no comércio. A outra parte dos alunos reside na zona rural, onde o meio de sustentação familiar é a agricultura e a pecuária. Além disso, alguns pais de família desenvolvem algumas atividades nos perímetros irrigados da Chapada do Apodi ou no Chapadão de Russas ambos no município de Limoeiro do Norte, de onde vem a maior parte da matéria prima para produção de doces, no caso, as frutas. O leite vem dos pequenos produtores da região. Assim, na turma investigada, alguns dos alunos são filhos de agricultores ou pecuaristas, e outros alunos estão indiretamente ligados a atividade industrial, já que muitos de seus pais ou parentes trabalham ou trabalharam em alguma pequena indústria.

2.5 CARACTERIZAÇÃO DO MUNICIPIO DE LIMOEIRO DO NORTE-CE

Limoeiro do Norte, figura 3, é um município brasileiro, na Região Nordeste, no estado do Ceará. Localizado na Microrregião do Baixo Jaguaribe, no Vale do Jaguaribe. O município é conhecido também como a Terra das Bicicletas, por que no passado o número de bicicletas por habitantes era muito grande, e sendo comum as crianças aprenderem muito cedo a andar de bicicleta. Atualmente esse quadro se inverteu, os habitantes pouco andam de bicicletas, o que predomina agora são as motocicletas. Para se ter uma ideia, a média de veículos motorizados por habitantes em Limoeiro chega a ser maior que a média da capital do estado, Fortaleza.`pt.wikipedia.org/wiki/Limoeiro_do_Norte`

O topônimo limoeiro é uma alusão as plantações de limoeiros feitas pelos índios Paiacus. Sua denominação original era Vila de São João do Jaguaribe, depois Limoeiro e, desde 1943, Limoeiro do Norte, para distingui-la do topônimo Limoeiro, do município do estado de Pernambuco.

Tem um clima tropical semi-árido com temperatura variando de 27°C a 33°C e com pluviometria média de 724,3 mm com chuvas concentradas de janeiro à abril. As principais fontes de água fazem parte das bacias dos rios Jaguaribe e Banabuiú, sendo o seu

Figura 3: *Praça da Igreja Matriz de Limoeiro.*

principal afluente o Rio Quixeré. Existem diversos açudes, dentre eles o do Gado Bravo, da Ingarana, do Barracão e da Santa Fé. Mas dois grandes açudes merecem destaque: O Açude do Orós que perenizou o Rio Jaguaribe que secava suas águas durante o período de estiagem e o Açude do Castanhão com capacidade de 7 bilhões de metros cúbicos de água, três vezes maior do que Orós, veio garantir definitivamente o abastecimento de água, não só da cidade de Limoeiro do Norte, como também das demais cidades do Vale do Jaguaribe, inclusive a capital do estado, Fortaleza.

Segundo dados do IBGE, a população de Limoeiro do Norte em 2010 correspondia a 56.281 habitantes sendo a 25ª maior cidade estado do Ceará. Do total de habitantes, 28.708 são mulheres, ou seja, $51,01\%$ e 27.573 são homens, ou seja, e rural, temos que 32.502 habitantes moram na zona urbana que corresponde a $57,75\%$ e 23.779 mora na zona rural que corresponde a $42,25\%$.

A economia de Limoeiro do Norte está em crescimento, é um dos 15 maiores PIB e um dos 10 maiores PIB per capita do estado do Ceará, ao lado de outros 14 municípios do estado do Ceará representam mais de 70% do PIB estadual.

O setor primário é a segunda maior atividade econômica. Durante muitos anos a cera da carnaúba representou a principal atividade extrativista do município. Já o setor secundário é a terceira maior atividade econômica, destacando-se 40 indústrias, sendo treze de produtos alimentares, recebendo destaque as fábricas de doce e de produção de polpa de frutas, uma extrativa mineral, duas de madeira, quatro metalúrgicas, uma têxtil, uma editorial e gráfica, uma do mobiliário, dez de produtos minerais não metálicos, três de serviços de construção, quatro de vestuário, calçados e artigos de tecidos, couros e peles. O artesanato e a cantaria são também atividades econômicas importantes desenvolvidades principalmente na zona rural da cidade.

O setor terciário representa a maior atividade econômica, e encontra-se em grande expansão. O turismo ainda é pouco explorado. Limoeiro do Norte tem uma rica história, arquitetura, gastronomia, e muitas belezas naturais, como seus rios, Rio Jaguaribe e o Rio Quixeré, a Gruta de Lampião e a barragem das Pedrinhas no Rio Quixeré.

Durante muitos anos a cidade foi referência em educação no Vale do Jaguaribe, a maioria dos estudantes das cidades circunvizinhas se dirigiam a Limoeiro para fazer curso superior na UECE. Com o advento das universidades particulares e a criação do ENEM a grande maioria dos estudantes buscam Fortaleza, Mossoró ou Campina Grande para fazer curso superior.

No Brasil existem outros municípios além de Limoeiro do Norte, que tem em seu nome a palavra Limoeiro. São eles: Limoeiro; no estado do Pernambuco, Limoeiro de Anadia; no estado do Alagoas, Limoeiro do Ajuru; no estado do Pará.

2.6 ORIGEM DO DOCE NO BRASIL

Os doces do Brasil surgiram no período colonial, em especial, com a instalação, em larga escala, dos engenhos de açúcar no país. Antes da instalação dos engenhos, as primeiras sobremesas legitimamente brasileiras foram as frutas tropicais, tais como manga e carambola, regadas a mel. A banana com laranja foi a principal sobremesa durante o início do período colonial; podendo-se destacar ainda, nesta época, a goiabada, a cajuada, a cocada, a tapioca e o merengue, sendo populares também a banana assada ou frita com canela. `pt.wikipedia.org/wiki/Doces_do_Brasil` (ver também [8])

A partir do advento do açúcar, surgiu a calda e, com ela, as compotas de frutas que eram descascadas e cozidas pelos escravos. Os religiosos portugueses mantiveram as receitas à base de ovo que preparavam em seu país de origem, mas acrescentando ingredientes brasileiros. Assim, surgiram doces como quindim, papo de anjo, ambrosia, bom bocado, manjar e pudim. A utilização dos ovos se dava devido ao fato de que Portugal foi o principal produtor da Europa na época . A partir desse momento, em cada região do país foram se desenvolvendo receitas típicas de acordo com o alimento que era encontrado em abundância em cada lugar. Assim, o hábito de se comer determinados tipos de doce passou a fazer parte dos costumes locais, fazendo das sobremesas parte importante da culinária brasileira.

3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

3.1 ANÁLISE DOS GRÁFICOS

No início do desenvolvimento deste trabalho foi feita uma pesquisa quantitativa sobre a visão geral que os alunos têm sobre a matemática. Os alunos receberam um instrumental de avaliação com 08 questionamentos e cada questionamento com 04 ítens, onde só um desses ítens poderia ser marcado. Participaram da entrevista 40 alunos da sala do 2º ano A, do Ensino Médio da Escola Arsênio Ferreira Maia.

Os dados foram coletados e transformados em gráficos que serão mostrados e analisados a seguir:

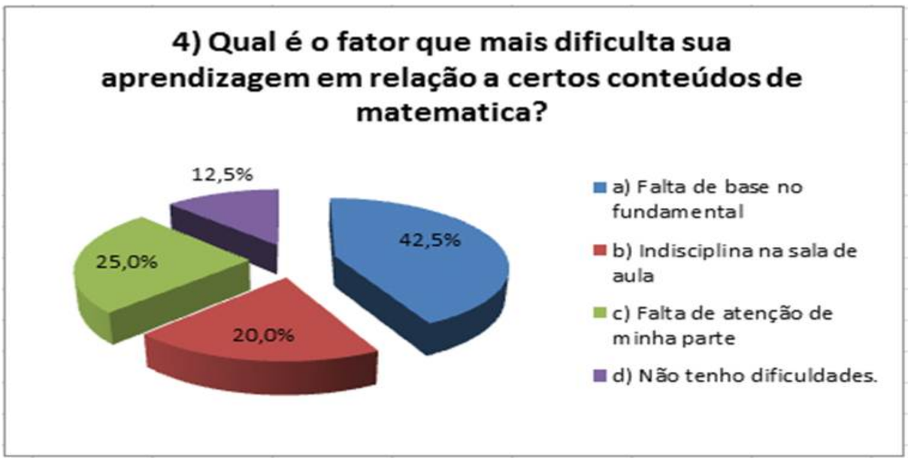

Figura 4: *Sentimento você tem em relação a matemática.*

Analisando o Figura 4 percebemos que 65% dos entrevistados, o que equivale a 26 alunos declararam gostar de matemática embora tenham dificuldades; 20%, ou seja, 8 alunos, declararam que gostam e não têm nenhuma dificuldades em relação a disciplina;

12, 5% do alunado, ou seja, 5 pessoas, disseram que não gostam da disciplina mas estudam para superar as dificuldades e somente 2, 5%, ou seja, uma aluno da turma não gosta de estudar matemática e também não faz nenhum esforço para superar as dificuldades. De maneira geral, podemos concluir que 34 alunos da turma, o que corresponde a 85%, gostam da referida disciplina e, apenas 6 alunos, ou seja, 15%, dizem não gostar de estudar matemática.

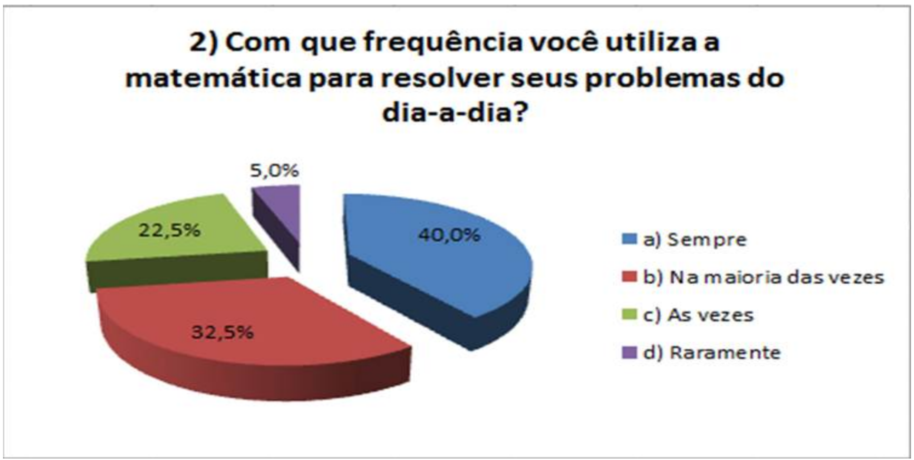

Figura 5: *Frequência no uso da matemática.*

De acordo com a Figura 5, verificamos que menos da metade dos alunos, ou seja, 40%, que corresponde a 16 alunos, tem a plena conciência que utilizam a matemática no seu dia a dia; 32, 5% dos alunos, ou seja, 13 deles acham que na maioria das vezes usam a matemática; 22, 5%, ou seja, 9 alunos, acham que às vezes e apenas 5% que corresponde a 2 alunos, acham que raramente usam a matemática para resolver seus problemas. Fazendo uma análise geral da frequência com que a matemática é usada por eles, conclui-se que o resultado foi satifatório e equivalente a 72, 5%, o que corresponde a 29 alunos.

A Figura 6 refere-se aos conteúdos estudados somente em 2012 pela turma avaliada. Percebemos que o conteúdo mais citado foi a Geometria Espacial recebendo 35% dos votos, o qúe equivale a 14 alunos; seguido pela Análise Combinatória que recebeu 27, 5% dos votos, correspondendo a 11 alunos; depois a Trigonometria com 22, 5%, ou seja, 9 alunos dizem ter apresentando dificuldades em aprender e 15% dos entrevistados, o que equivale a 6 alunos, declararam ter dificuldades e Matrizes e Determinantes.

Com relação a Figura 7 verificamos que 42, 5% dos entrevistados, ou seja, 17 alunos, atribuiram a falta de base de conhecimento não adiquirido no ensino fundamental como sendo a causa das dificuldades apresentadas por eles no ensino médio; 25% dos estudantes, o que corresponde a 10 alunos, declaram que a falta de atenção durante as aulas tem

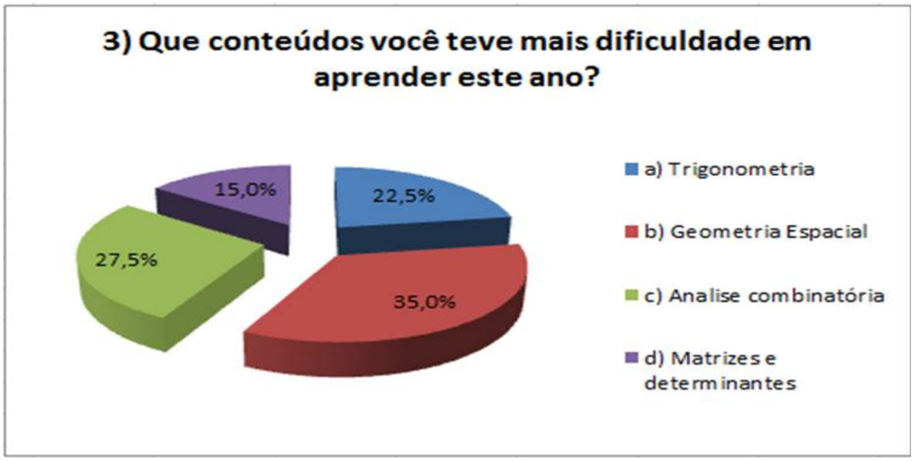

Figura 6: *Conteúdo e dificuldade em aprender.*

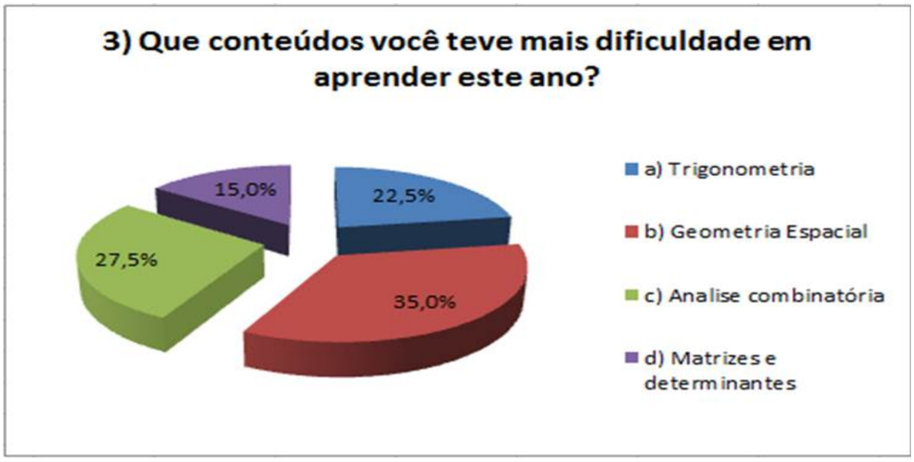

Figura 7: *Fatores que provocam dificuldades em matemática.*

prejudicada sua aprendizagem; 20%, ou seja, 8 alunos, dizem ter dificuldades por que são indisciplinados ou a indisciplina dos colegas atrapalha seu rendimento, e 12,5% declararam que não tem nenhuma dificuldade nos conteúdos de matemática, isso equivale a somente 5 alunos.

A pergunta acima foi direcionada para a Geometria Espacial, por ser este conteúdo, o enfoque principal deste trabalho. Analisando a Figura 8, percebemos que o fator que mais têm gerado dificuldades na aprendizagem, é a quantidade de fórmulas que ele apresenta, recebendo 47,5% dos votos dos entrevistados, isso corresponde a um total de 19 alunos; 32,5% dos alunos avaliados, ou seja, 13 pessoas relatam, que relacionar teoria e prática é muito complicada e isso influência de forma negativa na aprendizagem; 12,5%, ou seja, 5 alunos declaram que, por ser um conteúdo muito extenso, provoca um desinteresse em estudar e 7,5% dos alunos, que corresponde a apenas 3 pessoas, dizem não ter dificuldade

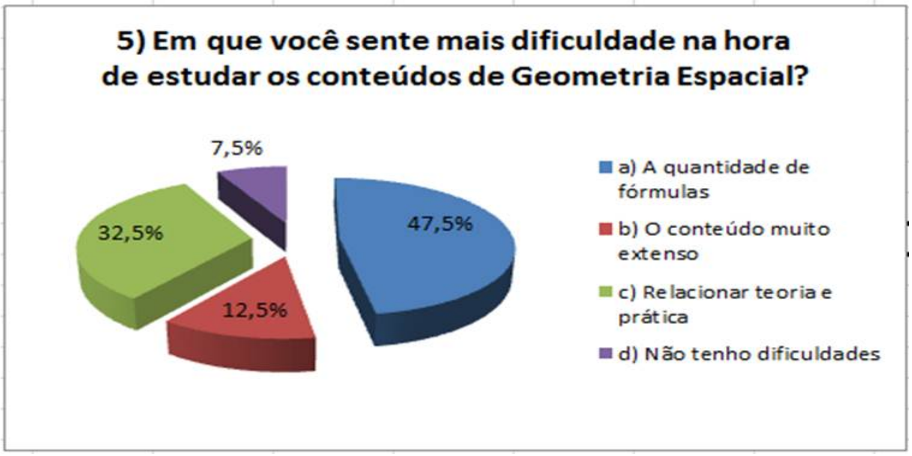

Figura 8: *Dificuldade em geometria espacial.*

alguma em estudar os conteúdos de Geometria Espacial.

