UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ADRIANO JORGE MEIRELES HOLANDA

OS MISTÉRIOS DA MAIS BELA FORMA GEOMÉTRICA: O TRIÂNGULO

MOSSORÓ
2013

ADRIANO JORGE MEIRELES HOLANDA

OS MISTÉRIOS DA MAIS BELA FORMA GEOMÉTRICA: O TRIÂNGULO

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró, para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Zuluaga – UFERSA

Mossoró
2013

FICHA CATALOGRÁFICA

H 722 Holanda, Adriano Jorge Meireles.

Os mistérios da mais bela forma geométrica: o triângulo. / Adriano Jorge Meireles Holanda. -- Mossoró (RN), 2013.

88 f.; 30cm.

Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática)–Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2013.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Zuluaga.

1. Matemática 2. Geometria 3. Triângulo
I. Título

CDD: 516.2

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária
Elvira Fernandes de Araújo Oliveira CRB15/294

ADRIANO JORGE MEIRELES HOLANDA

OS MISTÉRIOS DA MAIS BELA FORMA GEOMÉTRICA: O TRIÂNGULO

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró, para obtenção do título de Mestre.

APROVADO EM 03 / 04 / 13

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Maurício Zuluaga Martinez – UFERSA

Presidente

Prof. Dr. Elmer Rolando Villareal – UFERSA

Primeiro Membro

Prof. Dr. Josildo José Barbosa da Silva – UERN

Segundo Membro

Dedico este trabalho à minha família, em especial à minha esposa Fabiana e às minhas duas filhas: Júlia Maria e Maria Eduarda, por me apoiarem durante o tempo que durou este curso, sempre contribuindo com incentivos e coragem para alcançar este objetivo.

Ao meu professor e orientador Maurício Zuluaga Martinez pela oferta do seu valioso conhecimento, marcando o alcance do término deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Por tudo, agradeço a Deus, pela proteção nas viagens feitas à Mossoró, pela força e coragem oferecida à conclusão deste curso.

Agradeço à minha esposa, Fabiana Holanda, pela compreensão e motivação, as quais me moveram por todo esse período. Agradeço também por acreditar no meu potencial, contribuindo para que tudo isso tornasse realidade.

Agradeço às minhas filhas, Júlia Maria e Maria Eduarda, objetivo da minha vida, pelas horas dadas de compreensão em detrimento aos meus estudos.

Agradeço aos meus pais que contribuíram para o alicerce do meu saber.

Agradeço ao coordenador do Curso (PROFMAT – UFERSA), Professor Dr. Ronaldo Garcia, por todo o incentivo, pela confiança depositada e por não medir esforços para que seus alunos pudessem alcançar o sucesso.

Ao meu orientador, Professor Dr. Maurício Zuluaga, pela contribuição e por todas as orientações tão valiosas para a confecção deste trabalho.

A meus colegas de curso por todos os momentos difíceis que enfrentamos e vencemos juntos, em especial, a Francileide Sá Leitão e Francisco Heber, pela companhia das viagens e apoio em momentos turbulentos durante o curso.

Ao grande amigo e professor Dr. Aleksandre Dantas, pelo incentivo, apoio e orientação metodológica, tão importantes e indispensáveis na execução deste trabalho.

Por fim, a todos que colaboraram com esse momento edificante da minha vida.

“ Podemos acreditar que tudo que a vida nos oferecerá no futuro é repetir o que fizemos ontem e hoje. Mas, se prestarmos atenção, vamos nos dar conta de que nenhum dia é igual a outro. Cada manhã traz uma benção escondida; uma benção que só serve para esse dia e que não se pode guardar nem desaproveitar. Se não usamos este milagre hoje, ele vai se perder. Este milagre está nos detalhes do cotidiano; é preciso viver cada minuto porque ali encontramos a saída de nossas confusões, a alegria de nossos bons momentos, a pista correta para a decisão que tomaremos. Nunca podemos deixar que cada dia pareça igual ao anterior porque todos os dias são diferentes, porque estamos em constante processo de mudança. ”

(Paulo Coelho)

RESUMO

A matemática traduz a sabedoria do homem quando este desmistifica os procedimentos necessários à realização complexa das formas balizadoras do cotidiano. Por este motivo, a geometria se insere no contexto, firmando o seu espaço que tão pouco é observado, sequer por parte dos profissionais pedagógicos, sequer pelos alunos que atenuam a importante utilização geométrica. Com o objetivo de intervir nesse processo através da apresentação equalizadora da didática, entendida como a mais correta, a qual o aluno poderá identificar de forma ampla todas as nuanças do polígono triângulo, municiando o aluno com o conhecimento específico e detalhado, no tocante à preparação deste para o mercado de trabalho, haja vista, a necessidade da aplicação dos triângulos nas estruturas de cobertura e de sustentação em algumas edificações antigas e modernas e, também no uso estrutural de equilíbrio de móveis e imóveis, nos revestimentos cerâmicos de piso e de paredes, além do uso de cortes de pedras preciosas, roupas e acessórios usados na moda contemporânea, é que se busca apresentar uma nova metodologia para a aprendizagem da geometria. Todavia, em meio a anos de magistério, pode-se observar a incompreensiva inexatidão com que os livros didáticos tratam a geometria, sucumbindo os mais importantes detalhes e apresentando de forma superficial ao tratar das diferenças triangulares. Neste contexto, o trabalho foi realizado, em primeiro momento, uma pesquisa bibliográfica, buscando preencher, de forma sequenciada, a lacuna dos livros didáticos. Em uma segunda fase, concomitantemente a primeira, foi evidenciado no escopo do trabalho, conforme a vivência pedagógica, a proposta didática para uma melhor aplicação do conhecimento geométrico voltado à forma triangular. Por fim, a obtenção de uma nova estrutura bibliográfica, concretiza e sana as lacunas observadas durante a prática pedagógica curricular para o conhecimento e aperfeiçoamento da mais bela forma geométrica: o triângulo.

Palavras-chave: Matemática. Geometria. Triângulo. Didática.

ABSTRACT

The math translates man's wisdom when it demystifies the procedures for carrying out complex forms guidelines everyday. For this reason, the geometry fits into the context, establishing its so little space that is observed, whether by professionals teaching, even by students who use geometric attenuate important. Aiming to intervene in this process through the presentation of didactic equalizer, understood as the most correct, which the student can identify broadly all the nuances of the polygon Triangle, favoring the student with specific knowledge and detailed regarding the preparation this to the labor market, given the necessity of applying the triangular roof structures and support in some ancient and modern buildings, and also in the use of structural balance and assets, in ceramic tile floors and walls, and the use of cutting gems, clothes and accessories used in contemporary fashion, which is seeking to present a new methodology for teaching geometry. However, amid the years of teaching, one can observe the inaccuracy with uncomprehending that textbooks treat the geometry, succumbing, the most important details and presenting a superficial way to address the differences Triangular. In this context, the work was performed, at first, a literature search, seeking to fill, so sequenced, the gap of textbooks. In a second phase, concurrently the first, was evident in the scope of work, as the experience pedagogical, didactic proposal for better application of knowledge focused on the geometric shape Triangular. Finally, obtaining a new structure literature, close concrete and gaps observed during teaching practice curriculum for knowledge and improvement of the most beautiful geometric shape: Triangle.