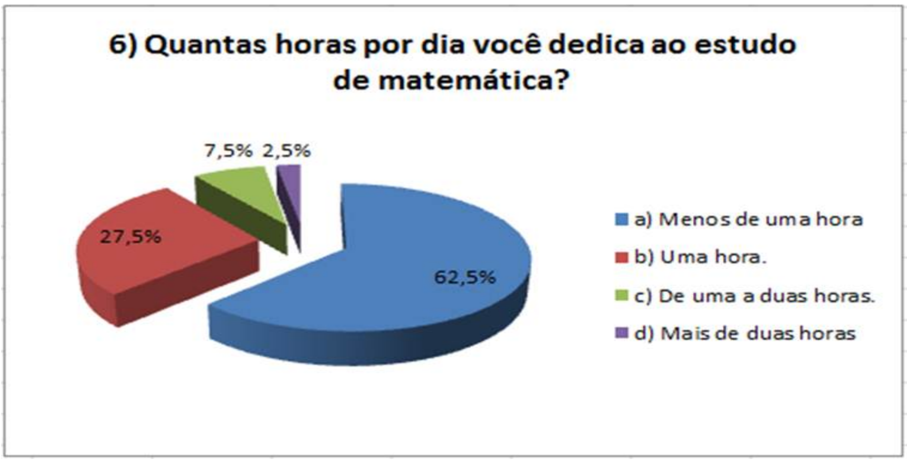

Figura 9: *Horas por dia dedicada a matemática.*

A Figura 9 mostra que $62,5\%$ dos entrevistados, ou seja, 25 alunos, dedica menos de uma hora extra por dia ao estudo de matemática; $27,5\%$ dos alunos, que equivale a 11 pessoas, declararam que dedicam exatamente uma hora por dia ao estudo extra da referida disciplina; $7,5\%$ que corresponde a 3 alunos, estuda de uma a duas horas por dia e apenas $2,5\%$ dos entrevistados, ou seja, um aluno dedica mais de duas horas ao estudo extra de matemática por dia. Fazendo uma análise geral do gráfico, verificamos que 90% dos entrevistados, ou seja, 36 alunos, dedica uma hora ou menos ao estudo extra de matemática por dia, isso pode ser uma das consequências do mal desempenho da turma na disciplina.

Analisando a Figura 10 verificamos que 40% dos avaliados, que equivale a 16 alunos, conseguem de forma parcial relacionar os conteúdos estudados com os objetos utilizados

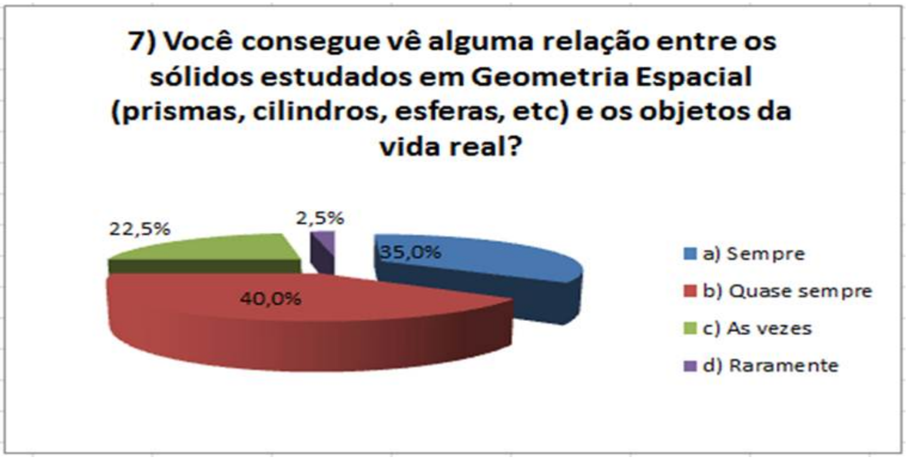

Figura 10: *Ver relação entre os sólidos.*

ou vistos no seu dia-a-dia; 35% dos entrevistados dizem que sempre conseguem ver relação entre a teoria estudada e os objetos reais, isso corresponde a 14 alunos; 22,5% declaram que as vezes conseguem ver esta relação, isso equivale a 9 alunos e somente um aluno, ou seja 2,5% dos entrevistados, raramente consegue relacionar o que estuda em Geometria Espacial com algo da vida real. No geral, podemos concluir que 75% das pessoas avaliadas, ou seja, 30 alunos, sabe relacionar o conteúdo que estuda com o seu cotidiano.

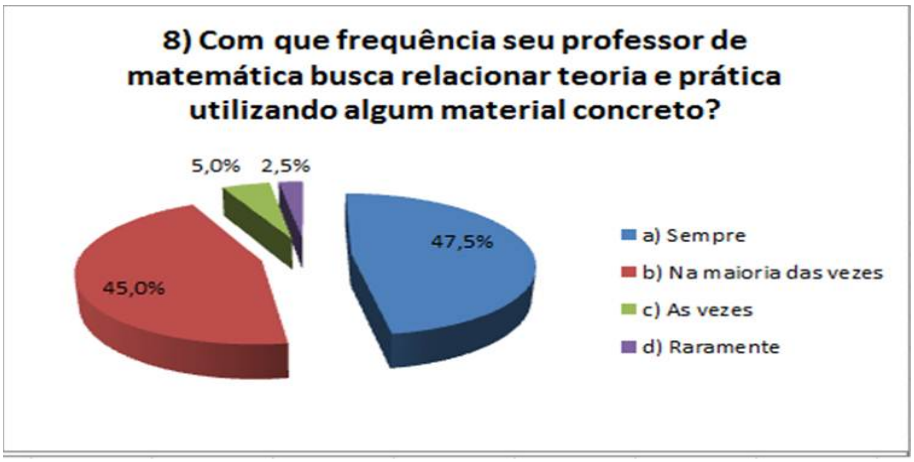

Figura 11: *Professor de matemática relaciona teorias.*

A Figura 11 mostra que 47,5% dos entrevistados declararam que o seu professor de matemática sempre procura usar algum material concreto para relacionar a teoria estudada com a prática; 45% dos alunos, que corresponde a 18 pessoas, declararam que na maioria das vezes o professor faz alguma relação entre teoria e prática; 5% das pessoas avaliadas, ou seja, 2 alunos, acham que as vezes o professor utiliza material concreto em suas aulas e apenas 2,5% das pessoa entrevistadas, ou seja, um alunos, diz que raramente o professor usa essa metodologia em suas aulas. No geral, percebemos que 92,5% das pessoas, que equivale a 37 alunos considera que o professor busca relacionar a teoria estudada com a prática, usando para isso, objetos da vida real, afim de melhorar a aprendizagem dos alunos.

3.2 ATIVIDADES DE EXPLORAÇÃO DO TEMA

Analisando as respostas dos alunos em relação as perguntas formuladas no questionário e seguindo as etapas da modelagem, foi proposto o desenvolvimento de atividades de levantamento de dados em relação ao tema escolhido.

Em sala de aula foi feito um levantamento dos possíveis temas que poderiam ser desenvolvidos e que fossem do interesse dos alunos. A princípio surgiram diversos temas, mas com orientação do professor e obdecendo o assunto estudado no momento e a relevância social houve uma culminância no tema produção de doce numa pequena industria da cidade, no qual pode ser abordado o conteúdo de Geometria Espacial em diversos aspectos. Depois da escolha do tema, os alunos foram divididos em cinco equipes conforme suas afinidades, foram orientados a efetuar o levantamento de informações sobre o tema escolhido. Devido à amplitude do tema, cada equipe ficou responsável por um subtema, a saber: equipamentos e matérias-primas usadas na produção; processo de produção; envasamento da produção; transporte e comercialização; e planejamento da produção de uma tonelada de doce. Essa etapa da modelagem, que é a exploração do tema, teve o objetivo de colher o máximo de informações e envolver os alunos, para que se familiarizassem com o assunto.

A coleta de informações foi feita mediante pesquisas na internet, leitura de um texto sobre origem dos doces no Brasil, apresentado pelo professor, e uma entrevista feita com o administrador da Fábrica de Doce Limoeiro que recebeu prontamente os alunos para responder aos questionários elaborados por eles relacionados ao assunto.

Na visita à fábrica de doce, os alunos tiveram oportunidade de ver, na prática, como se dá todo o processo de produção, envasamento dos potes e dos tabletes de doce, como é feito o escoamento da produção e armazenamento das matérias primas. Colheram as medidas de todos os equipamentos utilizados na fábrica para resolução dos problemas que serão levantados nas próximas etapas da modelagem. Os alunos não tinham ideia do que iam encontrar, mas, pelos comentários apresentados por eles durante a visita, percebeu-se que eles ficaram surpresos com a Matemática envolvida no processo, principalmente em relação aos conhecimentos de Geometria Espacial utilizados para a construção dos equipamentos, o que destacou a importância de aliar a teoria aprendida em sala de aula, a problemas do dia a dia. A Figura 12 mostra um dos primeiros momentos da visita a fábrica de doce.

Figura 12: *Tanque resfriador de leite.*

Na oportunidade todos os equipamentos foram medidos para posterior utilização dos dados.

3.3 ENTREVISTAS DOS ALUNOS NA FÁBRICA

Como já foi dito, todos os grupos optaram por fazer suas apresentações no power point.Por isso, nesse dia, as aulas foram realizadas na Sala de Vídeo. Durante a apresentação oral, todos participaram, uns com mais desenvoltura outros com menos, pois sabiam que estavam sendo avaliados.

O primeiro grupo a se apresentar, Figura 13, foi o que ficou responsável pelo levantamento dos equipamentos e matéria-primas usadas na produção. A seguir serão apresentadas as perguntas com suas respectivas respostas.

1. Quais os tipos de doces produzidos?

   Resposta: Fazemos diversos tipos de doce, dentre eles nós temos o de banana, de goiaba, caju e de leite.

Figura 13: *Grupo que apresentou os "'Equipamentos e matérias-primas"'.*

2. Quais são as outras matérias-primas utilizadas na produção? De onde elas vêm?

   Resposta 1: Açúcar, bicarbonato de sódio, pectina, sorbato que é um produto exclusivo para o leite, metabisufito, ácido fósforico e ácido cítrico.

   Resposta 2: De São Paulo.

3. Quais as frutas utilizadas? De onde elas vêm? É possível utilizar outros tipos de frutas? É viável economicamente?

   Resposta1: Usamos goiaba, caju e banana, com um detalhe, a banana é usada tanto sozinha para fazer o seu doce como é adicionada a goiaba e ao caju.

   Resposta 2: A grande parte vem da Chapada do Apodi e dos pequenos produtores da região.

   Resposta 3: Sim, mas nós buscamos trabalhar somente com frutas tipicas da região caso contrário o produto final vai se tornar muito caro e dificil de comercializar, se tornando inviável economicamente.

4. Que fruta rende mais na hora da fabricação? Por quê?

   Resposta: A banana é a que rende mais, além disso os produtos adicionados também tem um maior aproveitamento.

5. Existem produtos utilizados num tipo de doce e em outro não? Porquê?

Resposta 1: Por exemplo a banana é usada em todos os tipos de doces por ser mais barata e rende mais que as outras, já os demais produtos químicos variam de acordo com o tipo de fruta ou se o doce é de leite.

6. O que encarace o produto final?

   Resposta: O açúcar, ele é importado de outro estado, então o preço do frete tem que ser acrescentado no preço do produto senão dá prejuízo.

7. Que tipo de doce dá mais lucro e por quê?

   Resposta: O doce de leite é o que dá mais lucro, pois a matéria prima é uma das mais baratas usamos pouco produto químico e além disso a procura é muito grande no mercado, então produzimos muito logo, ganhamos em quantidade.

8. Quais os nomes dos principais equipamentos usados na produção? Qual é sua função?

   -Tacho misturador: misturar ingredientes ao leite durante o cozimento.

   -Tacho resfriador: depois de misturado aos ingredientes o leite fica em repouso até resfriar.

   -Tanque resfriador: conservação do leite.

   -Funil: encher os potes com doce para evitar desperdicio.

   -Empacotadeira: empacotar as barras e os tabletes de doce.

   -Envasadora: envasar a vácuo o doce de leite em barras.

   -Caminhões: transporte de matéria-prima e escoar a produção do doce.

   Além disso, temos os potes, as caixas, e diversos outros equipamentos utilizados na produção.

9. Como foram adquiridos os equipamentos? Financiamento? Ou compra à vista?

   Resposta 1: A fábrica já existia, nós eramos funcionários, quando ela faliu, nós compramos e os equipamentos já vieram juntos no negócio.

   Resposta 2: Fizemos um financiamento para comprar a fábrica e alguns equipamentos novos.

10. As máquinas utilizadas são nacionais ou estrangeiras? Por que a escolha?

    Resposta : Todas são nacionais, por serem mais baratas. Muitas máquinas estrangeiras são de melhor qualidade mas não são viáveis economicamente.

O segundo grupo a se apresentar, Figura 14, foi o que ficou responsável pelo processo de produção. A seguir serão apresentadas as perguntas com suas respectivas respostas.

Figura 14: *Grupo que apresentou o "'Processo de produção".*

1. Como é feita a higienização das frutas?

   Resposta: Usamos somente água para lavar as frutas. No caso das bananas, primeiramente retiramos as cascas colocamos no tanque passamos de duas a três águas. O mesmo acontece com as frutas que não são necessárias retirar as cascas, no caso das goiabas e dos cajus.

2. As frutas são trituradas antes ou depois do cozimento? Ou não há trituração?

   Resposta: Não há trituração, só cozimento, muitas vezes já recebemos as frutas prontas para fabricar o doce, então, nesse caso, também não há cozimento.

3. As sementes são retiradas antes da trituração?

   Resposta: A única fruta que usamos que tem sementes são as goiabas, mas não é necessário retirá-las.Depois de cozidas eles se juntam a polpa para fazer o doce.

4. Onde é feito o cozimento? A quantos graus?

   Resposta : É feito em um tacho grande a 100º.

5. Qual é o tempo médio de cozimento? Varia de acordo com o tipo de fruta?

   Resposta: Em média de uns 30 minutos para todas as frutas.

6. O que é feito com o material que não é aproveitado?

   Resposta: No caso das goiabas e dos cajus nós já recebemos a polpa pronta, então não sobra. Já as bananas tem como sobra as cascas, elas são doadas para os criadores de animais da cidade, principalmente os criadores de porcos.

7. Existem outras etapas para a produção do doce? Quais? Descreva.

   Resposta: Sim, descascamento das bananas; cozimento das frutas e do leite; fabricação do doce; resfriamento; corte em barras; envasamento dos potes; embalagem em caixas e transporte.

8. Quanto tempo o produto deve ficar esfriando?

   Resposta: Depende, se não houver pressa no pedido ele fica resfriando de 12 a 24 horas, mas se houver urgência ele pode ser embalado ou cortado antes disso.

9. Que tipo de doce leva mais açúcar, mais leite?

   Resposta: O doce poly e o doce de leite.

10. Como é feita a distribuiçao dos funcionários para cada etapa de produçaõ?

    Resposta: De acordo com a habilidade, por exemplo, as pessoas que enrolam ou embalam os tabletes nos potes, elas têm que ser rápidas, caso contrário são mudadas de setor ou demitidas.

11. Como é feito o treinamento dos funcionários?

    Resposta: O treinamento das pessoas, principalmente as mulheres que embalam ou enrolam doces, é feito na prática até pegar experiência. Se, depois disso, a pessoa não ficar habilidosa não pode ficar. Já para os homens, o critério é a força, pois muitas das atividades aqui na fábrica são braçais.

O terceiro grupo a se apresentar, Figura 15, foi o que ficou responsável pelo envasamento da produção. A seguir serão apresentadas as perguntas com suas respectivas respostas.

1. Quais os formatos dos potes onde são colocados os doces? Quantos gramas pesa cada pote depois de cheio?

Figura 15: *Grupo responsável pelo "'Envasamento da produção".*

Resposta 1: Os doces são embalados em tabletes ou em barras que têm a forma de paralelepípedo retangular, em potes cilíndricos e em forma de tronco de cone.

Resposta 2: O peso varia dependendo do tamanho e formato do pote ou das barras. Tem barras de $130g, 200g, 250g, 300g$ e $400g$. Já os potes variam em $300g, 400g, 680g$ e $900g$.

2. Depois de colocadas nos potes em que eles são embaladas? Quais são as suas dimensões?

   Resposta 1: São colocadas em caixas de papelão em forma retangular.

   Resposta 2: Varia, as caixas pequenas têm dimensões: $31,5cm$ por $9cm$ por $6cm$, já as caixas grandes têm dimensões $45cm$ por $23,5cm$ e $30cm$.

3. Quantas caixas cabem dentro do caminhão baú?

   Resposta: O maior caminhão baú que nós temos tem uma capacidade máxima de umas 2000 caixas grandes, mas, por segurança do produto, ou seja, para evitar que ele amasse, colocamos em torno de 1300 caixas, depende também dos pedido.

4. Por que os doces são embalados em tabletes já que há gasto com plástico para embalá-los? Isso não encarece o produto?

   Resposta 1: É uma exigência do mercado, por ter um tamanho pequeno em torno de $15g$ é ideal para não haver desperdício na hora do consumo.

Resposta 2: Para a fábrica o melhor seria envazar o produto diretamente nos potes, pois o gasto com mão de obra seria menor e o gasto com material também, mas, como disse, é uma exigência do mercado e é o consumidor quem paga pelo adicional do plástico.

5. Como são embalados os tabletes de doce?

   Resposta: O plástico que envolve o produto é colocado por uma máquina, já a maneira como eles são colocados nos potes ou em barras é feita manualmente, em geral por mulheres, são elas as responsáveis por essas etapa, por ser um trabalho mais leve e mais minucioso.

6. Qual é o peso de cada tablete de doce? Quantos tabletes cabem num pote?

   Resposta 1: Em torno de $15g$.

   Resposta 2: Em média de 60 tabletes.

7. Quantos quilos de doces são produzidos diariamente?

   Resposta: Como produzimos doce de vários tipos de frutas, varia de acordo com a safra, mas, no máximo, temos capacidade de produzir em média umas três toneladas por dia. Como a banana é um produto acrescentado em todos os tipos de doce para dar conscistência e diminuir os custos, quando está em falta a produção cai para, no máximo, uma ou duas toneladas diárias.

8. Como é calculada a data de validade?

   Reposta: É muito complicado falar em validade do produto. Nós colocamos alguns aditivos para aumentar o tempo de validade do produto na prateleira dos supermercados, mas depois de aberto o lacre do produto, vai depender da higiene do consumidor.

O quarto grupo a se apresentar, Figura 16, foi o que ficou responsável pelo transporte e comercialização da produção. A seguir serão apresentadas as perguntas com suas respectivas respostas.

1. Quais são as frutas utilizadas na fabricação dos doces?

   Resposta: Goiaba, caju e banana, sendo a banana o carro chefe da produção.

2. As frutas são compradas somente em Limeiro ou também em outra cidades? Quais?

Figura 16: *Grupo responsável pela apresentação do "‘Transporte e comercialização da produção".*

Resposta: Somente em Limoeiro, pois aqui temos muitos pequenos produtores de fruta e, além disso, temos os projetos de irrigação da Chapada do Apodi e o Chapadão de Russas que produzem frutas em escala indústrial.

3. Como é feito o transporte das frutas até a fábrica?

   Resposta: Os pequenos produtores vêm deixar direto na fábrica, mas a empresa tem caminhão próprio para ir buscar o produto quando o volume é maior.

4. O produto final (doce) é comercializado somente em Limoeiro? Ou é vendido para outras cidades? Quais?

   Resposta: No Norte e Nordeste e, futuramente, em São Paulo e outros estados do Sudeste.

5. Que tipo de doce tem mais aceitação no mercado? Por quê?

   Resposta 1: Doce poly.

   Resposta 2: Não sei direito porque, mas ele é quem comanda a saída dos outros produtos.

6. O produto é vendido direto aos comerciantes ou há algum tipo de atravessador? Isso não encarece o produto?

   Resposta 1: Muitos comerciantes mandam seus representantes direto na fábrica, os clientes antigos fazem encomendas por telefone ou internet, também mandamos

Produtos	Quantidade (kg)	Preço de (1kg)	Preço total
Goiaba	850	0,50	425,00
Banana	150	0,50	75,00
Açucar	273	1,10	300,00
Mão de obra, transporte	-	-	1000,00
Total de despesas	1273	-	1800,00

Tabela 1: *Quantidade de cada produto para uma tonelada de doce de goiaba*

nossos representantes apresentar nossos produtos nos comércios para adquirir novos clientes, é assim que funciona.

7. Quando vocês vão fazer a entrega de algum pedido há cobrança de frete ao cliente? Ou o frete já está embutido no proço final do produto?

   Resposta: Sim, fazemos todo o preço de custo do produto para depois fazer o preço de repasse para o comerciante de forma que todo gasto já está embutido no preço final do produto.

8. Os demais produtos usados na fabricação do doce são comprados onde? Como eles chegam a fábrica?

   Resposta: Os aditivos vêm de São Paulo através de transportadora, é mais barato que ir buscar. O leite, compramos direto dos fazendeiros.

9. Como é feita a relação custo X benefício pela empresa? Quem é o responsável por essa parte?

   Resposta: O responsável por essa parte sou eu, Fancisco Gledson Queiroz de Oliveira, tenho todos os dados referentes aos preços dos produtos, custo de frete, salário de funcionários, então simulo os gastos para 100 kg de doce, por exemplo, ai determino o preço do produto com uma margem boa de lucro, é assim que funciona.

O quinto grupo a se apresentar, Figura 17, ficou responsável pelo planejamento da produção de uma tonelada de doce. A seguir serão apresentadas as perguntas com suas respectivas respostas.

1. Qual Quantidade de cada produto para uma tonelada de doce de goiaba?

   Tabela 1: Quantidade de cada produto para uma tonelada de doce de goiaba:

Figura 17: *Grupo que apresentou o "'Planejamento da produção de uma tonelada de doce".*

2. Quantos potes de $500g$ vão encher?

   Resposta: Cada tonelada de doce dar para encher 2000 potes de $500g$;

3. Qual é o preço de cada pote para fábrica? Por quanto ele é vendido ao comerciante?

   Resposta 1: Cada pote custa em média para a empresa R$ 0,90, então 2000 potes darão uma despesa de R$1800,00.

   Resposta 2: Cada pote é vendido para os comerciantes por R$ 1,30, então 2000 potes geram uma receita de R$ 2600,00. Portanto cada tonelada de doce deixa um lucro de 2600 - 1800= 800 reais.

4. Quantos dias serão necessários para produzir essa quantidade de doce?

   Resposta: Quando a produção está indo muito bem, é produzida cerca de 3 toneladas por dia.

5. Fazendo uma proporção para um mês, quantas toneladas serão produzidas?

   Resposta: Em média são 24 dias de produção por mês, então são produzidas em média 72 toneladas mensais. Se o lucro gerado por uma tonelada corresponde a R$ 800,00, logo 72 toneladas deve gerar um lucro de R$ 57600,00 mensais.

6. Quantos funcionários estão envolvidos desde a produção até a comercialização?

   Resposta: Cerca de uns 85 funcionários, alguns tem carteira assinada outros não.

3.4 LEVANTAMENTO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

De acordo com as observações feitas durante a visita a fábrica de doce e pelo que foi apresentado pelos alunos, fruto das entrevistas, pode-se notar que vários conteúdos podem ser explorados no estudo da produção de doce, a saber: razão e proporção, estatística, geometria plana, porcentagem, geometria espacial. Como o objetivo maior desse trabalho é desenvolver os conteúdos de Geometria Espacial, então as atividades foram direcionadas para explorar esse assunto.

Na Figura 18, temos um tanque cilíndrico usado para armazenar, resfriar e conservar o leite que será usado na produção de alguns doces.

Figura 18: *Tanque para armazenar leite.*

Ao serem indagados sobre a semelhança desse equipamento com algum sólido geométrico estudado por eles este ano, os alunos foram categóricos: tem a forma de um cilindro. Nesse momento, foi feita uma identificação de seus elementos: raio, diâmetro, perímetro (contorno), altura, o formato da base, a planificação o formato da parte lateral.

Foram explorados também os outros corpos redondos: cone e esfera bem como seus elementos. Nessa etapa, o manuseio dos sólidos de acrílico facilitou a compreensão e identificação de cada elemento do sólido e também as diferenças entre eles.

Após a exploração, por meio do material concreto, foi pedido aos alunos que usassem as medidas colhidas na fábrica para resolver algumas situações propostas. Lembrando que essas medidas foram tomadas por meio de fita métrica e barbante estando sujeitas a imperfeições.

Problema 3.1. Sabendo que o tanque na forma cilíndrica tem diâmetro D=2,08m, altura h=1,10m e contorno C=6,62m, quanto de material foi usado para confeccioná-lo?

Fazendo a planificação do tanque cilindrico, Figura 19, para melhor visualização dos cálculos.

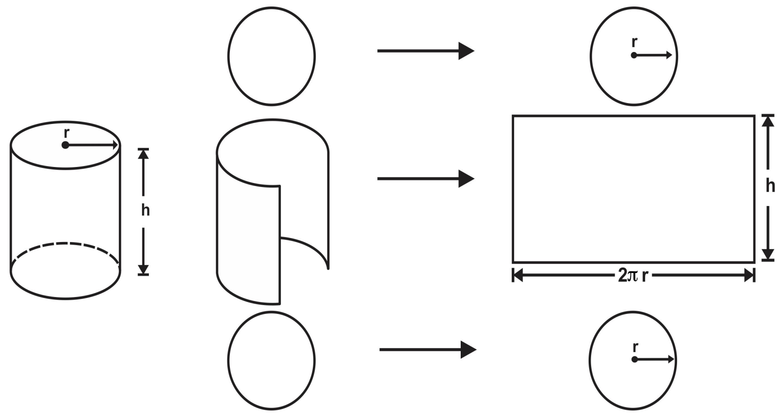

Figura 19: *Planificação do cilindro.*

Analisando a planificação, devemos calcular a área das bases que são círculos de raio $r = 1,04$ já que o diâmetro é $D = 2,08m$ e a área lateral que é um retângulo cujo comprimento corresponde ao contorno do tanque e a largura que corresponde a sua altura. Então, a quantidade de material utilizado que é a área total, corresponde a soma da área lateral com a área das duas bases.

Área da base: $A_b = \pi r^2$ substituindo o valor de pi e do raio, temos:

$A_b = 3,14x1,04^2 = 3,39m^2$

Área lateral: $A_L = 2\pi rh = 2x3,14x1,04x1,1 = 7,18m^2$ substituindo o valor do raio e da altura, temos:

$A_L = 2x3,14x1,04x1,1 = 7,18m^2$

Área total: $A_t = 2A_b + A_L$

$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$A_t = 2\pi r(h + r)$ (modelo matemático)

Área total : $A_t = 2x3,39 + 7,18 = 6,78 + 7,18 = 13,96m^2$ substituindo a área total e a área lateral, temos:

$A_t = 6,78 + 7,18 = 13,96m^2$

Problema 3.2. Qual é a quantidade máxima de leite que pode ser colocada dentro desse tanque?

De acordo com o conteúdo explorado durante o ano letivo, ficou fácil descobrir o resultado desse questionamento, pois este é calculado fazendo o produto entre a área da base e a altura.Logo o volume é dado pela relação matemática:

$V = \pi r^2 h$ substituindo o valor de pi e da altura, temos:

$V = 3,14x1,04^2x1,1 = 3,735m^3$

Então sua capacidade em litros é:

$C = 3,735x1000 = 3735litros$

Nesse momento esclareceu-se a relação que existe entre o metro cúbico e o litro.

Como já foi citado e segundo Biembengut e Hein (ver [2]) "As expressões a seguir que permitem calcular área e volume de um cilindro de base circular, podem ser consideradas modelos. Isto por que por meio delas podemos obter a área e o volume de qualquer objeto que tem esse formato, variando apenas as medidas."

Área total: $A_t = 2\pi r(h + r)$

Volume:$V = \pi r^2 h$

Problema 3.3. Se esse tanque fosse um prisma de base quadrada ou de base hexagonal com mesma altura e mesmo volume do tanque cilíndrico, qual dos três utilizaria mais material para ser confeccionado?

Vamos primeiro calcular a área total do prisma de base quadrada conforme a planificação do sólido, representado na Figura 20, abaixo:

Usaremos as fórmulas, do volume do prisma de base quadrada e do cilindro para encontrar a aresta da base do prisma. Sendo V_P o volume do prisma e V_C o volume do cilindro, temos que V_P=a.a.h e $V_C = \pi r^2 h$, como os volumes e as alturas são iguais, temos:

$V_P = V_C$

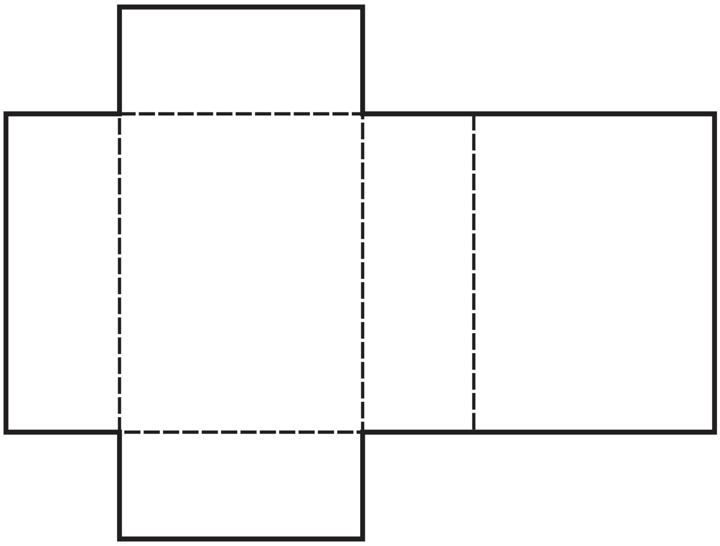

Figura 20: *Planificação do prisma retangular.*

$a.a.h = \pi r^2 h$ cancelando h, temos:

$a^2 = \pi r^2$

$a = \sqrt{\pi r^2} \Longrightarrow a = r\sqrt{\pi}$ (modelo matemático).

Como $r = 1,04m$, temos que:

$a = 1,04x\sqrt{3,14}$

$a = 1,04x1,77 \Longrightarrow a = 1,84m$

Agora vamos calcular a área total:

$A_t = 2(a.a) + 2(a.h) + 2(a.h)$

$A_t = 2a^2 + 4ah$

$A_t = 2(a^2 + 2ah)$ (modelo matemático).

Como $a = 1,84m$ e $h = 1,1m$, tem-se que:

$A_t = 2(1,84^2 + 2x1,84x1,1)$

$A_t = 2(3,396 + 4,048)$

$A_t = 2x7,444 \Longrightarrow A_t = 14,888m^2$

Agora vamos calcular a área total do prisma de base hexagonal conforme a planificação do sólido representado na Figura 23, abaixo:

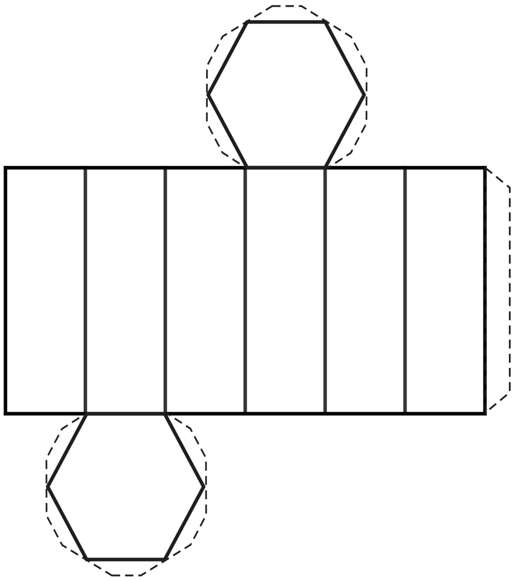

Figura 21: *Planificação do prisma hexagonal.*

Usaremos as fórmulas, do volume do prisma de base hexagonal e do cilindro para encontrar a aresta da base do prisma. Sendo V_P o volume do prisma e V_C o volume do cilindro, temos que $V_P = \frac{3a^2\sqrt{3}.}{2}.h$ e $V_C = \pi r^2 h$, como os volumes e as alturas são iguais, temos:

$V_P = V_C$

$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.h = \pi r^2 h$

$a^2 = \frac{2\pi r^2}{3\sqrt{3}}$

$a = \sqrt{\frac{2\pi r^2}{3\sqrt{3}}}$ (modelo matemático)

Como o $r = 1,04m$, temos que:

$a = \sqrt{\frac{2x3,14x1,04^2}{3x1,73}}$

$a = \sqrt{1,308} \Longrightarrow a = 1,14m$

Agora vamos calcular a área da total:

$A_t = 2A_B + A_L$

$A_t = 2\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6a.h$

$A_t = 3a^2\sqrt{3} + 6ah$

$A_t = 3a(a\sqrt{3} + 2h)$ (modelo matemático)

Como $a = 1,14m$ e $h = 1,1m$, temos que:

$A_t = 3x(1,14)\left[(1,14)x(1,73) + 2x(1,1)\right]$

$A_t = 3,42x\left[(1,97 + 2,2)\right]$

$A_t = 3,42x4,17$

$A_t = 14,26m^2$

Analisando a área total do cilindro, do prisma de base hexagonal e do prisma de base quadrada, podemos observar que, quanto maior o número de lados do polígono da base, isto é, quanto mais o poligono se aproximar de um círculo, menor será sua área total, pois a área do círculo é menor do que a área do prisma hexagonal que é menor que a área do prisma de base quadrada. Portanto, é no prisma de base quadrada que se usa mais material.

Seguindo as etapas da modelagem matemática, vamos generalizar para quaisquer valores do raio e altura do círculo e aresta da base e altura do prisma de base quadrangular. Mas, considerando mesmo volume e mesma altura. Vamos considerar agora um prisma de base quadrangular. Usaremos as fórmulas, do volume do prisma de base retangular e do cilindro para encontrar as arestas da base do prisma. Sendo V_P o volume do prisma e V_C o volume do cilíndro, temos que $V_P = a.b.h$ e $V_C = \pi r^2 h$, como os volumes e as alturas são iguais, temos:

$a.b.h = \pi r^2 h$ cancelando h, temos:

$a.b = \pi r^2$

$b = \frac{\pi r^2}{a}$ e $a = \frac{\pi r^2}{b}$

Como a área de um prisma quadrangular é dado pela relação:

$A_t = 2(ab) + a(bh) + 2(ah)$

$A_t = 2\left[(ab + h(a + b)\right]$ (modelo matemático)

Substituindo os valores correspondentes a: ab, a e b obtemos:

$A_t = 2\left[(ab + h(a + b)\right]$

$A_t = 2\left[(\pi r^2 + h(\frac{\pi r^2}{b} + \frac{\pi r^2}{a})\right]$

$A_t = 2\left[(\pi r^2 + h\pi r(\frac{r}{b} + \frac{r}{a})\right]$

$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi rh(\frac{r}{b} + \frac{r}{a})$ (modelo matemático)

Proposição 3.1. A área total de um cilindro é sempre menor que a área de um prisma de base qualquer.

Demonstração. É suficiente mostrar que $A_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh(\frac{r}{b} + \frac{r}{a})$ é maior que a área total do cilíndro dado pela relação $A_{tc} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Analisando as expressões, basta mostrar que $\frac{r}{b} + \frac{r}{a} > 1$ Dados dois números reais positivos x e y, onde $x = \frac{r}{b}$ e $y = \frac{r}{a}$ temos que:

$M_A \geq M_G$

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$\frac{\frac{r}{b}+\frac{r}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{r}{b} \cdot \frac{r}{a}}$

$\frac{\frac{r}{b}+\frac{r}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{r^2}{ab}}$ como $ab = \pi r^2$ temos que:

$\frac{r}{b} + \frac{r}{a} \geq 2\sqrt{\frac{r^2}{\pi r^2}}$

$\frac{r}{b} + \frac{r}{a} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

$\frac{r}{b} + \frac{r}{a} \geq 2\sqrt{\frac{1}{3{,}14}}$

$\frac{r}{b} + \frac{r}{a} \geq 2\sqrt{0,3184}$

$\frac{r}{b} + \frac{r}{a} \geq 2.(0,564)$

$\frac{r}{b} + \frac{r}{a} \geq 1,128 > 1$. Logo, $\frac{r}{b} + \frac{r}{a} > 1$. □

Podemos ver isto observando que os volumes e as alturas são iguais temos que:

$\pi r^2 h = abh$

$\pi r^2 = ab$ multiplicando por 2, temos:

$2\pi r^2 = 2ab$

$2\pi r.r = 2ab$

$r = \frac{2ab}{2\pi r}$

Se $2\pi r < 2(a+b)$, onde $2(a+b)$ é o perímetro da base do prisma retangular. Então:

$r > \frac{2ab}{2(a+b)}$

$r > \frac{ab}{a+b}$

$ra + rb > ab$, dividindo tudo por ab, temos:

$\frac{ra}{ab} + \frac{rb}{ab} > \frac{ab}{ab}$

$\frac{r}{b} + \frac{r}{a} > 1$

Vamos mostrar a condição $2\pi r < 2(a+b) \Longrightarrow a+b > \pi r$

Como os volumes e as alturas são iguais, então as áreas das bases dos sólidos são iguais, logo temos que:

$\pi r^2 = ab$

Sabemos que dados dois números a e b, temos que a média aritmética M_A e maior que a média geométrica M_G, então $M_A \geq M_G$. Logo:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$a + b \geq 2\sqrt{\pi r^2}$

$a + b \geq 2r\sqrt{\pi}$

Vamos provar que:

$2r\sqrt{\pi} > \pi r$

$2\sqrt{\pi} > \pi$

$(2\sqrt{\pi})^2 > \pi^2$

$4\pi > \pi^2$ dividindo por π, temos:

$4 > \pi$

Como $a + b \geq 2r\sqrt{\pi}$ e $2r\sqrt{\pi} > \pi r$ então $a + b > \pi r$.