Keywords: Math. Geometry. Triangle. Didactics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A vida moderna em que nós vivemos, tão dinâmica e concorrida, necessita de pessoas mais criativas, com habilidades em resolver problemas, que façam uso de tecnologias para minimizar o trabalho a ser efetuado e, dessa forma, possam interagir com elas, podendo, até mesmo, vir a desenvolver outras formas de tecnologia dando condições à sociedade de usufruir as novas descobertas. Isto é, o que se deve fazer, como professor de Matemática (Geometria), é estimular a curiosidade natural de nossos jovens, para que possam seguir adiante com suas próprias descobertas.

No decorrer de muitos anos de magistério, no ensino da Matemática para o ginásio e 2° grau, atualmente denominado de ensino fundamental e médio, respectivamente, observa-se que os estudantes de tais níveis apresentam uma falta de habilidade, e como consequência, uma forte dificuldade em trabalhar com a Geometria, em especial, com um dos principais polígonos, o triângulo. Sabe-se que com propriedades específicas dos Triângulos é possível determinar muitas características dos outros polígonos, como quantidade de diagonais, soma dos ângulos internos, medidas de segmentos internos, distância de um ponto à circunferência e áreas desses polígonos. Os polígonos podem ser divididos em (n - 2) Triângulos, onde n representa a quantidade de lados desse polígono. Para realizar essa divisão, basta traçar as diagonais (segmentos de reta que unem vértices não adjacentes) de um único vértice. A quantidade de diagonais que podemos traçar a partir de um único vértice também pode ser determinada em função do número de lados (n), que é igual ao número de vértices. Essa quantidade é determinada pela expressão (n – 3), onde n representa o total de vértices e o 3 o próprio vértice e os dois adjacentes a ele. Verifica-se então, que para um polígono de n lados (n vértices) tem, para cada vértice, (n – 3) vértices não adjacentes. Com o estudo detalhado desse polígono, pode-se adquirir conhecimentos e apoderar-se de uma ferramenta poderosa, tanto na resolução de problemas gerais de Geometria, como na aprendizagem de outros conceitos envolvendo outros polígonos.

No momento da escolha desse tema para este trabalho de dissertação de Mestrado, essa questão ressurgiu, em detrimento, a observação da dificuldade no processo didático-pedagógico sobre Geometria, em especial o triângulo, onde em toda minha vida de magistério e, principalmente, quando os alunos do PROFMAT

(Turma 2011) foram avaliados na disciplina de Geometria, o qual esse autor fazia parte. O que se observou nessa avaliação é que os bons professores de Matemática do nosso país tiveram grande dificuldade em expressar o seu conhecimento em Geometria, e o que se viu foi muita reclamação quanto ao estilo de material usado em comparação com o que foi cobrado nas avaliações.

A partir dessas observações, deve-se procurar uma forma de sanar tais dificuldades, para que nós professores possamos nos apaixonar por tal disciplina e, consequentemente, passar essa paixão para os mais interessados nessa questão, nossos alunos. Por isso, esse trabalho trata de uma figura de grande importância no conhecimento geométrico, que é o triângulo. Nesse trabalho, pode-se especular sobre o numeral três, que é a quantidade de lados, vértices, ângulos internos e externos do triângulo. Número bem intrigante que nos rodeia sem sequer ser percebido. Além de poder verificar algumas propriedades e suas devidas demonstrações sobre os triângulos, bem como, o melhor uso para que no processo de ensino-aprendizagem fique evidente a importância de tal teorema ou propriedade.

Apresentar e demonstrar as propriedades fundamentais do triângulo, variando desde a relação entre os ângulos internos e externos, como a relação entre os comprimentos dos lados que determinam se o triângulo poderá, ou não, ser construído com os comprimentos dos segmentos de reta dados (Desigualdade Triangular). Identificar todas as cevianas (segmentos de reta que unem um vértice do Triângulo à reta suporte do lado oposto a esse vértice) e todos os seus pontos notáveis, com suas respectivas características e propriedades, e claro, suas respectivas demonstrações. Determinar a medida de uma superfície coberta por um triângulo qualquer, ou seja, ver inúmeras maneiras e formas diferentes de calcular a área de uma superfície triangular, desde a maneira mais básica, que todos os alunos de ensino fundamental lembram, até formas mais complexas. Esses são os objetivos deste trabalho.

Isso é o que os professores de Geometria devem esperar de seus alunos quando terminarem o ensino médio, além de identificar as necessidades da relação entre dois triângulos, indicando a condição para provar quando dois Triângulos são congruentes, ou se são apenas semelhantes. Ver as formas triangulares nas estruturas dos objetos que estão presentes ao redor do aluno, bem como, mostrar o que podemos fazer com os Triângulos semelhantes.

A ideia de não desprezar as propriedades mais comuns, por mais simples que sejam, deveriam ser mais comumente observadas pelos autores, pois são dessas ideias que podemos fazer ligações com ideias mais complexas, o que muitas vezes só podemos confirmar o quão importante são as ideias simples quando passamos a estudar mais profundamente um determinado assunto.

Desta forma, o objetivo geral é apresentar, com ajuda de pesquisa bibliográfica, usando os livros de Geometria de Augusto César Morgado, Elon Lages de Lima, Antonio Caminha Muniz Neto, João Lucas Marques Barbosa, Gilberto Geraldo Garbi, Osvaldo Dolce, José Nicolau e Pompeo, além de usar Os Elementos de Euclides de Alexandria, um modelo e exemplo de material didático para que o aluno venha conhecer e se familiarizar com os triângulos quanto a sua classificação, quanto aos lados e ângulos, tanto na nomenclatura quanto nas formas que aparecerem, realizando demonstrações da condição de existência, levando-se em conta o comprimento de seus lados. Como objetivos específicos, considera-se dar embasamento que possa permitir ao aluno desenhar todos os triângulos e reconhecer suas cevianas e seus pontos notáveis, além de demonstrar, com toda a precisão e atenção necessária, as propriedades e teoremas que norteiam o conhecimento sobre tal polígono. Em seguida, verificar a existência e a demasiada importância dos triângulos nas estruturas de cobertura e de sustentação em algumas edificações antigas e modernas e, também no uso estrutural de equilíbrio de móveis e imóveis, nos revestimentos cerâmicos de piso e de paredes, além do uso de cortes de pedras preciosas, roupas e acessórios usados na moda contemporânea.

Acredita-se que possa existir uma maneira para que a grande maioria dos estudantes possa olhar a Matemática, em especial a Geometria, de uma forma diferente. Que eles não se sintam pertencentes a um mundo distante daquele que os matemáticos criaram e produziram. O intuito é propiciar aos estudantes, uma nova abordagem da Geometria, uma nova visão dessa Ciência, desfazendo a imagem heroica e romantizada que a envolve e que foi mitificada pela história. Dessa forma, talvez possamos, nós professores brasileiros, romper obstáculos psicológicos, tornando possível para um público mais geral que venha a gostar e a se apaixonar por essa disciplina: Matemática (Geometria).

É verdade que todos os anseios que foram relatados anteriormente não irão depender apenas de um material didático mais completo e aprimorado, mas sim de uma boa orientação no momento de sua aprendizagem. Isso irá depender quase que exclusivamente do processo de ensino (didática) de cada professor.

Segundo Lima (2006), o professor deve saber bem mais do que quer realmente que o seu aluno aprenda. Pensando dessa forma, os assuntos sobre Geometria Plana (triângulos), apresentados nessa pesquisa, foram retirados dos mais conceituados livros de Geometria Plana, que são usados nos cursos de graduação. Com a finalidade de que se tenha um bom e consistente embasamento sobre essa estrutura tão fundamental, que é o triângulo.