Portanto podemos concluir que a área do prisma quadrangular é sempre maior que a área de qualquer cilíndro mantendo-se o mesmo volume e a mesma altura. De modo análogo podemos fazer para o prisma hexagonal ou com qualquer outro prisma.

Na Figura 22, abaixo vemos um tacho misturador, nele é colocado leite que recebe calor vindo da caldeira. Esse vapor é responsável pela fervura desse leite que posteriormente será misturado a outros ingredientes para produzir o doce de leite.

Analisando a Figura 22, percebemos claramente que ela é formada por um cilíndro e por um hemisfério, ou seja, a metade de uma esfera.

Problema 3.4. Qual é a quantidade máxima de leite que pode ser colocada dentro desse recipiente?

Figura 22: *Taxo misturador de leite.*

Sabendo que as medidas desse recipiente são: diâmetro da base $D = 0,82m$, logo o raio $r = 0,41m$ e contorno(perímetro) $C = 2,52m$. A altura correspondente ao cilindro é $h = 0,4m$ e altura correspondente a esfera equivale oa raio do cilíndro que é igual a $r = 0,41m$

Explorando o conteúdo estudado temos que:

O volume do cilindro é dado por $V_C = \pi r^2 h$ e que o volume de uma esfera é dado pela relação $V_E = \frac{4\pi r^3}{3}$. Como o hemisfério é a metade de uma esfera temos que seu volume é dado por $V_H = \frac{2\pi r^3}{3}$.Então o volume total do tacho corresponde a soma dos dois volumes.

$V_t = V_C + V_E$

$V_t = \pi r^2 h + \frac{2\pi r^3}{3}$ (modelo matemático)

Substituindo $r = 0,41m$ e $h = 0,4m$, temos:

$V_t = 3,14x(0,41)^2x0,4 + \frac{2x3,14x(0,41)^3}{3}$

$V_t = 0,211 + 0,144$

$V_t = 0,355m^3$

$V_t = 0,355x1000 \Longrightarrow V_t = 355$ litros

Problema 3.5. Qual foi a quantidade de material utilizado para confeccionar o tacho misturador?

Como a parte cilíndrica não tem bases é necessário apenas calcular a área lateral que é dado pela relação $A_L = 2\pi rh$ e a área do hemisfério que é dado pela relação $A_H = 2\pi r^2$equivalente a metada da área total da esfera que corresponde a $A_t = 4\pi r^2$.

Então a área total do tacho é dado por:

$A_t = A_L + A_H$

$A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$ (modelo matemático)

Observe que a área total do tacho corresponde a área total de um cilindro de raio $r = 0,41m$ e altura $h = 0,4m$.

Logo a área total do tacho é:

$A_t = 2x3,14x(0,41)x0,4 + 2x3,14x(0,41)^2$

$A_t = 1,030 + 1,057$

$A_t = 2,087m^2$

Problema 3.6. Se o tacho misturador tivesse o formato da ,Figura 23 abaixo, qual o volume máximo de leite que ele poderia comportar e qual a quantidade de material usado para confeccioná-lo?

Figura 23: *Taxo misturador esférico.*

Observe que os tachos têm o formato esférico cujo diâmetro é $D = 0,82m$, então o raio $r = 0,41m$.

Vamos calcular seu volume da esfera:

$V_E = \frac{4\pi r^3}{3}$ substituindo o valor de pi e do raio, temos:

$V_E = \frac{4x3{,}14x(0{,}41)^3}{3}$

$\Longrightarrow V_E = \frac{0{,}866}{3}$

$V_E = 0,289m^3$

$V_E = 0,289x1000 \Longrightarrow V_E = 289litros$

Vamos calcular a área total do tacho:

$A_t = 4\pi r^2$

$A_t = 4x3,14x(0,41)^2$

$A_t = 2,111m^2$

Fazendo uma análise dos resultados, percebemos que o tacho esférico tem uma área total maior e um volume menor do que o tacho composto por um cilíndro e um hemisfério. Então é mais viável economicamente, na hora de montar uma pequena fábrica, comprar tachos misturadores compostos por um cilíndro e um hemisfério, pois o preço pode ser menor e utilizará mais matéria-prima no processo de produção.

Na Figura 24 estamos vendo um recipiente utilizado para envasar os potes de doce. O doce é colocado dentro do recipiente e um funcionário de forma manual vai controlando a passagem do doce por esse funil até atingir o peso ideal.

Problema 3.7. Qual é a quantidade máxima de doce que pode ser colocado no recipiente?

Observe que o recipiente é formado por um cilindro e por um cone, então basta calcular separadamente o volume de cada um e depois somar os resultados.

Vamos, primeiramente, calcular o volume do cilindro que, depois de medido, apresentou as seguintes dimensões: diâmetro $D = 0,46m$, então o raio é $r = 0,23m$, contorno(perimetro) $C = 1,44m$ e altura $h = 0,3m$.

$V_C = \pi r^2 h$ substituindo o valor da altura e do raio, temos:

$V_C = 3,14x(0,23)^2x0,3$

$V_C = 0,05m^3$

$V_C = 0,05x1000 \Longrightarrow V_C = 50$ litros

Agora vamos calcular o volume do cone que tem raio r = 0,23m e altura $h_1 = 0,07m$:

Figura 24: *Taxo de envasar doce.*

$V_c = \frac{\pi r^2 h_1}{3}$ substituindo a altura 1 e o raio, temos:

$V_c = \frac{3{,}14x(0{,}23)^2x0.07}{3}$

$V_c = \frac{0{,}012}{3}$

$V_c = 0,004m^3$

$V_c = 0,004x1000 \Longrightarrow V_c = 4$litros

Portanto o volume total do recipiente é dado pela relação:

$V_t = V_C + V_c$

$V_t = \pi r^2 h + \frac{\pi r^2 h_1}{3}$ (modelo matemático)

$V_t = 50 + 4 \Longrightarrow V_t = 54$litros

Problema 3.8. Qual foi a quantidade de material utilizado para confeccionar esse recipiente?

Vamos encontrar uma relação que determine a área total do recipiente, que, como já foi dito na situação-problema anterior, é formado por um cilindro sem bases e e por um cone, também sem base.

Como o cilindro não tem bases sua área total é igual a área lateral, então:

$A_t = A_L = 2\pi r h_1$

Como o cone também não tem base, sua área total é igual a área lateral, então:

$A_t = \pi r g$

Então a área total do recipiente é dado soma das duas áreas totais:

$A_t = 2\pi r h_1 + \pi r g$. (modelo matemático)

Mas precisamos calcular o valor de g que é a geratriz do cone.

Analisando a Figura 25, temos:

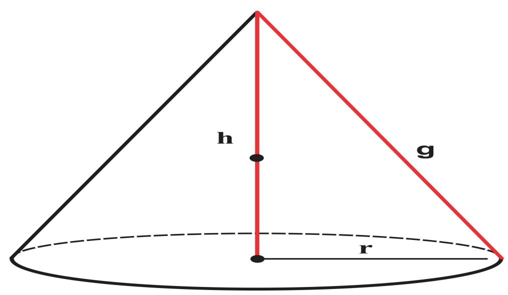

Figura 25: *Cone.*

Como o triângulo é retângulo podemos encontrar a geratriz usando o Teorema de Pitágoras, onde g é a hipotenusa e r e h são os catetos.

$g^2 = r^2 + h^2$(modelo matemático) Como $r = 0,23m$ e $h = 0,07m$, temos que:

$g^2 = (0,23)^2 + (0,07)^2$

$g^2 = 0,0578 \Longrightarrow g = 0,24m$

Calculando a área total do recipiente, pela substituição da geratriz, do raio , da altura e do pi:

$A_t = 2x3,14x(0,23)x0,3 + 3,14x0,23x0,24$

$A_t = 0,433 + 0,173$

$A_t = 0,606m^2$

A Fábrica de Doce Limoeiro fabrica doces de diversos tipos. Lá são produzidos doces de goiaba, caju, banana, leite e muitos outros. O doce, depois de produzido, é envazado em potes de formatos váriados, em barras ou em tabletes. Como já foi dito anteriormente, todos os equipamentos, caixas, potes, barras, tabletes, inclusive o caminhão de transportar a produção, também tiveram suas medidas catalogadas. Seguindo o trabalho, em sala de aula, foram levantadas mais algumas situações vivenciadas pelos alunos quando visitaram a fábrica e que não foram resolvidas por eles naquele momento.

O doce poly, o mais vendido no mercado, é envazado no pote como o da Figura 26, abaixo:

Figura 26: *Pote de doce poly.*

Problema 3.9. Qual é o volume máximo de doce que esse pote pode comportar, sabendo que suas dimensões são: diâmetro maior $D = 14,2cm$, diâmetro menor $d = 12,4cm$, altura $H = 4cm$ e geratriz $g = 4,2cm$?

Analisando o formato desse pote, Figura 28, percebe-se que ele é semelhante a um tronco de cone.

Como o o diâmetro $D = 14,4cm$ e o diâmetro menor $d = 12,6cm$, então raios são respectivamente $R = 7,1cm$ e $r = 6,2cm$.

Existem dois métodos para calular o volume de um troco de cone.

1º método: Usando a fórmula do tronco de cone.

$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R.r)$ substituindo o valor do raio maior e do raio menor, temos:

$V = \frac{3,14x4}{3}\left[(7,1)^2 + (6,2)^2 + (7,1)x(6,2)\right]$

$V = 4,18(50,41 + 38,44 + 44,02)$

$V = 4,18x132,87$

$V = 555,39cm^3$

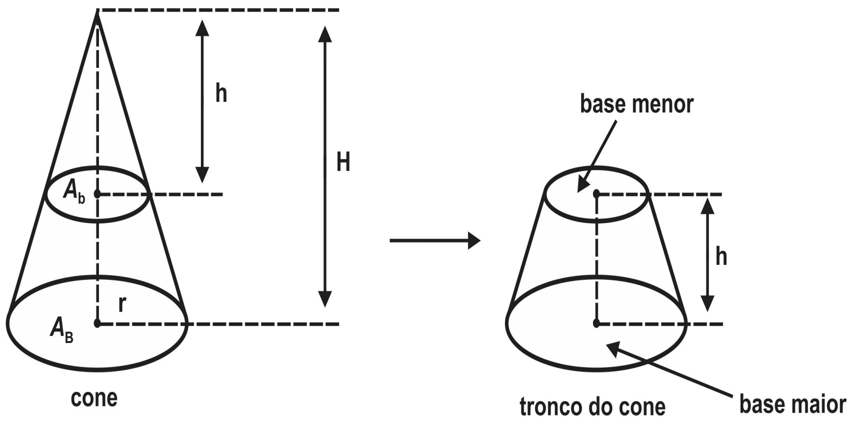

Figura 27: *Cone e tronco de cone.*

Por medidas de segurança e proteção do produto, esses potes são envasados com 500g de doce.

2º método: Sem uso da fórmula do tronco de cone.

Nesse método usaremos somente a fórmula do volume do cone. Calculamos o volume do cone que deu origem ao tronco de cone e o volume do cone que foi retirado e depois subtraímos os resultados.

Vamos usar a nomenclatura da Figura 28. Seja h a altura do cone que foi retirado, r raio da base menor, R raio da base maior e $h + Hcm$ a altura do cone que deu origem ao tronco de cone, como $H = 4cm$, então temos $h + 4cm$.

Usando semelhança de triângulos podemos escrever a relação:

$\frac{h}{h+H} = \frac{r}{R}$ substituindo os raios, temos:

$\frac{h}{h+4} = \frac{6{,}2}{7{,}1}$

$7,1h = 6,2h + 24,8$

$0,9h = 24,8 \Longrightarrow h = 27,55cm$

Podemos calcular o volume do tronco de cone da seguinte forma:

$V_{tronco} = V_{conemaior} - V_{conemenor}$

$V_{tronco} = \frac{\pi R^2(h+4)}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3}$ (modelo matemático)

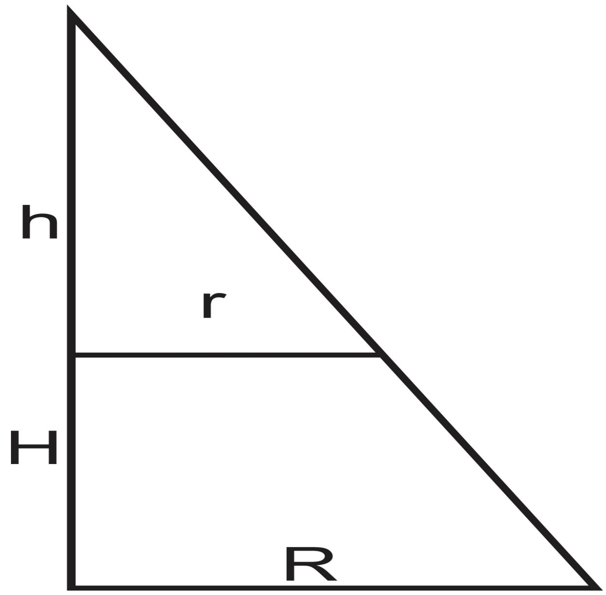

Figura 28: *Triângulo retângulo.*

Substituindo os raios e a altura, temos: $V_{tronco} = \frac{3{,}14x(7{,}1)^2x(27{,}55+4)}{3} - \frac{3{,}14x(6{,}2)^2x27{,}55}{3}$

$V_{tronco} = 1664,65 - 1108,44$

$V_{tronco} = 556,21cm^3$

Observe que os resultados deram praticamente iguais. A diferença se deu pelos arredondamentos e também pelo valor de π que tem infintas casas decimais.

Problema 3.10. Qual foi a quantidade de material usado para confeccionar esse pote em forma de tronco de cone conforme a Figura 29?

Para encontrar a quantidade de material utilizado na confecção desse recipiente, devemos encontrar a área lateral e a área das duas bases e somar os resultados.

Área lateral: $A_L = \pi g(R + r)$

Área da base maior: $A_B = \pi R^2$

Área da base menor: $A_b = \pi r^2$

Área total: $A_T = A_L + A_B + A_b$ substituindo as expressões correspondentes as áreas, temos que:

$A_T = \pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$

$A_T = \pi g(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$(modelo matemático)

Vamos utilizar as dimensões do pote do doce poly, cujo diâmetro maior é $D = 14,2cm$

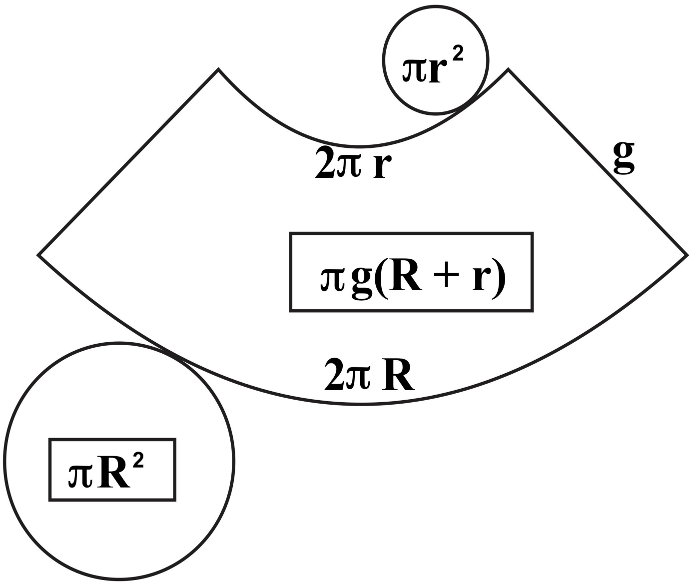

Figura 29: *Planificação do tronco de cone.*

e o diâmetro menor $d = 12,4cm$, então raios são respectivamente $R = 7,1cm$ e $r = 6,2cm$, $h = 4cm$ e $g = 4,2cm$.

$A_T = \pi.4,2(7,1 + 6,2) + \pi\left[(7,1)^2 + (6,2)^2\right]$

$A_T = \pi.4,2(13,3) + \pi(50,41 + 38,44)$

$A_T = 55,86\pi + 88,85\pi$

$A_T = 144,71\pi$

$A_T = 144,71x3,14$

$A_T = 454,39cm^2$

A Figura 30 representa o formato de uma barrinha de doce que é produzida na fábrica e a Figura 31 representa uma das caixas onde são embalados os doces para a comercialização.

Problema 3.11. Qual é o volume ocupado por uma barrinha de doce de goiaba sabendo que suas dimensões são: 5cm de comprimento, 3cm de largura e 0,5cm de altura? Quantas barrinhas como esta cabem dentro de uma caixa que tem 45cm de comprimento, 30cm de largura e 23,5cm de altura?

Analisando o formato de cada um dos sólidos percebemos que eles são paralelepípedos retângulos.

Vamos calcular o volume de cada um, separadamente. Vamos chamar V_B o volume

Figura 30: *Barrinha de doce.*

da barra sendo a, b e c suas dimensões. E V_c o volume da caixa sendo x, y e z suas dimensões.

$V_B = a.b.c$ substituindo as dimensões, temos:

$V_B = 5x3x0,5$

$V_B = 7,5cm^3$

$V_c = x.y.z$

$V_c = 45x30x23,5$

$V_c = 31725cm^3$

Agora para sabermos quantas barrinhas deste doce cabem dentro desta caixa grande, devemos dividir o volume da caixa pelo volume da barrinha:

$\frac{V_c}{V_B} = \frac{31725}{7,5} = 4230$barrinhas.

A fábrica também embala os doces em outras caixas em forma de paralelepípedo retângulo de tamanhos menores, mas os cálculos do volume são feitos de forma semelhantes.

O transporte dos produtos é feito em uma pequena frota de 05 caminhões baú de mesmo formato, mas de tamanhos variados. A Figura 32, mostra um exemplar desta frota, que teve suas dimensões catalogadas pelos alunos da turma.

Problema 3.12. Quantas caixas com o formato e as dimensões da situação-problema 11

Figura 31: *Caixa de embala doce.*

são possíveis de serem colocadas no caminhão baú como o da figura acima sabendo que suas dimensões são: 9,08m de comprimento, 2,60m de largura e 2,58m de altura.

O caminhão, assim como a caixa, também é um paralelepípedo, logo seu volume é dado pela relação $V_B = a.b.c$

Como as dimensões da caixa estão em centímetros, vamos transformar as dimensões do caminhão também para centímetros. Então o comprimento do caminhão será 908cm, a largura 260cm e a altura 258cm.

$V_B = a.b.c$ substituindo as dimensões, temos:

$V_B = 908x260x258$

$V_B = 60908640cm^3$

Agora para saber quantas caixas cabem dentro deste caminhão é só dividir o volume do caminhão baú pelo volume da caixa que é $V_c = 31725cm^3$

$\frac{V_B}{V_c} = \frac{60908640}{31725} = 1919,89$, ou seja, aproximadamente 1920 caixas.

Segundo o administrador da fábrica, eles nunca carregam o baú com o volume máximo, pois o peso das caixas empilhadas, umas sobre as outras, podem danificar o produto durante a viagem.

Problema 3.13. Durante o desenvolvimento das atividades na sala de aula foi proposta a seguinte situação para os alunos.

Figura 32: *Caminhão baú.*

Supondo que o baú deste caminhão estivesse muito velho e balançando demais durante as viagens, e o dono da fábrica resolves colocar uma barra de ferro no interior deste baú ligando os dois pontos mais distantes possíveis, qual o tamanho mínimo da barra que ligariam estes pontos?

A Figura 33 serve de ilustração para esta situação.

De acordo com o conteúdo estudado, percebemos que, para determinarmos o tamanho desta barra de ferro devemos calcular a diagonal BH do paralelepípedo que é dada pela relação:

$d^2 = a^2 + b^2$

$D^2 = c^2 + d^2$

$D^2 = c^2 + a^2 + b^2$

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Sendo a=9,08m, b=2,60m e c=2,58m, logo o tamanho mínimo da barra será:

$D = \sqrt{(9,08)^2 + (2,60)^2 + (2,58)^2}$

$D = \sqrt{82,44 + 6,76 + 6,66}$

$D = \sqrt{95,86} \Longrightarrow D = 9,79m$

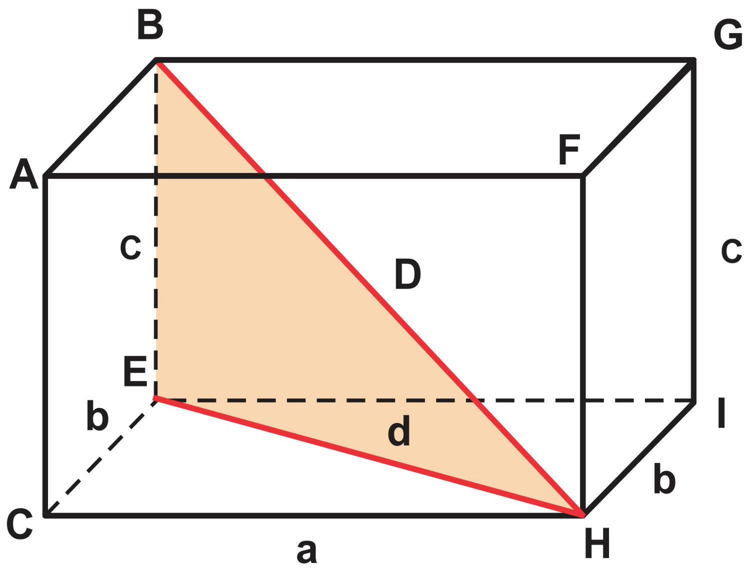

Figura 33: *Paralelepipedo.*

3.4.1 O NÚMERO PI

Depois da realização dos inúmeros cálculos de áreas e volumes dos diversos equipamentos da fábrica em forma de cilíndros, esferas e cones onde foram usadas as várias relações que apareceram o número pi, o aluno Lucas da Costa Araújo, Figura 34, fez a seguinte indagação: Professor, o que é esse Pi que o senhor tanto fala e que eu não sei o que significa?

Então, motivado pela pergunta do aluno, foram feitos vários cálculos em sala de aula mostrando o significado do número pi, usando as medidas dos objetos cilíndricos presentes na fábrica de doce e de outros objetos medidas na própria sala de aula.

Vamos mostrar alguns desses cálculos e fazer algumas considerações a respeito do número pi. A base da pesquisa sobre o pi pode ser encontrada no endereço: `www.mat.ufrgs.br/portosil/aplcom1a.html`

O número PI, corresponde ao valor da razão entre o comprimento(contorno) de qualquer circunferência e seu diâmetro, é a mais antiga constante matemática que se conhece. É também um dos poucos objetos matemáticos que, ao ser mencionado, produz reconhecimento e até mesmo interesse em praticamente qualquer pessoa alfabetizada.

Apesar da antiguidade do nosso conhecimento do PI, ele ainda é fonte de pesquisas em diversas áreas. Com efeito, dentre os objetos matemáticos estudados pelos antigos gregos, há mais de 2 000 anos, Pi é um dos poucos que ainda continua sendo pesquisado: suas

Figura 34: *Aluno Lucas da Costa Araújo.*

propriedades continuam a ser investigadas e procura-se inventar novos e mais poderosos métodos para cálcular seu valor, sendo que a divulgação desses resultados constitui uma das raras ocasiões em que vemos a Matemática atingindo os meios de comunicação de massa.

É dificil dizer quem, pela primeira vez, provou rigorosamente a existência do PI. A mais antiga referência existente de uma demonstração da existência do PI fala de Hippokrates de Chios, 430a.c. escrita pelo filósofo grego Simplicius que viveu quase mil anos depois de Hippokrates. Esse documento diz que Hippokrates demonstrou que a razão entre as áreas de círculos é igual à razão entre os quadrados dos respectivos diâmetros.

Por outro lado, o mais antigo documento ainda existente e que traz demonstração da existência do PI é o livro Elementos de Euclides, escrito em 300a.c. Na proposição 2 do Livro XII dos Elementos, Euclides enuncia e prova que círculos estão um para o outro assim como os quadrados de seus diâmetros, que é o resultado atribuído acima a Hippokrates.

Euclides encerrou o Livro XII de seus Elementos sem tratar da questão da área da esfera. Então coube a Archimedes 250a.c mostrar que a razão entre as áreas de esferas é igual à razão entre os quadrados de seus diâmetros. Mas o mais curioso é que em nenhum dos treze livros dos Elementos, Euclides fala no PI da circunferência.

É certo que o PI é um número irracional com mais de um milhão de casas decimais já descobertas e jamais saberemos seu valor exato. Isso nos leva a algumas indagações: por que não nos contentamos com aproximações práticas do PI? Por que buscamos descobrir mais e mais casas decimais para o PI?

As respostas para essas indagações podem ser diversas, o certo é que no nosso dia a dia, dificilmente precisaremos conhecer uma aproximação melhor do que 3.14, enquanto que a vasta maioria dos calculos científicos não precisa saber mais do que 3.1416 e somente cálculos matemáticos muito exigentes, como o da obtenção de valores muito exatos das funções trigonométricas, precisaria saber mais de 10 dígitos do PI. É certo também que os matemáticos tem um obcessão por situações desafiadoras, e a descoberta de mais casas decimais para o PI não deixa de ser um desafio que dará reconhecimento e fama ao descobridor.

Problema 3.14. Como podemos encontrar o valor numérico do PI?

De posse das medidas feitas pelos alunos na Fábrica de Doce Limoeiro, foram feitos alguns cálculos experimentais para encontrar o valor do π. Como as medidas foram feitas usando material de pouca precisão como régua, os valores obtidos para oπ tiveram algumas variações na parte decimal.

Como foi decrito no texto acima, o valor do PI pode ser determinado pela razão da medida do comprimento(C) da circunferência pela medida do seu diâmetro(D), ou seja, $\frac{C}{D} = \pi$ (modelo matemático)

1. Calculando o π com as medidas do tanque resfriador de leite que tem a forma cilíndrica, cujo diâmetro é D=2,08m e o contorno é C=6,62m, temos que:

   $\frac{C}{D} = \frac{6{,}62}{2{,}08} = 3,1826$

2. Calculando o π usando as medidas do tacho misturador de leite formado por um cilíndro e por um hemisfério, cujo diâmetro é D=0,82m e o contorno é C=2,52m, temos que:

   $\frac{C}{D} = \frac{2{,}52}{0{,}82} = 3,0731$

   De acordo com os resultados obtidos podemos concluir que não importa o tamanho do circunferência, se tomarmos a medida de seu contorno e dividir pela medida de seu diâmetro sempre vamos obter um valor para o π proximo de 3,14. A melhor aproximação se dará quando forem usados instrumentos de medida com um poder de precisão muito grande.

3.4.2 OTIMIZAÇÃO

O termo otimizar significa extrair o melhor rendimento possível de algo, podendo ser uma pessoa, uma máquina, uma empresa, um objeto, etc. É um termo utilizado em várias áreas como informática, engenharia, matemática. O objetivo da otimização é simplificar um sistema para funcionar de forma mais rápida e eficiente, reduzindo o tempo de execução de tarefas. No caso de objetos, buscamos minimizar os custos e maximizar a utilidade. A parte teórica sobre otimização teve como base o conteúdo encontrado no endereço: `www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/.../cap101s4.html` (ver também [10])

Em matemática, principalmente no Cálculo Diferencial e Integral, o termo otimização, refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável. Então, é comum nas empresas, um estudo detalhado da forma dos produtos e das embalagens utilizadas, afim de se obter uma embalagem que utilize o mínimo de material e tenha um volume máximo, assim os gastos seriam diminuidos e consequentemente geraria um lucro maior.

Problema 3.15. De todos os cilindros de volume igual ao do tanque resfriador de leite, qual é o que possui menor área total?

O volume do tanque resfriador de leite foi calculado na situação-problema 2 e seu valor é de aproximadamente 3735 litros. Como devemos calcular o raio e a altura vamos partir das fórmulas do volume e da área total do cilindro para encontrar esses valores.

$V_C = \pi r^2 h$

$\pi r^2 h = 3735$

$h = \frac{3735}{\pi r^2}$ (modelo matemático)

Agora vamos substituir a altura na fórmula da área total do cilindro:

$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi r.\frac{3735}{\pi r^2}$

$A_t = 2\pi r^2 + \frac{7470}{r}$ (modelo matemático)

Devemos determinar o ponto crítico dessa função. Para isso vamos fazer a derivada primeira de $A' = 0$.

$A' = 4\pi r - \frac{7470}{r^2}$

$4\pi r - \frac{7470}{r^2} = 0$

$4\pi r = \frac{7470}{r^2}$

$4\pi r^3 = 7470$

$r = \sqrt[3]{\frac{7470}{4\pi}}$ (modelo matemático)

$r = \sqrt[3]{\frac{7470}{4x3{,}14}}$

$r = 8,41m$

Calculando a altura substituindo o valor do raio encontrado, obtemos:

$h = \frac{3735}{\pi r^2}$.

$h = \frac{3735}{3{,}14x(8{,}41)^2}$

$h = \frac{3735}{3{,}14x70{,}72}$

$\Longrightarrow h = \frac{3735}{222{,}06} \Longrightarrow h = 16,81m$

Analisando o valor do raio e o valor da altura percebemos que a altura corresponde ao dobro do raio. Logo o cilindro de medidas ideais é o cilindro equilátero que tem a altura igual ao diâmetro da base, ou seja, h=2r.

Na situação acima determinamos as medidas do raio e da altura usando um volume pré-determinado, agora vamos generalizar para qualquer volume.

$V_C = \pi r^2 h$

$\pi r^2 h = V$

$h = \frac{V}{\pi r^2}$ (modelo matemático)

Agora vamos substituir a altura na fórmula da área total do cilindro:

$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi r.\frac{V}{\pi r^2}$

$A_t = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$ (modelo matemático)

Vamos determinar o ponto crítico dessa função. Para isso vamos fazer a derivada primeira de $A' = 0$.

$A' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$

$4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$

$4\pi r = \frac{2V}{r^2}$

$2V = 4\pi r^3$

$V = 2\pi r^3$

$r^3 = \frac{V}{2\pi}$

$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Mas como o volume do cilíndro é dado por $V = \pi r^2 h$, temos que:

$\pi r^2 h = 2\pi r^3$ cancelado π

$r^2 h = 2r^3$

$h = \frac{2r^3}{r^2}$

$h = 2r$

$h = 2.\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

$h = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}}$

$h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

Depois da generalização percebemos que a altura corresponde ao dobro do raio, logo o cilíndro equilátero é o que têm medidas ideais que maximiza o volume e minimiza a área total.

Vamos generalizar para um tanque cilíndrico sem tampa.

$V_C = \pi r^2 h$

$\pi r^2 h = V$

$h = \frac{V}{\pi r^2}$ (modelo matemático)

Agora vamos substituir a altura na fórmula da área total do cilíndro:

$A_t = \pi r^2 + 2\pi r h$

$A_t = \pi r^2 + 2\pi r.\frac{V}{\pi r^2}$

$A_t = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$ (modelo matemático)

Vamos determinar o ponto crítico dessa função. Para isso vamos fazer a derivada primeira de $A' = 0$.

$A' = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}$

$2\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$

$2\pi r = \frac{2V}{r^2}$

$2V = 2\pi r^3$

$V = \pi r^3$

$r^3 = \frac{V}{\pi}$

$r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

Mas como o volume do cilíndro é dado por $V = \pi r^2 h$, temos que:

$\pi r^2 h = \pi r^3$ cancelado π

$r^2 h = r^3$

$h = \frac{r^3}{r^2} \Longrightarrow h = r$

Então, se o tanque cilíndrico não tem tampa, para que ele tenha volume máximo e gaste o mínimo de material para ser construído, sua altura deve ser igual ao raio.

Também é possível fazer a otimização das medidas de alguns objetos usando função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$. Esta aplicação está relacionada com a questão de máximos e mínimos. Dependendo do sinal do termo a, a função terá um ponto de máximo ou um ponto de mínimo. Em ambos os casos, tal ponto é denominado de vértice da parábola. A abscissa do vértice de uma parábola é o ponto médio entre as suas raízes, por conta da simetria vertical que a parábola possui. Dessa forma, como a soma das raízes de uma equação do segundo grau é dada por $S = \frac{-b}{a}$, a abscissa do vértice da parábola será dada pela fórmula: $x_v = \frac{-b}{2a}$ Calculando o valor numérico de $f(x_v)$, teremos a ordenada do vértice, que corresponde ao valor máximo ou valor mínimo dessa função (dependendo da concavidade da parábola).

Problema 3.16. Vamos exemplificar os argumentos acima procurando a forma ideal para uma caixa de base quadrada, isto é, a caixa que utiliza o mínimo de material para um máximo de aproveitamento.

Vamos supor que uma empresa fabricante de caixas de papelão, dispõe de um estoque de folhas na forma quadrada, Figura 35 medindo 24cm de lado. Qual deve ser a altura da caixa sem tampa, quando dobrar, para que o volume seja máximo?

Vamos encontrar o modelo matemático que determina o volume da caixa em função

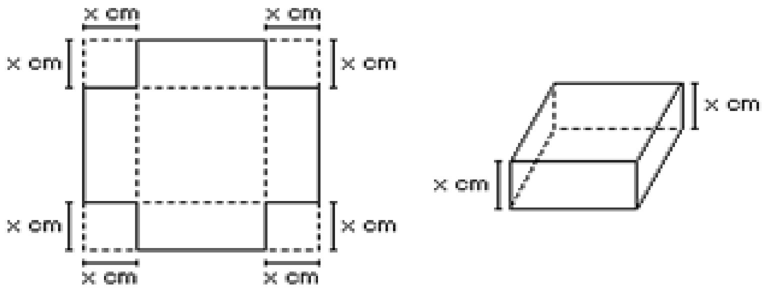

Figura 35: *Caixa sem tampa.*

da altura.

V=área da base X altura Sabendo que as dimensões da caixa são: $24 - x, 24 - x$ e x, temos que:

$V = (24 - 2x)(24 - 2x).x$ onde 0<x<12

$V = (576 - 96x + 4x^2).x$

$V = 4x^3 - 96x^2 + 576x$

Vamos determinar os pontos críticos dessa função, que correspondem as raízes da equação quando a derivada primeira de V for igual a zero, ou seja, $V' = 0$.

Derivando $V = 4x^3 - 96x^2 + 576x$, temos que:

$V' = 12x^2 - 192x + 576$

Fazendo $V' = 0$, temos que:

$12x^2 - 192x + 576 = 0$

$x^2 - 16x + 48 = 0$

$\Delta = (-16)^2 - 4.1.48$

$\Delta = 256 - 192$

$\Delta = 64$

$x = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{2.1}$

$x = \frac{16 \pm 8}{2.}$

$x_1 = 12$ e $x_2 = 4$

Como 0<x<12 então $x_1 = 12$ não serve, logo o único valor para a altura é $x_2 = 4$.

Portanto as dimensões ideais da caixa são: altura 4cm, largura 16cm e comprimento 16cm, logo seu volume será:

$V = 16x16x4 \Longrightarrow V = 1024cm^3$

Problema 3.17. De acordo com as etapas da modelagem matemática vamos generalizar a situação para um quadrado de lado y e altura x quaisquer:

V=área da base X altura Sabendo que as dimensões da caixa são: $y - 2x, y - 2x$ e x, temos que:

$V = (y - 2x)(y - 2x).x$ onde $0 < x < \frac{y}{2}$

$V = (y^2 - 4yx + 4x^2)x$

$V = 4x^3 - 4yx^2 + y^2x$

Vamos determinar o pontos críticos dessa função que são as raízes da equação quando a derivada primeira de V for igual a zero, ou seja, $V' = 0$.