A presente pesquisa trata-se de uma pesquisa bibliográfica, onde segundo Pinto e Martins (2001, p. 41), afirma ser a forma que:

> (...) procura explicar e discutir um tema com base em referências teóricas publicadas em livros, revistas, periódicos etc. Busca conhecer e analisar contribuições científicas sobre determinado tema. É um excelente meio de formação científica quando realizada independentemente – análise teórica – ou como parte de investigação empírica.

Quanto a sua natureza, esta é uma pesquisa descritiva, onde relata Andrade (2007, p. 114), que "os fatos são observados, registrados, analisados, classificados e interpretados, sem que o pesquisador interfira neles".

No entanto, esta pesquisa objetiva ser desenvolvida através de conhecimento vivenciado e acompanhado, onde são analisadas e compreendidas as dificuldades enfrentadas pelos alunos no aprender da geometria. Possui uma abordagem de caráter investigativo, apresentado pela pesquisa bibliográfica, buscando um maior embasamento teórico a respeito dos aspectos norteadores sobre a Geometria, precisamente, sobre a forma triangular. Além disso, é realizada a observação através das informações que associam a utilização da forma triangular em diversos ambientes, identificando sua trajetória conceitual para cada teorema e propriedade. Logo, a partir, desse momento, se discute o aproveitamento e importância do conhecimento minucioso na aplicação da forma triangular em todo o processo estudantil.

Por fim, apresenta-se, de forma circunstanciada a análise do conteúdo pesquisado, buscando apresentar os preceitos observados, em meio à experiência didático/metodológica profissional em Matemática e os anseios dos alunos na aplicação da forma triangular. Todavia, deve-se firmar neste procedimento, a busca de informações de outros estudiosos preocupados em desvendar formas mais elaboradas aplicadas ao estudo do triângulo, desconfigurando a metodologia subjetiva do ensino geométrico.

2 VIVENDO A GEOMETRIA DESDE O SEU SURGIMENTO

O presente capítulo tratar-se-á do surgimento e evolução da Geometria, bem como, uma abordagem mais substancial das ideias sobre os triângulos, sua evolução na história, suas funções nas áreas afins como trigonometria, geometria analítica, topologia, arquitetura, entre outras, e especificamente a apresentação de suas propriedades e teoremas. Todos devidamente demonstrados e detalhados, para que se possa dar aos estudantes, de forma geral, uma ferramenta forte no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem, abordando algumas ferramentas didático-pedagógicas.

2.1 História sem fim: geometria

É muito comum ouvirmos falar que a Geometria surgiu devido a necessidade que o povo egípcio tinha de redividir as suas terras após as enchentes do rio Nilo. Nessa época, era muito comum os povos fixarem moradia próxima a cursos de águas, pois não havia um sistema eficiente de distribuição desse bem tão precioso que nós seres humanos temos a necessidade de preservar. Mas, na época de grandes inundações, as divisas das terras eram destruídas e, por isso, quando as águas baixavam, as cercas e divisões de terrenos deveriam ser refeitas de forma igualitária para que ninguém tivesse perdas de suas posses, pois o valor do pagamento de impostos, nessa época, era proporcional ao tamanho de sua área ocupada. Então, é por esse motivo, que se diz que a Geometria tem origem provável na agrimensura ou medição de terrenos, segundo o historiador grego Heródoto (séc. V a.C.).

> Quando das inundações do Nilo, o rei Sesóstris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da geometria, que migrou, mais tarde para a Grécia. (HERÓDOTO,109 apud ROQUE, 2012)

Entretanto, sabe-se que as civilizações antigas possuíam conhecimentos que envolviam a Geometria, da China a Babilônia, passando por outras civilizações.

É óbvio que a Geometria, como ciência, não surgiu, de uma vez só, com todos os postulados e teoremas existentes nos dias de hoje. O que ocorreu foi uma grande evolução desde sua origem aos tempos atuais. Os primeiros conhecimentos geométricos foram elaborados a partir das necessidades do homem em compreender melhor o meio onde se encontrava, o que talvez justifique a origem de sua palavra. Mas é, sem dúvida, com os geômetras gregos, iniciando com Tales de Mileto (624-547 a.C.), que a Geometria é estabelecida como teoria dedutiva. O termo "geometria" deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra (*geo*=terra, *metrein*=medição). Suas descobertas foram influenciadas por egípcios e mesopotâmicos e uma de suas grandes descobertas foi a de calcular a altura de uma das pirâmides do Egito, quando este lá se encontrava. Diz a lenda que, quando Tales se encontrava no Egito, foi-lhe pedido por um mensageiro do faraó, em nome do soberano, que calculasse a altura da pirâmide de Queops. Corria a voz, de que o sábio sabia medir a altura de construções elevadas por arte geométrica, sem ter de subir a elas. Tales apoiou-se a uma vara, esperou até ao momento em que, a meio da manhã, a sombra da vara, estando esta na vertical, tivesse um comprimento igual ao da própria vara. Disse então ao mensageiro: “Vá, mede depressa a sombra: o seu comprimento é igual à altura da pirâmide”.

No entanto, hoje não precisa mais esperar que sombra de um objeto, tenha o comprimento igual ao do próprio objeto, para que se saiba quais as alturas de construções elevadas. Pode-se utilizar a semelhança de triângulos.

Ela se baseia em que: a altura da pirâmide está para a altura da vara assim como a sombra da pirâmide está para a sombra da vara.

Surgiu daí o Teorema de Tales, que fala da proporção entre segmentos de transversais (retas que cruzam um feixe de retas paralelas) localizados entre um feixe de retas paralelas.

Outro matemático importante e considerado por muitos um dos maiores filósofos da antiguidade nasce mais tarde em Atenas, seu nome é Platão. Aos vinte anos, foi discípulo de Sócrates (quarenta anos mais velho que ele) durante oito anos. Depois da morte do seu mestre, Platão retirou-se com outros socráticos para junto de Euclides, em Mégara, tendo, também, contato com a escola pitagórica.

A escola pitagórica, segundo Marques (2011), foi desenvolvida em meados do século V a.C., e responsável pela transição entre as descobertas de Tales e as grandes descobertas de Euclides, com o livro Os Elementos, que reúne treze livros que compilam teoremas e postulados, muitas vezes dito com elementares, mas de uma imensa riqueza que é imperdoável que um matemático, em especial os amantes da Geometria, deixe de ler e reler quantas vezes quiser e se fizer necessário. Não existem documentos históricos sobre a matemática produzida pelos pitagóricos, nem há a possibilidade de saber-se a quem atribuir exatamente as descobertas matemáticas dos pitagóricos na aritmética e na geometria.

Pouco se sabe da vida de Euclides (330 e.A.C. – 260 e.A.C.), mas sabe-se que foi chamado para ensinar em uma escola na cidade de Alexandria. Foi aí que alcançou grande prestígio pela forma brilhante com que ensinava Geometria e Álgebra, conseguindo atrair para suas explicações um grande número de discípulos. Euclides tinha uma grande capacidade e habilidade de expor suas ideias.

Conta-se, que um dia, o rei lhe perguntou se não havia uma maneira mais simples de se aprender Geometria e que Euclides respondeu: “Não existem estradas reais para se chegar à Geometria”.

Outra passagem da vida de Euclides refere-se a um dos seus discípulos, que, resolvendo ser espirituoso, depois de aprender a primeira proposição de geometria lhe perguntou qual o lucro que ele poderia adquirir com o estudo da geometria. No mesmo instante, Euclides - para quem a geometria era coisa séria - chamou um escravo, entregou-lhe algumas moedas e ordenou que as entregasse ao seu discípulo: *"já que deve obter um lucro de tudo o que aprende"*.

Embora se tenha perdido muito de sua vasta obra, pouco mais da metade dos seus livros ainda restaram, para felicidade dos apreciadores que viriam após sua morte nos séculos seguintes, os treze famosos livros que constituem os Elementos. Publicados por volta de 300 a. C., onde está contemplada a aritmética, a geometria e a álgebra.

O trabalho de Euclides é tão imenso e completo que alguns historiadores não acreditavam que fosse obra de um só homem. Embora alguns desses conceitos já fossem conhecidos anteriormente à sua época, o que impossibilita uma análise completa da sua originalidade, pode-se considerar o seu trabalho genial. Euclides reuniu e catalogou tudo o que então se conhecia, sistematizou os dados da intuição e substituiu imagens concretas por ideias abstratas, para poder raciocinar sem qualquer apoio intuitivo.

Estava instaurado assim o que, de maneira magnífica, dominou e continua da mesma forma, o mundo matemático durante mais de vinte séculos, o chamado método axiomático, que inspirara a humanidade, ao longo dos tempos e em muitos outros campos do saber, da moral, da política, a organizar as suas ideias segundo os mesmos princípios.

2.2 A exuberância do número três e sua forma representativa: triângulo

Para desmistificar a eloquência do conceito de triângulo, o professor e pesquisador do Departamento de Ciência da Computação do University College London, Bentley (2009), traduz, de forma dinâmica, através de analogias, referenciando o numeral que indica e constrói a forma geométrica triangular.

Como expõe Bentley (2009), para se chegar ao entendimento de algo que envolva um grau de complexidade, devem-se buscar ligações cotidianas para exaurir toda e qualquer dúvida gerada pelo novo, ou seja, existe uma grande frequência com que o número 3 ocorre em nossas vidas, na nossa fala e até em muitas palavras.

O número 3 é central para muitas religiões: pense na Santíssima Trindade de Pai, Filho e Espírito Santo, ou nos Três Nefitas ou ainda para identificar os três Reis Magos, pessoas as quais presentearam o Menino Jesus no seu nascimento.

As raízes “ter”, “tri” e “tre” derivam todas de três e ajudam a formar superlativos como terrível, triunfante e tremendo. O três nos leva do bom para melhor, para o melhor.

Há muitas superstições em torno do número três. Supõe-se que infortúnios acontecem em grupos de três, mas se você tentar alguma coisa uma terceira vez talvez tenha sorte. Ver um cachorro com três patas parece dar sorte, mas ouvir uma coruja piar três vezes dá azar. Dizem que cuspir três vezes afugenta o demônio.

O número três é tão importante para nós que, nos tribunais, usamos uma fórmula em que juramos três vezes: “dizer a verdade, somente a verdade, nada mais que a verdade”. Usamos o três para começarmos corridas: “Um, dois, três e já!”.

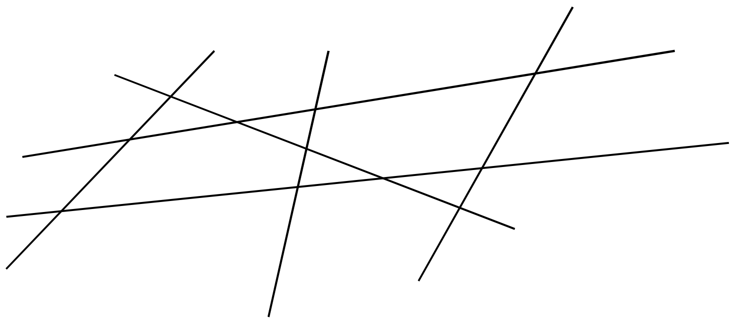
Tradicionalmente, fazemos três refeições por dia, e nossos talheres são uma trinca de faca, colher e garfo. E, ainda, para quem não acreditar que o três é importante, pense três boas razões para isso.

O três é o primeiro número ímpar (não divisível por dois) que é primo (possui apenas dois divisores distintos positivos).

Todavia, agregando o conhecimento popular ao teórico, (BENTLEY, 2009), relata que uma forma que exemplifica o três de modo perfeito é o triângulo.

> Ele tem três lados (ou arestas, como as chamamos em matemática) e três cantos (vértices). Os triângulos tem muitas propriedades importantes, [...] Se você jogar um monte de espaguete crú sobre uma superfície plana, ela ficará coberta de triângulos de espaguete. Mais de três linhas retas que se entrecruzam vão sempre formar triângulos (na geometria euclidiana). Se depois você tornar a superfície curva (não plana), e tornar os triângulos suficientemente pequenos, terá uma aproximação dessa superfície feita de triângulos. É assim que quase toda imagem de computador é desenhada: tudo é transformado em milhões de pequenos triângulos, todos cuidadosamente unidos. (BENTLEY, 2009, p. 128-129).

Figura 1: Jogo de espaguetes



Fonte: O autor (sistema Windows – Word)

Nota-se que as formas realizam papel fundamental em diversas áreas da ciência e da tecnologia.

Para tanto, Bentley (2009) menciona em sua obra sobre as grandes descobertas realizada por Leonhard Euler. Matemático de grande destaque, dedicado, Euler foi o primeiro a perceber uma relação muito simples entre cantos, arestas e faces de formas sólidas com lados planos, os poliedros. Euler percebeu que, se adicionarmos o número de cantos (vértices) ao número de faces e subtrairmos o número de arestas, a resposta será sempre 2:

$$v + f - a = 2$$

Para provar tal descoberta Euler, segundo Bentley (2009) apresenta uma pirâmide egípcia. A pirâmide tem 5 vértices, 5 faces e 8 arestas:

$$5 + 5 - 8 = 2$$

Portanto, notadamente, a estrutura mais apreciada do Egito apresenta 5 faces, das quais, 4 são Triângulos.

Figura 2: Necrópole de Gizé (Complexo piramidal de Quéops, Quéfren e Miquerinos)

Fonte: http://www.google.com.br

Todavia, não existe qualquer referência pontual a quem ou como terá sido inventado ou descoberto o triângulo. Terá sido o homem que, ao longo da sua evolução, teria sentido necessidade, na sua vida prática, de tornar rígidas e seguras algumas das suas construções.

Nos tempos primitivos da civilização grega, foi usado pelos gregos o triângulo de descarga. Este triângulo era uma construção que permitia descarregar as pressões exercidas por grandes pesos que se encontravam por cima das portas dos túmulos e das cidadelas. Devido ao peso, as portas podiam abater, mas, com o triângulo, esse peso era suportado por postes laterais que eram maciços.

Figura 3: Triângulo de descarga

Fonte: http://www.prof2000.pt

Na atualidade, são muitas as situações em que se recorre à robustez do triângulo. Os engenheiros usam frequentemente formas triangulares nas suas construções, para torna-las mais seguras.

Através de princípios geométricos (lei dos senos e/ou cossenos) é possível verificar que o triângulo é a única forma poliédrica que não se pode alterar a sua forma sem igualmente alterar o comprimento dos seus lados.

Em sala de aula, um professor pode propor uma atividade com pedaços de canudos e cordões. Basta que peça aos alunos para construírem polígonos de três, quatro, cinco, seis, etc lados e, em seguida, pedir para tentar deformar a figura construída sem amassar os lados, ou seja, deformar figura alterando a medida dos ângulos internos. O aluno irá verificar que a única figura que não sofrerá alteração na sua forma será o triângulo.