Derivando $V = 4x^3 - 4yx^2 + y^2x$ temos que:

$V' = 12x^2 - 8yx + y^2$

Fazendo $V' = 0$, temos que:

$12x^2 - 8yx + y^2 = 0$

$\Delta = (-8y)^2 - 4.12.y^2$

$\Delta = 64y^2 - 48y^2 \Longrightarrow \Delta = 16y^2$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \frac{8y \pm \sqrt{16y^2}}{2.12}$

$x = \frac{8y \pm 4y}{24}$

$x_1 = \frac{12y}{24} = \frac{y}{2}$ e

$x_2 = \frac{4y}{24} = \frac{y}{6}$

Como $0 < x < \frac{y}{2}$ então $x_1 = \frac{y}{2}$ não serve, logo o único valor para a altura é $x_2 = \frac{y}{6}$.

Portanto as dimensões ideais da caixa são:

Altura(a): $\frac{y}{6}$cm,

largura(b): $y - 2x = y - \frac{2y}{6} = \frac{4y}{6} = \frac{2y}{3}$cm

Comprimento(c): $y - 2x = y - \frac{2y}{6} = \frac{4y}{6} = \frac{2y}{3}$cm,

Logo seu volume será:

$V = a.b.c$

$V = \frac{y}{6}.\frac{2y}{3}.\frac{2y}{3}$

$V = \frac{4y^3}{54}$

$V = \frac{2y^3}{27}cm^3$(modelo matemático)

Na situação-problema 16 usamos $y = 24cm$. Aplicando direto no modelo matemático acima temos que:

$V = \frac{2(24)^3}{27}$

$V = \frac{2.(13824)}{27}$

$V = \frac{27648}{27} = 1024cm^3$

Observe que os resultados encontrados foram exatamente iguais, logo, o modelo matemático obtido, pode ser usado para determinar as dimensões ideais de uma caixa de base quadrada de lados quaisquer.

Problema 3.18. Vamos supor que a mesma empresa fabricante de caixas de papelão, dispõe de um estoque de folhas na forma quadrada, medindo 24cm de lado. Qual deve ser a altura da caixa com tampa, quando dobrar, para que o volume seja máximo? (Observe sua ilustração planificada na Figura 36)

Sabendo que as dimensões da caixa são: $24 - 2x, 12 - x$ e x, temos que:

$V = (24 - 2x)(12 - x).x$

$V = (288 - 24x - 24x + 2x^2).x$

$V = 2x^3 - 48x^2 + 288x$

Vamos determinar os pontos críticos dessa função, que correspondem as raízes da equação quando a derivada primeira de V for igual a zero, ou seja, $V' = 0$.

Derivando $V = 2x^3 - 48x^2 + 288x$, temos que:

$V' = 6x^2 - 96x + 288$

Fazendo $V' = 0$, temos que:

$6x^2 - 96x + 288 = 0$

$x^2 - 16x + 48 = 0$

$\Delta = 64$

$x_1 = 12$ e $x_2 = 4$ como 0<x<12 então $x_1 = 12$ não serve, logo o único valor para a altura é $x_2 = 4$.

Portanto as dimensões ideais da caixa com tampa são: altura 4cm, largura 8cm e comprimento 16cm, logo seu volume será:

$V = 16x8x4 \Longrightarrow V = 512cm^3$

Seguindo as as etapas da modelagem matemática vamos generalizar a situação para um quadrado de lado y e altura x quaisquer:

V=área da base X altura

$V = (\frac{y}{2} - x)(y - 2x).x$ onde $0 < x < \frac{y}{2}$

$V = (\frac{y^2}{2} - yx - \frac{2yx}{2} + 2x^2)x$

$V = 2x^3 - yx^2 - yx^2 + \frac{y^2x}{2}$

$V = 2x^3 - 2yx^2 + \frac{y^2x}{2}$

Vamos determinar o pontos críticos dessa função que são as raízes da equação quando a derivada primeira de V for igual a zero, ou seja, $V' = 0$.

Derivando $V = 2x^3 - 2yx^2 + \frac{y^2x}{2}$ temos que:

$V' = 6x^2 - 4yx + \frac{y^2}{2}$

Fazendo $V' = 0$, temos que:

$6x^2 - 4yx + \frac{y^2}{2} = 0$

$\Delta = (-4y)^2 - 4.6.\frac{y^2}{2}$

$\Delta = 16y^2 - 12y^2 \Longrightarrow \Delta = 4y^2$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \frac{4y \pm \sqrt{4y^2}}{2.6}$

$x = \frac{4y \pm 2y}{12}$

$x_1 = \frac{6y}{12} = \frac{y}{2}$ e

$x_2 = \frac{2y}{12} = \frac{y}{6}$

Como $0 < x < \frac{y}{2}$ então $x_1 = \frac{y}{2}$ não serve, logo o único valor para a altura é $x_2 = \frac{y}{6}$.

Portanto as dimensões ideais da caixa são:

Altura(a): $\frac{y}{6}$cm,

largura(b): $y - 2x = y - \frac{2y}{6} = \frac{4y}{6} = \frac{2y}{3}$cm

Comprimento(c): $\frac{y}{2} - x = \frac{y}{2} - \frac{y}{6} = \frac{2y}{6} = \frac{y}{3}$cm,

Logo seu volume será:

$V = a.b.c$

$V = \frac{y}{6}.\frac{2y}{3}.\frac{y}{3}$

$V = \frac{2y^3}{54}$

$V = \frac{y^3}{27}cm^3$(modelo matemático)

Na situação-problema 16, usamos y=24cm. Aplicando esse valor diretamente no modelo matemático acima temos que:

$V = \frac{24^3}{27}$

$V = \frac{13824}{27}$

$V = 512cm^3$

Observe que os resultados encontrados foram exatamente iguais, logo, o modelo matemático obtido, pode ser usado para determinar as dimensões ideais de uma caixa de base quadrada de lados quaisquer.

Problema 3.19. Vamos generalizar agora para uma caixa com tampa, Figura 36, confeccionada com uma folha de papel retangular, cujas dimensões são A e B.

Sabendo que o volume da caixa é dado pela relação:

$V = a.b.x$

$b + 2x = B \Longrightarrow b = B - 2x$

$2x + 2a = A \Longrightarrow a = \frac{A-2x}{2}$ temos que:

$V = (B - 2x)(\frac{A-2x}{2})x$

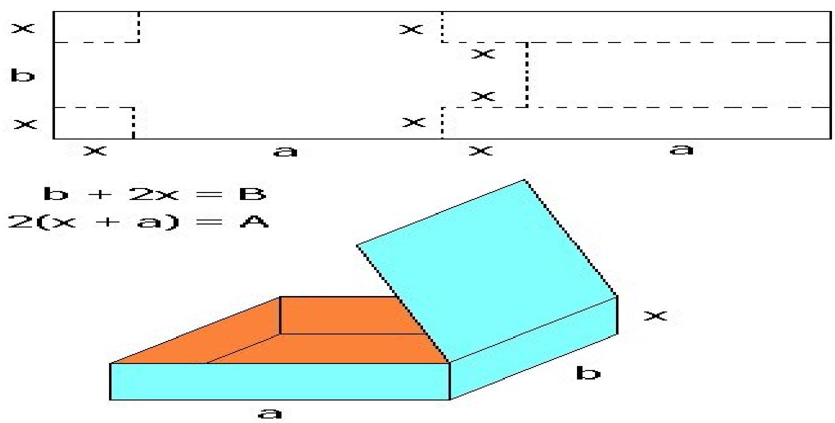

Figura 36: *Caixa com tampa.*

$V = \frac{(AB-2Bx-2Ax+4x^2)x}{2}$

$V = \frac{ABx-2x^2(A+B)+4x^3}{2}$

Vamos determinar o pontos críticos dessa função que são as raízes da equação quando a derivada primeira de V for igual a zero, ou seja, $V' = 0$.

$V' = \frac{12x^3-4(A+B)x+AB}{2}$

$\frac{12x^3-4(A+B)x+AB}{2} = 0$

$12x^3 - 4(A+B)x + AB = 0$

$\Delta = [(-4A-4B)^2 - 4.12.AB]$

$\Delta = 16A^2 + 32AB + 16B^2 - 48AB$

$\Delta = 16A^2 - 16AB + 16B^2$

$\Delta = 16(A^2 - AB + B^2)$

$x = \frac{4(A+B)\pm\sqrt{16(A^2-AB+B^2)}}{2.12}$

$x = \frac{4(A+B)\pm4\sqrt{A^2-AB+B^2}}{24}$

$x = \frac{A+B\pm\sqrt{A^2-AB+B^2}}{6}$

$x_1 = \frac{A+B+\sqrt{A^2-AB+B^2}}{6}$ não serve pois é maior que $b = B-2x$, logo $x_2 = \frac{A+B-\sqrt{A^2-AB+B^2}}{6}$ é o único valor admitido como solução.

Fazendo A=20cm e B= 12cm, temos que as dimensões a, b e x da caixa são:

$x = \frac{20+12-\sqrt{20^2-20.12+12^2}}{6}$

$x = \frac{32-\sqrt{400-240+144}}{6}$

$x = \frac{32-\sqrt{304}}{6}$

$x = \frac{32-17,44}{6}$

$x = \frac{14,56}{6}$

$x = 2,42cm$

Então:

$b = 12 - 2(2,42) = 7,16cm$

$a = \frac{20-2(2,42)}{2}$

$a = \frac{20-4,84}{2} = 7,58cm$

Portanto o volume será $V = (2,42).(7,16).(7,58) \Longrightarrow V = 131,34cm^3$

Durante as explicações, houveram muitas indagações sobre o porque da utilização do prisma de base quadrada e não de um prisma de base quadrangular qualquer. Em cima dessas indagações foi proposta outra situação-problema.

Problema 3.20. Dentre os prismas de mesma altura, cuja base é quadrangular, e tem o mesmo perímetro, qual é o que tem o maior volume?

Vamos calcular o perímetro do retângulo de lados x e y:

$2p = 2x + 2y$

$x + y = p$

$y = p - x$

Agora vamos calcular a área desse retângulo:

$A = x.y$ substituindo y por seu respectivo valor temos:

$A = x(p - x)$

$A = -x^2 + px$ (modelo matemático)

Observe que obtivemos uma função quadrática em que o coeficiente de x^2é negativo, logo se construirmos o gráfico desta função ela será uma parábola de concavidade voltada para baixo, então essa função admite um ponto de máximo que corresponde a coordenada de "a" no vértice da parábola(x_v) . A coordenada de x_v é dada pela relação:

$x_v = \frac{-b}{2a}$ como a = -1 e b = p.

$x_v = \frac{-p}{2(-1)}$

$x = \frac{p}{2}$ mas p = x + y

$x = \frac{x+y}{2}$

$2x = x + y$

$2x - x = y \Longrightarrow x = y$

Como $x = y$, todos os lados do retângulo são iguais, logo esse retângulo é do tipo quadrado. Portanto o prisma de base quadrada é o que apresenta o maior volume dentre os todos os prismas de mesma altura e mesmo perímetro e o que utiliza o mínimo de material para ser confeccionado.

Podemos otimizar as medidas de um objeto, usando a desigualdade das médias, conteúdo estudado no 1º ano do ensino médio. Para isso vamos utilizar as médias aritmética e geométrica entre dois números reais quaisquer positivos, pois estamos trabalhando com medidas. Podemos encontrar referências sobre médias no endereço: `http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/maxmin/mm04.htm`

A média aritmética entre dois números reais positivos x e y, é definida por: $M_A = \frac{x+y}{2}$. Já a média geométrica entre x e y, é definida como a raiz quadrada do produto de x por y, isto é, $M_G = \sqrt{xy}$.

A média aritmética é uma tentativa de minimizar as relações entre duas medidas e a média geométrica oferece o maior produto possível entre duas medidas dadas. Ela é bastante usada em construções geométricas.

Em geral a média aritmética é maior ou igual a média geométrica entre os números x e y. A igual é verificada quando os números são iguais, ou seja, x = y.

Exemple 3.1. Sejam os números x= 4 e y=9, qual é a média aritmética e a geométrica entre esses números? Quem é maior?

$M_A = \frac{4+9}{2}$

$M_A = \frac{13}{2} = 6,5$

$M_G = \sqrt{4.9}$

$M_G = \sqrt{36} = 6$

Como $x \neq y$ temos que a média é a aritmética é maior que a média geométrica.

Exemple 3.2. Sejam os números x= 6 e y=6, qual é a média aritmética e a geométrica entre esses números? Quem é maior?

$M_A = \frac{6+6}{2}$

$M_A = \frac{12}{2} = 6$

$M_G = \sqrt{6.6}$

$M_G = \sqrt{36} = 6$

Como $x = y$ temos que, a média é a aritmética é igual a média geométrica.

A desigualdade entre as médias aritméticas e geométricas garante uma certa dualidade entre o produto e a soma de duas medidas x e y, ou seja, dentre todos os produtos de x por y, o produto máximo ocorre quando $x = y$ e a soma é mínima quando $x = y$.

A seguir vamos fazer a demonstração da desigualdade das médias $M_A \geq M_G \Longrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Lembrando que essa demonstração não foi realizada com os alunos do 2º ano, agentes da pesquisa.

Demonstração. Dados dois números reais x e y, sendo que x>0 e y>0, temos que:

$(x-y)^2 \geq 0$

$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, como artifício, vamos somar 4xy aos membros da desigualdade.

$x^2 - 2xy + 4xy + y^2 \geq 0 + 4xy$

$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$

$(x+y)^2 \geq 4xy$

$\frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$, como a função raiz quadrada para $x \geq 0$ é crescente, podemos extrair a raiz quadrada em ambos os membros dessa desigualdade, para obter:

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$,

Portanto $M_A \geq M_G$ □

Voltando ao Problema 3.20, recordando seu enunciado "'Dentre os prismas de mesma altura, cuja base é quadrangular, e tem o mesmo perímetro, qual é o que tem o maior volume?"' e resolvendo pelas desigualdades das médias.

Sejam x e y as medidas dos lados do retângulo.

Vamos resolver essa situação pela desiguladade das médias artméticas e geométricas.

$M_A \geq M_G$

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$

Para que tenhamos um volume máximo, sabendo que o perímetro é fixo, as medidas de x e y devem ser iguais, isto é, x=y e as médias serão iguais também.

$x + x = 2\sqrt{x.x}$

$2x = 2\sqrt{x^2}$

$2x = 2x$

$x = x$

Portanto o prisma de base quadrada é o que apresenta o maior volume dentre os todos os prismas de mesma altura e mesmo perímetro e o que utiliza o mínimo de material para ser confeccionado.

3.5 FORMA EMPÍRICA DE CALCULAR VOLUMES

Durante a visita à Fábrica de Doce Limoeiro onde desenvolvemos nossa pesquisa, mantivemos diálogo com o administrador, funcionários, e o pai do administrador que aparece fazendo medições nos equipamentos junto com os alunos. Durante essas conversas veio a ideia de saber o conhecimento deles a respeito da forma e da quantidade de material (doce e leite) que cabe dentro de cada recipiente e como eles calculavam esse valor.

Segundo os relatos, recipientes esféricos e cilindricos são facilmente identificados por eles, já os demais sólidos como cone e tronco de cone, mais raros, não sabiam como se chamavam.

Quando interrogados a respeito de como eles calculavam o volume dos recipientes, todos foram unânimes em responder que hoje não é mais necessário fazer isso por que a fábrica está mais moderna que antes e todos os equipamentos já vem com seu volume indicado quando é comprado inclusive os potes onde são envasados os doces. Mas insistimos em perguntar como era feito antes da fábrica se modernizar.

Alguns funcionários são antigos, desde a fundação eles trabalham lá, inclusive o pai do administrador e atual dono. Só assim foi possível obter essas informações. Observamos que muitos dos cálculos que eles faziam, eles mesmos não sabiam como explicar, mas de certa forma funciona. O mais interessante é que essa maneira de calcular o volume dos cilindros, esferas e cones desenvolvidas por eles, sem uso de fórmulas propriamente ditas é possível encontrar valores bem próximo do real.

Então, motivados por esse fato, fizemos alguns questionamentos aos empregados para saber como eles faziam esses cálculos.

Problema 3.21. Como vocês fazem para calcular a quantidade de doce ou leite que cabe ou está dentro de um recipiente como este, de forma cilindrica?

RESPOSTA:

Muitos de nós já trabalhou em contrução civil e sabemos como calcular a área de um quadrado, medimos dois lados e multiplicamos seus valores. Fazemos o mesmo com o cilíndro, medimos a parte superior(diâmetro) e multiplicamos por ele mesmo, depois vemos qual a altura do doce ou do leite e multiplicamos por esse valor, é assim que encontramos a quantidade de material dentro do recipiente cilindrico.

MODELO MATEMÁTICO

$V = D.D.h$ como $D = 2r$, temos que:

$V = 2r.2r.h$

$V = 4r^2h$

MARGEM DE ERRO(ME)

Como a fórmula para calcular o volume do cilíndro é dado pela relação $V = \pi r^2 h$ e $\pi = 3,14$ percebemos que vai haver uma diferença nos resultados. Vamos determinar a margem de erro dessa maneira empírica de calcular o volume usada pelos empregados da fábrica.

Usando regra de três simples, temos que:

$\pi r^2 h \longrightarrow 100\%$

$4r^2 h \longrightarrow x$

$\frac{\pi r^2 h}{4r^2 h} = \frac{100}{x}$, dividindo por πr^2 , temos:

$\frac{\pi}{4} = \frac{100}{x}$

$\pi x = 400$

$x = \frac{400}{3{,}14}$

$x = 127,38\%$

$ME = 127,38 - 100\% = 27,38\%$

Problema 3.22. Se o tanque, ao invés de ser cilindrico, fosse em forma de esfera, como vocês calculariam o volume?

RESPOSTA:

Isso é bem complicado e demorou bastante tempo pra gente perceber que na maneira que nós calculavamos haviam um erro muito grande. Nós calculavamos baseados numa caixa, todos aqui tem a ideia de como é calculado o volume de uma caixa, medimos o comprimento, a largura e a altura e multiplicamos os resultados. Então pensamos assim, medimos a largura(diâmetro) e multiplicamos os seu valor por ele mesmo três vezes assim como a caixa, ou seja, diâmetro vezes diâmetro vezes diâmetro. Mas quando a gente ia envazar esse doce percebiamos que a quantidade era muito maior do que o imaginado era quase o dobro, então percebemos que havia um erro, logo passamos a multiplicar o diâmetro pelo diâmetro e pela a metade do diâmetro, então passamos a encontrar um valor bem próximo do real.