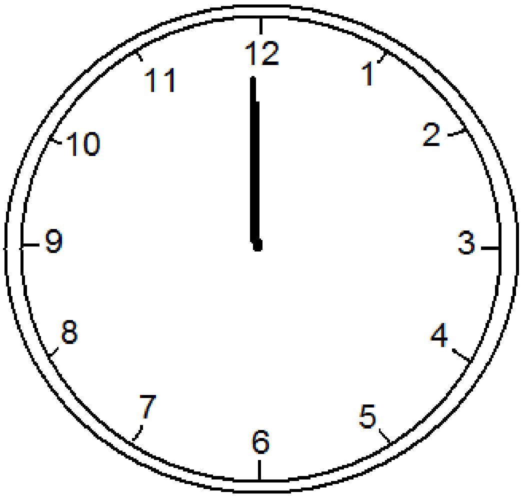
Figura 4: Guindastes suportam e elevam grandes pesos, graças à existência de secções triangulares.

Fonte: http://www.prof2000.pt

Contudo, Bentley (2009) foi mais adiante em sua pesquisa, quando faz referência a medida dos ângulos de um triângulo. Ressalta Bentley (2009) que os triângulos também têm ângulos dentro de cada canto. Fato tão importante para os matemáticos ao longo das eras que mais um tipo de matemática foi inventado para descrevê-lo: a trigonometria.

A trigonometria é a matemática dos ângulos. Caso tenhamos duas linhas retas que se encontram um ponto, elas devem formar algum ângulo uma com a outra. A maneira mais antiga e comum de se medir ângulos é em graus, porque um círculo completo tem 360 graus. A maneira mais fácil de pensar sobre isso é olhar os dois ponteiros de um relógio. Quando os dois ponteiros apontam na mesma direção, digamos 12 horas, é como se tivéssemos duas linhas uma sobre a outra, portanto o ângulo entre elas tem 0°.

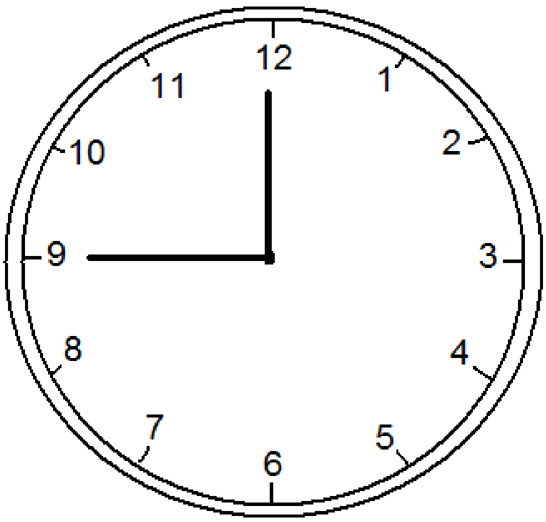
Figura 5: Relógio representando ângulo 0°



Fonte: Autor, usando o Paintbrush(Windows)

Quando um ponteiro está em 12 e o outro em 9, o ângulo entre eles corresponde a 90°.

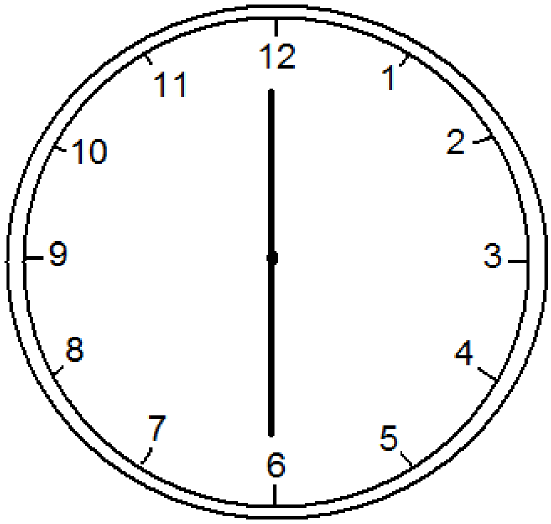
Figura 6: Relógio representando ângulo 90 graus (ângulo reto).



Fonte: Autor, usando o Paintbrush(Windows)

Quando um ponteiro está em 12 e o outro em 6, o ângulo formado entre eles equivale a 180°.

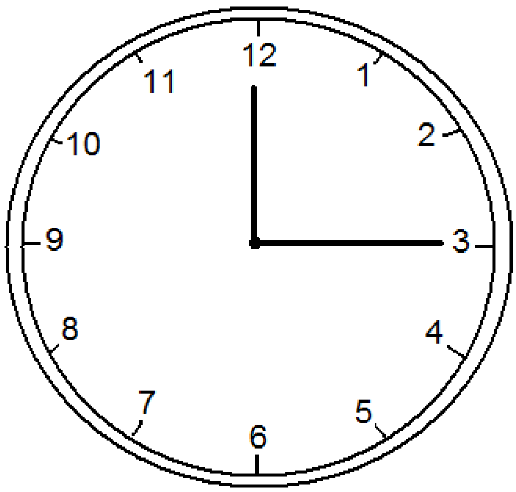
Figura 7: Relógio representando ângulo 180 graus.



Fonte: Autor, usando o Paintbrush(Windows)

Quando um ponteiro se encontra em 12 e outro em 3, o ângulo entre eles é de 270° (usualmente mede-se ângulos no sentido anti-horário).

Figura 8: Relógio representando ângulo 270 graus.



Fonte: Autor, usando o Paintbrush(Windows)

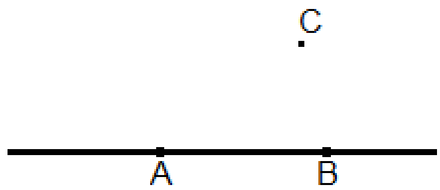
Os ângulos são muito importantes quando se pensa sobre formas geométricas como o triângulo, quadrados e pentagramas.

Por fim, temos aqui um sucinto histórico da utilidade do triângulo, onde, de forma ampla, contribui para o desenvolvimento humano. Sua diversidade caracteriza o glamour da sua forma, quando verificamos a essencial e necessária utilização em monumentos, triangulação para medição de distâncias, instrumento musical e outros fins. Logo, diante das informações e das descobertas, torna possível a formulação de um conceito de triângulo.

2.3 Definição e estrutura de um Triângulo

Segundo Neto (2012), tomamos três pontos, A, B e C, no plano. Se estes três pontos estiverem pertencendo a uma mesma reta, são denominados de pontos colineares, caso contrário, diremos que A, B e C são não-colineares (figura 9).

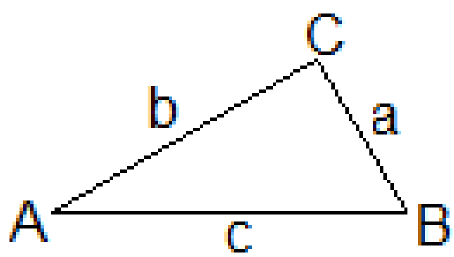
Figura 9: Três pontos não colineares



Fonte: Autor, usando o Paintbrush(Windows)

Três pontos não colineares formam um triângulo. Nesse caso, a região triangular correspondente é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os três pontos dois a dois. Sendo A, B e C tais pontos, diremos que esses pontos serão os vértices do triângulo ABC e os seus lados serão os segmentos de reta AB, BC e AC, cujos comprimentos representaremos por c, a e b, respectivamente (figura 10).

Figura 10: Triângulo ABC de vértices A, B e C e lados a, b e c.



Fonte: Autor, usando o Paintbrush(Windows)

A soma dos comprimentos dos seus três lados é o seu perímetro, que iremos denotar por 2p; assim, p será o seu semiperímetro. Nas notações da figura 10, temos:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

Os ângulos formados internamente em cada vértice, entre os lados do triângulo, são denominados de ângulos internos, denotados por α, β e θ, e os ângulos formados, também em cada vértice, entre um lado e o prolongamento do outro lado concorrente no mesmo vértice, são os ângulos externos, denotados por Â, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Esses mesmos três pontos não colineares determinam no espaço um único plano. O triângulo é a região interna limitada pelos segmentos de reta que traçamos usando esses três pontos. Pelo fato de três pontos não colineares determinarem um único plano, é que podemos afirmar que um móvel (mesa, cadeira, etc.) que foi fabricado para ser apoiado em apenas três pernas nunca fica desequilibrada. Já 4 pontos podem ou não estar sobre um mesmo plano, ainda que não sejam colineares. Assim, se os 4 pontos não forem coplanares, as extremidades de 3 das pernas vão se apoiar no plano do solo e a quarta vai ficar balançando, desequilibrando a cadeira.

Figura 11: Móveis com três pernas

Fonte: http://www.google.com.br

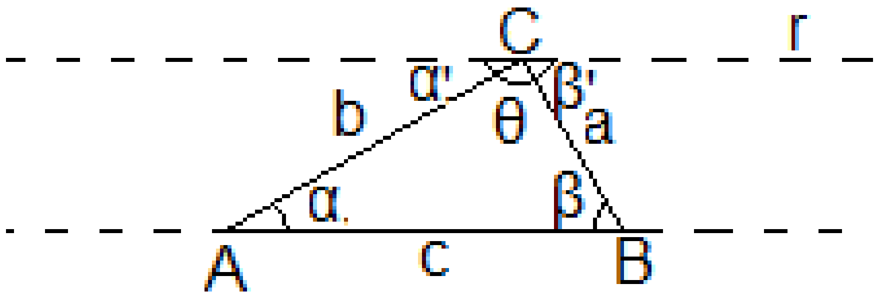
Segundo Lima (2001), um dos resultados centrais da Geometria Euclidiana é que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale dois ângulos retos e que a soma dos ângulos externos é igual a 4 ângulos retos. Esses resultados podem ser expandidos para polígonos, convexos ou não, de n lados. Ao traçarmos algumas diagonais do polígono para que com isso possamos dividir o polígono em (n – 2) triângulos, teremos que a soma dos ângulos internos será dada por (n – 2) vezes dois ângulos retos e a soma dos ângulos externos será 4 ângulos retos. Quando o polígono for convexo, ou seja, quando todas as retas suporte dos seus lados não passarem pela região interna do polígono, o dividiremos em (n – 2) triângulos traçando as diagonais de um único vértice, mas se o polígono não for convexo, basta traçar todas as diagonais que não se cruzam, que mesmo assim ele ficará dividido nos mesmos (n – 2) triângulos. Um triângulo é um tipo particular de polígono convexo, isto é, não há triângulos que não sejam convexos.

2.4 Soma dos ângulos internos de um triângulo

A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°

De acordo com o pensamento de Lima (2001), pode-se começar supondo um triângulo, cujos ângulos internos são α, β e θ e também que a letra R, a partir de agora, representará sempre um ângulo reto.

Figura 12: Ângulos internos de um Triângulo



Fonte: Autor, usando o Paintbrush(Windows)

Traça-se uma reta por C, vértice do ângulo interno θ, que seja paralela ao lado oposto a esse vértice (reta suporte do lado AB), observa-se que α = α’, β = β’ com ângulos alternos internos e que α’ + β’ + θ = 2R, então α + β + θ = 2R.

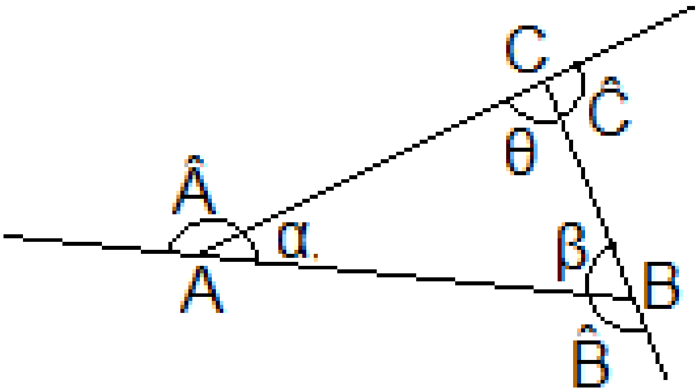
Para provar isso com material concreto, basta pedir para que os alunos recortem um triângulo de papel e, em seguida, recortem os ângulos internos um a um. Quando o aluno juntar os vértices dos ângulos internos verificará que formará um ângulo de meia volta, ou seja, 180°, provando, desta forma, que a soma dos ângulos internos do triângulo é exatamente esse valor.

2.5 Soma dos ângulos externos de um Triângulo

A soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é 180°.

Considera-se agora, um triângulo qualquer ABC, cujos ângulos internos são α, β e θ, e externos são $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ (Figura 13).

Figura 13: ângulos internos e externos de um Triângulo qualquer ABC



Fonte: Autor, usando o Paintbrush (Windows)

Observe, na figura 8, que em cada vértice do triângulo há dois ângulos um externo e um interno adjacente, que, somados, dão igual a dois ângulos retos, ou seja, são ângulos suplementares. Dessa forma, temos que:

$$(\hat{A} + \alpha) + (\hat{B} + \beta) + (\hat{C} + \theta) = 2R + 2R + 2R \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \alpha + \beta + \theta = 6R \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + 2R = 6R \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 4R$$

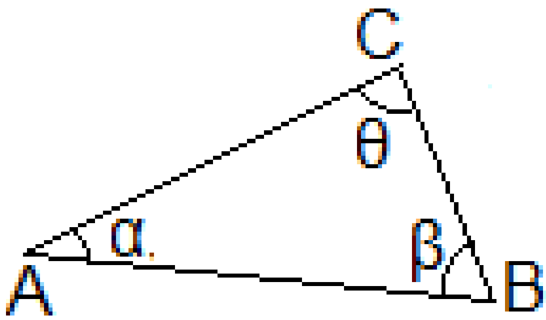
Portanto, a soma dos ângulos externos de um triângulo equivale a 4 vezes o ângulo reto.

2.6 Ângulos opostos a lados

Em qualquer triângulo, o maior ângulo interno está oposto ao maior lado.

De acordo com as ideias de Euclides(2009), consideremos um triângulo ABC (figura 14), com ângulos internos α, oposto ao lado BC, β, oposto ao lado AC e θ, oposto ao lado AB.

Figura 14: Triângulos com seus ângulos internos



Fonte: Autor, utilizando o Paintbrush (Windows)

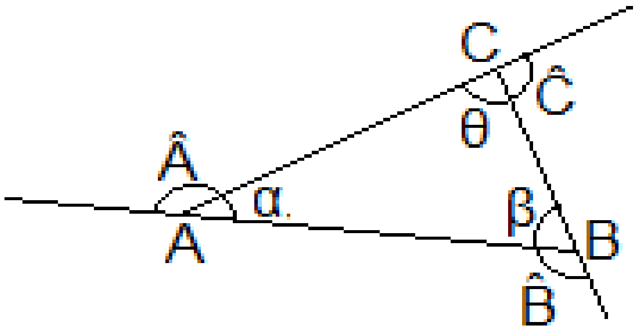
Suponha que o ângulo θ seja maior que o ângulo α. Digo então que o lado AB é maior que o lado BC. Se AB não for maior, então é igual ou menor que BC. Mas AB não é igual a BC, pois o ângulo θ seria igual ao ângulo α, o que não acontece. Logo AB não é igual a BC. Mas AB também não é menor que BC, porque o ângulo θ seria menor que o ângulo α, o que não acontece. Logo AB não é menor que BC. E, como foi demonstrado, que também não são iguais. Logo AB é maior que BC.