MODELO MATEMÁTICO

$V = D.D.\frac{D}{2}$ como o $D = 2r$ temos que:

$V = 2r.2r.r$

$V = 4r^3$

MARGEM DE ERRO (ME):

Como o volume da esfera é dado pela relação $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, temos que a margem de erro pode ser calculada da seguinte forma:

Usando regra de três simples, temos que:

$\frac{4\pi r^3}{3} \longrightarrow 100\%$

$4r^3 \longrightarrow x$

$\frac{\frac{4\pi r^3}{3}}{4r^3} = \frac{100}{x}$

$\frac{4\pi r^3 x}{3} = 400r^3$, dividindo por r^3, temos:

$4\pi x = 1200$

$x = \frac{1200}{4.3,14}$

$x = \frac{1200}{12,56}$

$x = 95,54\%$

$ME = 95,54 - 100\% = -4,46\%$

Problema 3.23. Como é possível calcular o volume de um recipiente em forma de cone?

RESPOSTA:

Nenhum empregado e também adminstrador da fábrica soube dizer como calcular o volume desse sólido. Para que a pergunta não ficase sem resposta, desenvolvi uma maneira de calcular esse volume baseado nos modelos anteriores.

Primeiro calculamos o diâmetro e a altura, depois multiplicamos a metade do diâmetro pela metade do diâmetro e pela altura, então obtivemos o valor aproximado do volume do cone.

MODELO MATEMÁTICO

$V = \frac{D}{2}.\frac{D}{2}.h$ como $D = 2r$, então $\frac{D}{2} = r$

$V = r.r.h$

$V = r^2.h$

MARGEM DE ERRO (ME):

Como o volume de um cone é dado pela relação $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ temos que a margem de erro pode ser calculada da seguinte forma:

Usando regra de três simples, temos que:

$\frac{\pi r^2 h}{3} \longrightarrow 100\%$

$r^2 h \longrightarrow x$

$\frac{\frac{\pi r^2 h}{3}}{r^2 h} = \frac{100}{x}$

$\frac{\pi r^2 h x}{3} = 100 r^2 h$, dividindo por $r^2.h$, temos:

$\pi x = 300$

$x = \frac{300}{3,14}$

$x = 95,54\%$

$ME = 95,54 - 100\% = -4,46\%$

3.6 OFICINA DE CONSTRUÇÃO DE MAQUETES

Nessa atividade, cada grupo recebeu uma foto de um dos equipamentos da fábrica de doce e foi proposto que confeccionassem uma maquete e uma planificação desta, para facilitar a visualização dos elementos no momento das apresentações. As equipes analisaram as fotos, e escolheram o melhor sólido usando como critérios a afinidade e o conhecimento prévio de cada equipamento. Essa metodologia vai de encontro ao princípio básico da etnomatemática, referendada na fundamentação teórica. Nessa etapa, o professor deu ampla liberdade às equipes e sugeriu que usassem a criatividade e escolhessem o melhor material. Foram agendados horários no Laboratório de Matemática para que cada grupo se reunisse com o professor com o objetivo de tirar qualquer dúvida que surgisse. Além disso, eles se reuniram em horário extra-classe, nas casas dos componentes de cada grupo. Vale ressaltar o engajamento dos membros das equipes, que se sentiram motivados para realização do trabalho. O objetivo desta atividade foi proporcionar o desenvolvimento da percepção tridimensional dos objetos construídos, oferecendo aos estudantes um recurso didático poderoso e relativamente simples de se construir. Outro objetivo foi utilizar o material concreto como forma de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, mostrando que a Geometria Espacial pode ser trabalhada de maneira construtiva, atrativa e motivadora. Foi solicitado, no desenvolvimento das apresentações, que os grupos teriam que manipular a maquete pronta e também a planificação, fazendo as medidas dos elementos necessários, além disso, elaborar uma ou duas situações-problemas, do cotidiano deles, referentes ao equipamento escolhido e resolvê-las no quadro para o professor e os demais alunos da turma. Assim, eles estariam aplicando o princípio básico da modelagem matemática, proposto no referencial teórico.

O grupo 01 se propôs a construir a maquete de um tanque cilíndrico, Figura 37, que é um equipamento utilizado para armazenar, resfriar e conservar o leite.

Como mostra a figura acima, o grupo cumpriu as etapas iniciais propostas no trabalho, a construção da maquete e a planificação. Também apresentaram duas situações-problemas relacionados ao sólido em questão, a saber: Qual foi a quantidade de papel utilizado para confeccionar a maquete e qual o volume máximo ocupado por ele no espaço?

Para iniciar, a equipe saudou o professor e os demais alunos com um bom dia bem

Figura 37: *Grupo apresentando "‘Maquete de um tanque cilíndrico".*

caloroso, disseram seus respectivos nomes: Igor, Natália, Paulo, Williane e Erley. Em seguida, fizeram uma breve apresentação do sólido que escolheram para confeccionar a maquete, destacando o formato da base e da área lateral, falaram dos objetivos que iriam alcançar, e relembraram as fórmulas da área total e do volume que já haviam estudado em aulas anteriores e que iriam aplicar. Para resolver os questionamentos propostos, os alunos mediram ,com regua, a altura e o diâmetro da maquete, dividiram esse valor ao meio e chegaram ao raio do cilíndro. Em seguida, aplicaram diretamente os resultados nas fórmulas da área total e do volume do cilíndro, determinando então a quantidade de papel e volume ocupado pelao tanque cilíndrico.

De acordo com o relatório escrito, eles declararam que no início da apresentação houve um certo nervosismo por parte dos integrantes do grupo, mas que durante o desenvolvimento e resolução das questões o controle emocional foi se estabelecendo, por que estavam seguros do que faziam. Essa segurança foi um dos pontos positivos destacados por eles, pois a construção da maquete proporcionou uma apropriação maior do conhecimento, já que foram eles os realizadores de todo processo, contrução, medição e cálculos das questões propostas. Para enriquecer mais a apresentação, o professor propôs que eles calculassem a área total do cilíndro de outra maneira, sem usar diretamente a fórmula. No início eles ficaram meio apreensivos, mas como estavam dominando bem o conteúdo, desidiram calcular as áreas das bases e a área lateral separadamente e depois somaram os resultados. O professor sugeriu ainda que eles medissem o contorno do cilíndro com um barbante e multiplicassem o resultado pela a altura. Pois, na planificação da maquete, a área lateral do cilíndro corresponde a área de um retângulo de lados consecutivos, equivalentes a altura e ao perímetro da base circular. O resultado deu aproximado, a princípio a equipe achou que estava errado, mas o professor explicou que a diferença no resultado é devido a imprecisão na medida do contorno. Para encerrar, eles agradeceram a colaboração de todos e foram saudados com palmas.

Figura 38: *Grupo apresentando a "'Maquete de um tronco de cone".*

O grupo 02 se propôs a construiu a maquete de um pote usado para envasar doce, Figura 38, que tem a forma de um tronco de cone.

O referido grupo também cumpriu as etapas iniciais propostas no trabalho, contruíram a maquete e fizeram a planificação. Propuseram duas questões, a saber: Qual o volume ocupado por esse pote e qual a quantidade de papel utilizado para confeccionar essa maquete?

A equipe inciou a apresentação seguindo a mesma linha do grupo 01, saudou o professor e os demais alunos da turma com um bom dia. Disseram seus respectivos nomes: Jarlan, José Alyson, Alysson Rafael, Dara Nádila, Ana Maria e Léia. Dando continuidade, falaram dos elementos que compõem o sólido, destacando o formato das bases, que, diferentemente do cilíndro, tem tamanhos diferentes e ressaltaram que o cilíndro é um caso particular do cone. Mostraram diretamente na maquete o raio, o diâmetro, a altura e a geratriz. Reforçaram também que o tronco de cone pode ser conseguido, seccionando um cone e retirando a parte superior que é um cone menor do que o original, essa é a etapa da interação. Falaram também dos obetivos que queriam alcançar e destacaram no quadro as fórmulas que iriam utilizar, essa etapa corresponde ao modelo matemático. Em seguida, determinaram com régua a medida do diâmetro de cada base e, consequentemente, os raios, mediram também a altura e a geratriz. De posse desses valores calcularam a área total e o volume da maquete, essa etapa corresponde a matematização. Assim, como o primeiro grupo, a sequência das etapas foram: interação, modelo matemático e matematização. O professor perguntou se a equipe sabia como calcular o volume da maquete de outra forma, sem usar a fórmula propriamente dita; eles responderam que não. Então a pergunta foi direcionada para os demais alunos e também ninguém soube dizer como calcular. Somente um aluno sugeriu que, como o tronco de cone é originado de um cone, se soubéssemos a altura desse cone maior e onde ele foi cortado talvez desse para calcular o volume da maquete. Nesse momento, o professor interferiu para parabenizar o aluno pela colocação e esclareceu que era possível determinar essa altura utilizando as medidas obtidas, depois calcular o volume do cone original e do cone seccionado e, finalmente, subtraíndo os resultados encontraríamos o volume do tronco de cone. O professor ainda destacou que esses cálculos já tinham sido realizados durante a etapa da resolução das situações-problemas. Os alunos pediram que o professor fizesse os cálculos novamente, para que eles compreendessem melhor, então o professor deu sua contribuição para o enriquecimento do trabalho da equipe e ampliar o conhecimento de todos.

Figura 39: *Grupo que apresentou a "'Maquete de um caminhão baú".*

O grupo 3 construiu a maquete de um caminhão baú, Figura 39, usado no transporte da produção.

Assim como os demais grupos, eles iniciaram a apresentação dando um bom dia a todos e dizendo seus respectivos nomes: Raimundo Júnior, Lucas, Thainara e Talmo. Seguiram a apresentação mostrando a maquete e a planificação do caminhão e fazendo uma relação entre o objeto em estudo e o paralelepípedo. Destacaram o formato das faces, que são retangulares, em número de seis e iguais duas a duas (interação). Fizeram uma exposição dos objetivos que queriam alcançar na execução deste trabalho e apresentaram os dois questionamentos que pretendiam resolver, a saber: Qual a quantidade de papelão utilizado na confecção dessa maquete e o volume ocupado por ela (matematização).

Dando continuidade ao desenvolvimento da apresentação, os alunos fizeram as medições do comprimento, da altura e largura da maquete usando para isso uma régua. De posse das medidas, eles partiram para a resolução das situações-problemas, mas, antes, fizeram uma breve explanação sobre o conteúdo estudado dando destaque as fórmulas do volume e da área total do paralelepípedo (modelo matemático). A sequência das etapas da modelagem matemática escolhida pelo grupo foi: interação, matematização e modelo matemático. Chamaram à atenção para a semelhança da maquete que eles produziram e as caixas d'água de nossas casas, sendo possível fazer o cálculo do volume de água que ela comporta da mesma forma que a da maquete, ou seja, devemos multiplicar o valor das três dimensões comprimento, largura e altura. Como geralmente as medidas das caixas são dadas em metro, a equipe destacou a importância de saber a relação entre o metro cúbico e o litro e que uma metro cúbico equivale a 1000 litros. Então o professor aproveitou para fazer a seguinte indagação: E se o dono da casa fizesse as medições em centímetros, como ele poderia fazer para descobrir esse volume em litros?

Como o grupo estava bem preparado teoricamente, não tiveram dificuldades em responder. Eles argumentaram da seguinte forma: o cálculo do volume do paralelepípedo independe da unidade de medida, se a unidade for o metro, o volume será dado em metro cúbico, então, para transformar esse resultado em litros, basta multiplicar o resultado por 1000. Se a unidade de medida for o centímetro, o volume será dado em centímetros cúbicos. Como um centímetro cúbico equivale a um mililitro, e um litro corresponde a 1000 mililitros, logo um litro equivale a 1000 centímetros cúbicos. Para transformar centímetros cúbicos em litro, basta dividir o resultado obtido por 1000, então o volume será dado em litros. Para encerrar a apresentação, o grupo fez as considerações finais e além disso, ainda calculou a diagonal do paralelepípedo.

O grupo 4 construiu a maquete de um tacho misturador de leite que tem a forma de um cilíndro e um hemisfério, como mostra a Figura 40.

Figura 40: *Grupo apresentando a "'Maquete de um cilíndro e um hemisfério".*

A apresentação teve início com uma saudação ao professor e aos demais alunos. Cada aluna se apresentou dizendo seu respectivo nome, a saber: Josiane, Isabela, Natali, Carla Maraísa, Sara e Franciane. Dando continuidade, elas apresentaram a foto do sólido que foi a base para a construção da maquete, mostraram o material que utilizaram na confecção, papel, isopor e tachas, para fixar os materiais (interação). Fizeram uma exposição dos objetivos que seriam alcançados e apresentaram também os dois questionamentos (matematização) que seriam resolvidos para o professor e para turma, a saber: Qual a quantidade de material utilizado na confecção da maquete e qual é o seu volume?

Antes de iniciar a resolução das situações-problemas, o grupo fez uma pequena explanação falando do formato da maquete, que, como já foi dito, é composto por um cilíndro e um hemisfério, ou seja, a metade de uma esfera, relembraram também as fórmulas da área total e do volume dos sólidos em questão e que iriam utilizar (modelo matemático). Percebe-se claramente que a equipe optou pela sequência: interação, matematização e modelo matemático, como etapas básicas da modelagem matemática. Com uma régua, mediram a altura e o diâmetro da parte cilíndrica. Como o hemisfério tem o mesmo raio que o cilíndro, elas concluíram que as dimensões encontradas seriam suficientes para resolver os questionamentos citados. A resolução dos dois questionamentos se deu em duas etapas: primeiro, elas calcularam a área total de cada sólido e depois somaram os resultados. A equipe deixou claro que o cálculo da área total do cilíndro se resume ao cálculo da área lateral, já que o cilíndro não tem bases e o cálculo da área do hemisfério corresponde a metade da área da esfera. Depois, foi a vez de calcular o volume da maquete, elas também calcularam os volumes separadamente depois somaram os resultados. A equipe também esclareceu que, no caso do cilíndro, o volume independe da base. Já o hemisfério tem volume igual a metade do volume da esfera. Para encerrar, o professor elogiou a apresentação, pediu que fizessem uma análise geral do trabalho, abordando os pontos positivos e negativos e fez uma pequena resalva, perguntando por que a equipe não confeccionou a planificação do sólido. Elas se justificaram dizendo que, mesmo com as orientações dadas pelo professor, não conseguiram confeccionar a planificação do hemisfério para juntar com a do cilíndro, então desistiram e optaram somente pela maquete. Com relação a síntese, a equipe destacou como pontos positivos a aquisição do conhecimento e o engajamento dos membros em todas as etapas do trabalho e, como ponto negativo, destacaram o nervosismo, já que nunca haviam apresentado um trabalho de matemática dessa forma.

Figura 41: *Grupo apresentando a "'Maquete de um cilindro e um cone".*

O grupo 5 fez a maquete de um tacho, Figura 41, usado para envazar potes de doce. Ele tem a forma de um cilíndro e de um cone.

Seguindo o mesmo ritual dos demais grupos, a equipe se apresentou dizendo seus respectivos nomes, a saber: Sâmia, Nivânia, Crislene, Adylla, Dara Rana, Mayane, Ronison e Emanuela. Falaram dos objetivos que pretendiam alcançar com o desenvolvimento do trabalho e, assim como os demais grupos, relataram o que iriam calcular a quantidade de material utilizado na confecção da maquete e qual o volume de água que poderia ser colocado dentro desse recipiente (matematização). Seguindo com a apresentação, eles falaram da composição do sólido que tem forma de cilíndro e cone (interação), destacaram as fórmulas da área total e do volume que iriam utilizar (modelo matemático) e explicaram como fizeram a maquete. Observamos que a sequência das etapas da modelagem matemática usadas pelo grupo foi: matematização, interação e modelo matemático. Segundo o referencial teórico é interessante que se faça primeiro a interação, mas essa inversão não prejudicou em nada a apresentação, apenas mostrou que as etapas podem ser seguidas em qualquer ordem. A princípio, pensamos em fazer de papel mas não ficou muito bem feito, então resolvemos usar uma garrafa pet já que tem uma parte cilíndrica e outra parte que se aproxima do formato do cone. Cortamos mais ou menos na metade da garrafa, pensamos em enrolar com papel mas não deu certo, então o professor sugeriu que fizessemos papel machê. Para resolver as situações propostas o grupo fez a medição do diâmetro e da altura do cilíndro e mediu também a altura e a geratriz do cone já que o diâmetro do cone é o memso que o do cilíndro. Calcularam a área total do cilíndro que equivale somente a área lateral pois este não tem bases e calcularam a área total do cone que equivale a área lateral pois ele também não tem base e depois somaram os resultados. O volume foi calculados de forma experimental, isso só foi possível por que a maquete foi feita de garrafa pet, primeiro eles encheram a maquete com água e usando um béquer, instrumento de medida do laboratório de ciências, encontraram um valor para o volume. Depois usando as fórmulas e as dimensões dos sólidos calcularam os volumes separadamente e somaram os resultados, chegando a um valor aproximado daquele obtido anteriormente. Na sequência o professor pediu para que eles descrevessem o que sentiram realizam aquele trabalho. Primeiro eles disseram que ficaram muito nervosos, pois não tinham o costume de apresentar trabalho daquela forma e principalmente de matemática, mas foi uma experiência enriquecedora onde todos participaram ativamente. Em relação a parte experimental, eles disseram que ficaram muito surpresos com os resultados, pois encontraram valores muito próximos usando formas totalmente diferentes de calcular. Um aluno perguntou de onde saiu a idéia de calcular o volume daquele jeito e se eles acharam difícil. O grupo relatou que a princípio ficaram meio receiosos, pois poderia não dar certo, mas testaram várias vezes e sempre chegavam em valores bem próximos daqueles encontrados pelas fórmulas. Outro coisa que ajudou foi o fato de que o professor por muitos vezes este ano realizou atividades desse tipo em sala de aula usando o sólidos geométricos do laboratório de matemática. Assim como fez com o grupo 04, o professor elogiou a apresentação, mas questionou o porque da equipe não confeccionar a planificação da maquete, estes se justificaram dizendo que foi muito difícil se reunir pois todos moram muito distantes uns dos outros e no dia que se reuniram só deu tempo confeccionar a maquete.