O aluno pode verificar tal situação, se ele mesmo desenhar um triângulo qualquer e, a partir do vértice do menor ângulo, ele rotacionar um dos lados concorrentes a esse vértice, de modo que o ângulo interno aumente. Ele verificará que o lado oposto a esse ângulo irá também aumentar. Isso fará que de forma concreta, ele perceba a propriedade acima demonstrada.

2.7 Teorema do ângulo externo

Consideremos o Triângulo da figura 15, com ângulos internos α, β e θ e ângulos externos Â, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Figura 15: Ângulos internos e externos



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Deve-se observar que em cada vértice temos um ângulo interno e um externo adjacente, que são sempre suplementares e, com já foi provado, a soma dos ângulos interno, α, β e θ, é igual a 180°.

$\alpha + \beta + \theta = 180°$ (I)

$\alpha + \hat{A} = 180°$ (II)

$\beta + \hat{B} = 180°$ (III)

$\theta + \hat{C} = 180°$ (IV)

Comparando (I) e (II), (I) e (III) e (I) e (IV) encontramos que:

$\hat{A} = \beta + \theta$

$\hat{B} = \alpha + \theta$

$\hat{C} = \alpha + \beta$

Ou seja, em qualquer triângulo, todo ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes.

2.7.1 Consequências do Teorema do Ângulo Externo

a) Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

Para provarmos tal proposição, basta olharmos o que foi encontrado usando a figura 15. Nessa figura, vimos que os ângulos α, β e θ são internos e ângulos Â, $\hat{B}$ e

$\hat{C}$, são externos ao mesmo triângulo ABC, com $\hat{A}$ sendo adjacente a α, $\hat{B}$ adjacente a β e $\hat{C}$ adjacente a θ. Usaremos, como exemplo o ângulo externo $\hat{A}$, ficando fácil e óbvio a prova para os demais ângulos externos, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Observe que $\hat{A} = \beta + \theta$, ou seja, que o ângulo externo $\hat{A}$ é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, β e θ. Então, se $\hat{A} = \beta + \theta$, é porque $\hat{A} > \beta$ e $\hat{A} > \theta$.

b) A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor que 180°.

Barbosa (2006) propôs a prova da proposição acima supondo um Triângulo ABC com ângulos internos α, β e θ e externos, $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, com $\hat{A}$ sendo adjacente a α, $\hat{B}$ adjacente a β e $\hat{C}$ adjacente a θ. Barbosa (2006) mostra que $\beta + \theta < 180°$. Pela propriedade anterior temo que $\hat{B} > \theta$. Como β e $\hat{B}$ são suplementares, então $\beta + \hat{B} = 180°$. Portanto $\beta + \theta < \beta + \hat{B} = 180°$.

c) Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos agudos.

A prova de tal proposição pode ser feita de modo bem simples. Basta utilizar a proposição anterior. Se um triângulo possuísse dois ângulos internos não agudos, sua soma seria maior ou igual a 180°, o que não pode ocorrer de acordo com a proposição anterior.

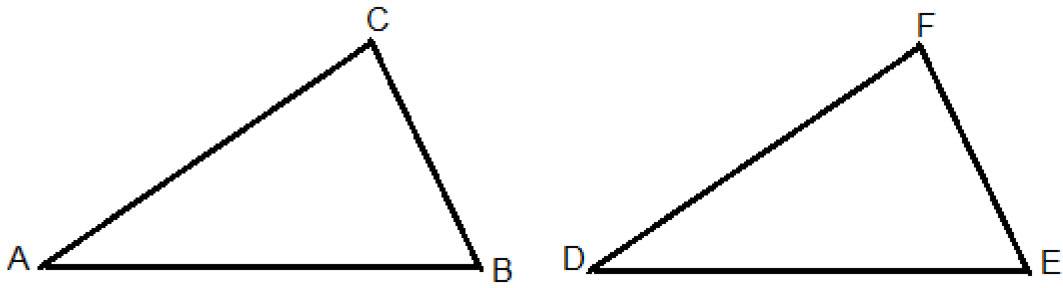
2.8 Congruência de Triângulos

A congruência é um conceito geométrico. Em geometria, duas figuras são congruentes se elas possuem a mesma forma e tamanho. Mais formalmente, dois conjuntos de pontos geométricos são ditos "congruentes" se, e somente se, um pode ser transformado no outro por isometria, ou seja, uma combinação de translações, rotações e reflexões.

Dois triângulos serão congruentes se seus lados correspondentes (ou homólogos) forem congruentes e seus ângulos correspondentes (ou homólogos) forem congruentes.

Quando temos um triângulo ABC congruente a um triângulo DEF (figura 16), a relação pode ser escrita matematicamente como $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Figura 16: Triângulos congruentes



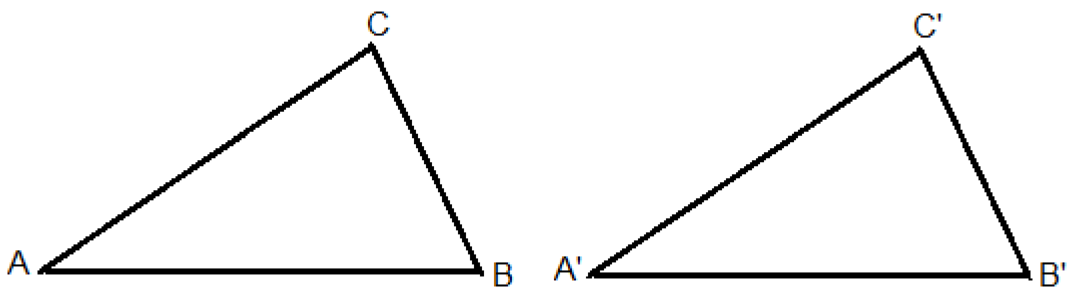
Fonte: O autor, usando o Paintbrush

Na maioria dos casos, é necessário e suficiente estabelecer a igualdade entre três partes correspondentes e usar um dos seguintes resultados para deduzir a congruência de dois triângulos.

Segundo Garbi (2010) a evidência entre dois triângulos no espsço Euclidiano pode ser conseguida através das seguintes comparações:

a) Se dois triângulos têm dois lados respectivamente congruentes e os ângulos entre eles congruentes, então os terceiros lados também serão congruentes, assim como os pares de ângulos, em cada triângulo, que se opõem aos pares de lados congruentes.