3.6.1 AVALIAÇÃO GERAL DO PROFESSOR EM RELAÇÃO AS APRESENTAÇÕES

Terminada as apresentações, o professor tomou a palavra para fazer uma breve avaliação sobre a atuação dos grupos. O professor chamou a atenção para o engajamento dos membros de cada equipe, ressaltando que uns se apresentaram com mais desenvoltura outros com menos, mais isso não tira o mérito daqueles que pouco se destacaram, pelo contrário, mostra que o tabu que cerca a matemática pode ser quebrado e isso foi provado durante as apresentações. Dando continuidade a avaliação, o professor falou das maquetes que estavam muito bem confeccionadas, que também sentiu falta de algumas planificações sendo este um dos pontos negativos das apresentações. Destacou também o nervosismo de algumas pessoas que de certa forma atrapalhou o bom andamento dos trabalhos, mas ressaltou que isso é normal, e acontece até com professores experientes, quanto mais com alunos. Aproveitou para conscientizar a respeito do trabalho do todo professor, que como eles sentiram na pele, é uma tarefa muito difícil e precisa ser respeitada.

Para encerrar, o professor destacou a importância de fazer o aluno trabalhar com material concreto, e de preferência, produzidos por eles. Essa prática ajuda na construção e apropriação do conhecimento. Foi destacado também a importância de se trabalhar com situações do cotidiano dos alunos, bem como o resgate dos conhecimentos prévios dos mesmos, já que ambos foram peças fundamentais no processo de aprendizagem. Isso foi comprovado na análise da conclusão dos trabalhos, escrita por cada grupo, bem como nas resoluções das situações-problemas, que foram feitas de maneiras conscientes, utilizando o raciocínio mais adequado, chegando à resultados satisfatórios. Outro fato que mostrou a evolução da aprendizagem, foram os resultados das avaliações bimestrais abordando o conteúdo de Geometria Espacial, onde a maioria dos alunos da turma, atingiram a nota mínima para a aprovação, que corresponde a sessenta por cento da prova. Então podemos concluímos que a matemática que aprendemos na sala de aula é, sim, utilizada no dia a dia de todas as pessoas e a realização desse trabalho nos proporcionou uma aprendizagem tanto sobre a Geometria Espacial, quanto na produção e comercialização de doce. E por fim, ele trouxe vantagens afetivas, como a maior interação entre professor e alunos e entre alunos, pois em todas as reuniões dos grupos, nos divertimos muito, aprendendo não apenas a matéria escolar, mas a convivência em grupo e a capacidade de aceitação de idéias diferentes, chegando a um bom senso, para o bem do conjunto.

4 CONCLUSÃO

Após uma análise criteriosa das entrevistas, das apresentações, do desenvolvimento das atividades na sala de aula e na fábrica de doces e através dos depoimentos dos alunos em seus seminários, nos questionamentos e nas conversas informais, em sala de aula e na fábrica de doce ambiente da nossa pesquisa, as quais indicaram seus pontos de vista, é possível concluir que o desempenho da aprendizagem dos alunos foi satisfatório com a utilização da Modelagem Matemática e que ela pode ser uma estratégia de ensino para melhorar não só os índices de aprovação, mas melhorar significativamente a aprendizagem do discente, que é o mais importante. Percebe-se também que o contato direto dos alunos com os equipamentos da fábrica, seja medindo, verificando formas ou calculando áreas e volumes, faz com que eles se tornem os agentes principais na construção do conhecimento. A aplicação dessa metodologia de trabalho proporcionou também um engajamento maior de muitos alunos nas atividades que, até aquele momento, sequer faziam um exercício que lhe fosse proposto; o que lhes motivou a esse interesse, foi estudar algo que estava relacionado à sua realidade que é o princípio básico da modelagem matemática. Será que nós como educadores temos condições, de em sala de aula, de atuarmos sempre com esta dinâmica? Certamente que na grande maioria isto é humanamente impossível, uma vez que não é nos dada as devidas condições de trabalho. Voltando, é interessante que usemos, como ponto de partida, coisas que são da realidade dos alunos. Com isso, resgatamos os saberes que ele já trazem consigo, para aquisição de novos conhecimentos. Outro fato comprovado com a pesquisa de campo, foi o reconhecimento da matemática envolvida na produção do doce pelos alunos, e também o conhecimento empírico de muitos conceitos matemáticos apresentados pelos funcionários da fábrica não só para nós professores, mas também para os alunos. Isso foi comprovado na secção forma empírica de calcular volumes onde são apresentadas formas de calcular volumes de cilíndros e esferas, baseados em troca de experiências com outros empregados ou experiências vividas em outros ambientes de trabalho. O mais surprendente foi perceber a utilização de mecanismos simples como o cálculo de volume de uma caixa (comprimento x largura x altura) para chegar numa relação mais complexa que permite calcular de forma aproximada o volume de cilíndros e esferas. Já a relação para calcular volume de cones foi uma de nossas contribuições neste trabalho, pois o mesmo não era do conhecimento dos empregados da referida fábrica e óbviamente dos alunos. Sem dúvida verificamos que este trabalho possibilitou uma aproximação entre a matemática teórica estudada nos bancos escolares e a prática, mostrando que ela está mais presente no nosso dia a dia do que podemos imaginar. Propiciou também aos alunos a compreensão do significado de situações-problemas reais, despertando neles um maior interesse em resolvê-los. Facilitou a troca de informações entre os alunos que se ajudaram mutuamente, em alguns momento havendo intervenção do professor, levando a um trabalho pedagógico cooperativo e significativo. Nesse sentido, o professor deixou de ser o detentor do saber, aquele que repassa os conteúdos de forma isolada e como verdades absolutas e passou a ser o motivador na construção do conhecimento. Além disso, através da prática cooperativa, aprendemos junto com eles. Quando digo aprendemos junto com eles, estou me reportando as respostas das entrevistas com o administrador da fábrica, no qual revelou fatos que não era do conhecimento do próprio professor, como, por exemplo, a adição de uma quantidade considerada de banana em diversos tipos doces e a possibilidade de produzir doces classificados como de goiaba e caju usando somente banana e aditivos químicos, o que não sabemos é da legalidade disso. Isto foi só um exemplo, mas existiram outros que envolviam a própria matemática. Depois da análise dos gráficos gerados a partir das respostas dos alunos aos questionários, verificamos que a maioria destes têm uma certa aversão a disciplina, seja por falta de base do fundamental, não ter afinidade com os conteúdos ou ainda dedicar poucas horas do dia ao estudo da matemática. No geral, grande parte dos estudantes avaliados apresentaram baixa estima para desenvolver as atribuições que lhes eram propostas. Mas quando eles se sentiram dentro do processo, sendo os agentes no desenvolvimento das atividades, percebeu-se um aumento na auto-estima, onde muitos passaram a ser valorizados pelos colegas e também por si próprio, e a experiência foi rica porque eles apresentaram disposição para trabalhar com novos conteúdos, e mostrar a capacidade que tem e a contribuição que podem dar se forem bem explorados. Isso foi comprovado na atividade de produção de maquetes. Uma das etapas da modelagem que mais me surpreendeu foi o processo de resolução das situações-problemas identificados em nosso simplesmente por Problemas, ou seja, na elaboração dos modelos, onde foi fundamental a retomada de conteúdos que normalmente caem no esquecimento ao longo do tempo e a abordagem de novos conhecimentos que estão na grade curricular do ensino fundamental e eram totalmente desconhecidos por eles. Essas relações entre os conceitos passados, associados aos aprendidos recentemente e mais complexos, é que originam o modelo matemático pretendido e, consequentemente, favorecem o desenvolvimento cognitivo no aluno. O engajamento nas atividades foi tão intenso que muitas das situações-problemas descritas nesse trabalho foram oriundas de indagações dos próprios alunos, como por exemplo, a secção do número π. O presente trabalho está direcionado para o estudo da Geometria Espacial e para a produção de doce em escala industrial, mas ele pode ser adaptado para qualquer conteúdo e para qualquer tema, respeitando as peculiaridades da turma em estudo e a região em que a escola esta inserida. Alguns fatores também dificultaram o pleno desenvolvimento deste trabalho, como por exemplo a escolha do tema. Muitos alunos queriam pesquisar sobre a agricultura irrigada da Chapada do Apodi ou do Chapadão de Russas, mas devido a grande distância que separa a cidade destas regiões, não foi possível atender essas reinvidicações. O calendário do ano letivo da escola também colaborou negativamente. Devido a duas greves de professores, o que caracterizam a truculência dos nossos governates de plantão e incencibilidade para a educação em geral, as aulas começaram mais tarde do que o normal, dificultando a realização das atividades. Um ponto importante que não foi abordado neste trabalho, devido as condições impostas pelos donos do referido estabelecimento, foi a questão ambiental. Ela está diretamente relacionada a poluição causada pelos dejetos e pela a fumaça, que tanto prejudicam os moradores do bairro em que a fábrica está inserida. Então, baseado em todas as informações deste trabalho, bem como nos resultados vistos em sala de aula, nas avaliações e seminários feitos pelos alunos participantes da pesquisa, internas mostrando que a aprendizagem foi mesmo satisfatória e também levando-se em considerações as dificuldades encontradas, podemos concluir que a Modelagem Matemática e a Etnomatemática podem ser ferramentas pedagógicas poderosas, uma vez que é voltada para um ensino rico, pleno de significado e possível de ser aplicada ao cotidiano, desde que os nossos governantes deem as devidas condições de trabalho e motivação econômica para que o professor não tenha toda sua carga-horária em sala de aula e em escolas diferentes. Na verdade, oferecendo tempo para o planejamento das ações.

Referências

[1] D' AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática-elo entre as tradições e modernidade. 2ª edi. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

[2] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Modelagem matemática no ensino. 5ª edi. São Paulo: Contexto, 2011

[3] ROSA NETO, Ernesto. Didática da Matemática.11ª edi. São Paulo: Ática, 2002

[4] MACHADO, José Nilson. Matemática e Realidade.....

[5] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais Mais- Ensino Médio: Matemática. Brasília: MEC,2002

[6] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais Mais- Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC,1998

[7] DANTE, Luiz Roberto. Matemática- Contexto e Aplicações. Vol, 2. 1ª edi. São Paulo: Ática, 2010

[8] HISTÓRIA DO DOCE NO BRASIL (s.d). Disponível em pt.wikipedia.org/wiki/Doces_do_Brasil. Acesso em 25/02/2013

[9] HISTÓRIA DE LIMOEIRO. (s.d). Disponível em pt.wikipedia.org/wiki/Limoeiro_do_Norte. Acesso em 25/02/2013

[10] OTIMIZAÇÃO. (s.d). Disponível em www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/.. Acesso em 25/02/2013

[11] DESIGUALDADE DAS MÉDIAS. (s.d). Disponível em http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/maxmin/mm04.htm. Acesso em 25/02/2013

[12] ESQUINCALHA, Agnaldo da Conceição. ETNOMATEMÁTICA: Um estudo da evolução das idéias. 2003. 19.f. (s.d). Disponível em www.ufrrj.br/leptrans/arquivos/etnomatematica.pdf. Acesso em 26/03/2013.

[13] PARDAL PIRES, Eugênia Maria de Carvalho. Um estudo de etnomatemática: a matemática praticada pelos pedreiros. 2008. 155.f. Dissertação (Mestrado em ensino de ciências) Especialidade em Ensino da Matemática pela Universidade Aberta. Brasil, 2008.

[14] SONEGO, Giseli Verginia. As contribuições da etonomodelagem matemática no ensino da geometria espacial. 2009. 143.f. Dissertação (Mestrado profissionalizante em ensino de física e matemática) - Centro Universitário Franciscano Santa Maria, Santa Maria, RS, 2009.

ANEXOS

ANEXO A - ENTREVISTA COM OS ALUNOS

1) Que sentimento você tem em relação a matemática?

a) Gosto, mas tenho dificuldades.

b) Gosto e não tenho dificuldades.

c) Não gosto, mas estudo para superar as dificuldades.

d)Não gosto e não me esforço para superar as dificuldades.

2) Com que frequência você utiliza a matemática para resolver seus problemas do dia-a-dia?

a) Sempre

b) Na maioria das vezes

c) As vezes

d) Raramente

3) Que conteúdos você teve mais dificuldade em aprender este ano?

a) Trigonometria

b) Geometria Espacial

c) Analise combinatória

d) Matrizes e determinantes

4) Qual é o fator que mais dificultam sua aprendizagem em relação a certos conteúdos de matematica?

a) Falta de base no fundamental

b) Indisciplina na sala de aula

c) Falta de atenção de minha parte

d) Não tenho dificuldades.

5) Em que você sente mais dificuldade na hora de estudar os conteúdos de Geometria Espacial?

a) A quantidade de fórmulas

b) O conteúdo muito extenso

c) Relacionar teoria e prática

d) Não tenho dificuldades

6) Quantas horas por dia você dedica ao estudo de matemática?

a) Menos de uma hora

b) Uma hora.

c) De uma a duas horas.

d) Mais de duas horas

7) Você consegue vê alguma relação entre os sólidos estudados em Geometria Espacial (prismas, cilindros, esferas, etc) e os objetos da vida real?

a) Sempre

b) Quase sempre

c) As vezes

d) Raramente

8) Com que frequência seu professor de matemática busca relacionar teoria e prática utilizando algum material concreto?

a) Sempre

b) Na maioria das vezes

c) As vezes

d) Raramente

ANEXO B- ENTREVISTA COM O ADMINISTRADOR DA FÁBRICA

EQUIPAMENTOS E MATÉRIAS-PRIMAS

1) Quais os tipos de doces produzidos?

2) Quais são as outras matérias-primas utilizadas na produção? De onde elas vêm?

3) Quais as frutas utilizadas? De onde elas vêm? É possível utilizar outros tipos de frutas? É viável economicamente?

4) Que fruta rende mais na hora da fabricação? Por quê?

5) Existem produtos utilizados num tipo de doce e em outro não? Por quê?

6) O que encarace o produto final?

7) Que tipo de doce dá mais lucro e por quê?

8) Quais os nomes dos principais equipamentos usados na produção? Qual é sua função?

9) Como foram adquiridos os equipamentos? Financiamento? Ou compra a vista?

10) As máquinas utilizadas são nacionais ou estrangeiras? Por que a escolha?

PROCESSO DE PRODUÇÃO

1) Como é feita a higienização das frutas?

2) As frutas são trituradas antes ou depois do cozimento? Ou não há trituração?

3) As sementes são retiradas antes da trituração?

4) Onde é feito o cozimento? A quantos graus?

5) Qual é o tempo médio de cozimento? Varia de acordo com o tipo de fruta?

6) O que é feito com o material que não é aproveitado?

7) Existem outras etapas para a produção do doce? Quais? Descreva.

8) Quanto tempo o produto deve ficar esfriando?

9) Que tipo de doce leva mais açúcar, mais leite?

10) Como é feita a distribuiçao dos funcionários para cada etapa de produçaõ?

11) Como é feito o treinamento dos funcionários?

ENVASAMENTO DA PRODUÇÃO

1) Quais os formatos dos potes onde são colocados os doces? Quantos gramas pesa cada pote depois de cheio?

2) Depois de colocadas nos potes em que eles são embaladas? Quais são as suas dimensões?

3) Quantas caixas cabem dentro do caminhão baú?

4) Por que os doces são embalados em tabletes já que há gasto com plástico para embalá-los? Isso não encarece o produto?

5) Como são embalados os tabletes de doce?

6) Qual é o peso de cada tablete de doce? Quantos tabletes cabem num pote?

7) Quantos quilos de doces são produzidos diariamente?

8) Como é calculada a data de validade?

TRANSPORTE E COMERCIALIZAÇÃO

1) Quais são as frutas utilizadas na fabricação dos doces?

2) As frutas são compradas somente em Limeiro ou também em outra cidades? Quais?

3) Como é feito o transporte das frutas até a fábrica?

4) O produto final (doce) é comercializado somente em Limoeiro? Ou é vendido para outras cidades? Quais?

5) Que tipo de doce tem mais aceitação no mercado? Por quê?

6) O produto é vendido direto aos comerciantes ou há algum tipo de atravessador? Isso não encarece o produto?

7) Quando vocês vão fazer a entrega de algum pedido há cobrança de frete ao cliente? Ou o frete já está embutido no proço final do produto?

8) Os demais produtos usados na fabricação do doce são comprados onde? Como eles chegam a fábrica?

9) Como é feita a relação custo x benefício pela empresa? Quem é o responsável por essa parte?

PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO DE UMA TONELADA DE DOCE

Tabela 1: Quantidade de cada produto para uma tonelada de doce de goiaba:

Produtos	Quantidade (kg)	Preço de (1kg)	Preço total
Goiaba	850	0,50	425,00
Banana	150	0,50	75,00
Açucar	273	1,10	300,00
Mão de obra, transporte	-	-	1000,00
Total de despesas	1273	-	1800,00

2) Quantos potes de $500g$ vão encher?

3) Qual é o preço de cada pote para fábrica? Por quanto ele é vendido ao comerciante?

4) Quantos dias serão necessários para produzir essa quantidade de doce?

5) Fazendo uma proporção para um mês, quantas toneladas serão produzidas?

6) Quantos funcionários estão envolvidos desde a produção até a comercialização?

GLOSSÁRIO

- Compatibilizar- sinônimo de conciliar e harmonizar.

-Cognitio- significa cognição.

-Envasamento-sinônimo de engarrafamento.

-Chapada do Apodi- é uma formação montanhosa brasileira localizada na divisa entre os estados do Rio Grande do Norte e do Ceará.

-Chapadão de Russas-projeto de irrigação que abrange principalmente o município cearence de Russas.

-Cera de carnaúba-produto extraído da palha da carnaubeira.

-Tabletes de doce- doce em forma de paralalepípedo com dimensões muito pequenas.

-Tacho-é um grande prato ou alguidás cerâmico ou metálico, ou uma panela cujo diâmetro é maior do que a altura.

-Envasadora- máquina de envasar doce.

-Doce poly-tipo de doce caracterizado pelo pote em forma de tronco de cone.

-Papel machê- é uma massa feita com papel picado embebido na água, coado e depois misturado com cola e gesso.