Figura 17: Triângulos congruentes: Caso lado – ângulo – lado (LAL)



Fonte: O autor, usando o Paintbrush

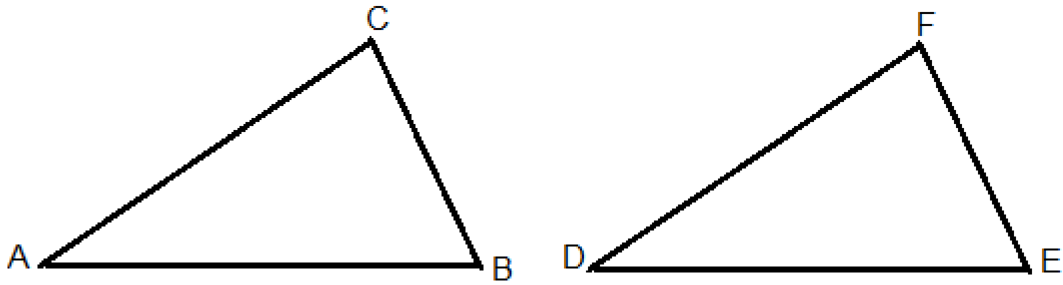
Sejam, conforme a figura 17, ABC e A'B'C' dois triângulos tais que AB = A'B', BC = B'C' e $A\hat{B}C = A'\widehat{B'}C'$. Imaginemos que o triângulo A'B'C' seja colocado sobre o triângulo ABC de modo que os pontos B e B' coincidam e que a reta que contém A'B' coincida com a reta AB. Como AB = A'B', o ponto A coincidirá com o ponto A'.

Como o ângulo $A\hat{B}C$ é congruente ao ângulo $A'\widehat{B'}C'$, a reta que contém B'C' coincidirá com a reta que contém BC. Como BC = B'C', os pontos C e C' coincidirão.

Sabendo que coisas que coincidem uma com a outra são iguais (ou congruentes) entre si, os lados AC e A'C' são congruentes. Assim, todo o triângulo ABC coincidirá com todo o triângulo A'B'C' e, portanto, ambos são congruentes entre si. Os demais ângulos no triângulo ABC coincidirão com os demais ângulos no triângulo A'B'C' e, portanto, $B\hat{A}C = B'\widehat{A'}C'$ e $B\hat{C}A = B'\widehat{C'}A'$.

b) Se dois triângulos têm os três lados respectivamente congruentes, eles são congruentes.

Figura 18: Triângulos congruentes: Caso lado – lado – lado (LLL)



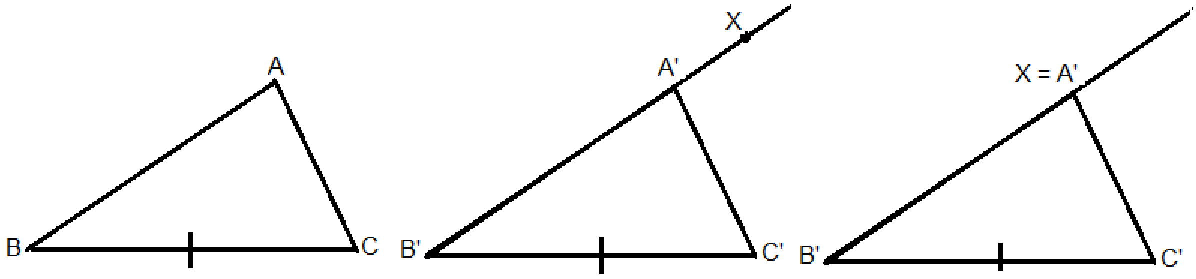
Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Sejam, conforme figura 18, os triângulos ABC e DEF tais que AB = DE, AC = DF e BC = EF. Se tais triângulos não fossem congruentes, então, por exemplo, os ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ seria diferentes, pois, se fossem congruentes, os triângulos seriam congruentes pelo caso LAL. Então, pelo item 2.5, os lados AC e DF, opostos àqueles ângulos, seriam diferentes, ao maior ângulo opondo-se o maior lado. Mas isso é um absurdo porque, por hipótese, AC = DF. Logo, ABC e DEF são congruentes.

c) Conforme Dolce e Pompeo (2005), se dois triângulos, têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.

Na figura 19, os ângulos adjacentes ao lado BC são $\hat{B}$ e $\hat{C}$, os adjacentes ao lado B'C' são $\widehat{B'}$ e $\widehat{C'}$.

Figura 19: Triângulos congruentes: Caso ângulo – lado – ângulo (ALA)



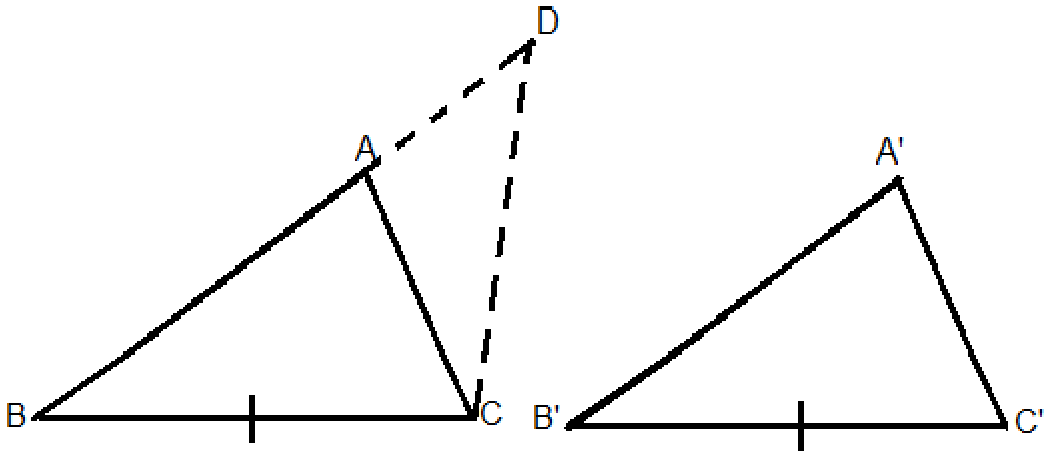
Fonte: O autor, usando o Paintbrush

Usando como hipótese que os ângulos $\hat{B} = \widehat{B'}$ e $\hat{C} = \widehat{C'}$ e que o lado BC = =B'C', deve-se provar que BA = B'A', pois, com isso, usaremos o caso LAL. Pelo postulado do transporte de segmentos (Dados um segmento AB e uma semirreta de origem A', existe sobre esta semirreta um único ponto B' tal que A'B' seja congruente a AB), obtemos na semirreta $\overrightarrow{B'A'}$ um ponto X tal que B'X = BA. Então, como BC = B'C', $\hat{B} = \widehat{B'}$ e BA = B'X, pelo caso LAL, teremos que os triângulos ABC e XB'C' são congruentes, e, por isso, os ângulos $B\hat{C}A$ e $B'\widehat{C'}X$ são congruentes. Da hipótese $B\hat{C}A = B'\widehat{C'}A'$, com $B\hat{C}A = B'\widehat{C'}X$ e com o postulado do transporte de ângulos (Dados um ângulo $A\hat{O}B$ e uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ de um plano, existe sobre este plano, e num dos semiplanos que $\overrightarrow{O'A'}$ permite determinar, uma única semirreta $\overrightarrow{O'B'}$ que forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $A'\widehat{O'}B'$ congruente ao ângulo $A\hat{O}B$), decorre que $\overleftrightarrow{B'A'}$ e $\overleftrightarrow{C'X} = \overleftrightarrow{C'A'}$ interceptam-se num único ponto X = A'.

De X = A', BA = B'X, decorre que B'A' = BA, então, como BA = B'A', $\hat{B} = \widehat{B'}$ e BC = B'C', pelo caso LAL, os Triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

c) Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

Figura 20: Triângulos congruentes: Caso lado – ângulo – ângulo oposto (LAA$_o$)



Fonte: O autor, usando o Paintbrush

Considerando que na figura 20 teremos BC = B'C', $\hat{B} = \widehat{B'}$ e $\hat{A} = \widehat{A'}$, há três possibilidades para AB e A'B':

I) AB = A'B'
II) AB < A'B'
III) AB > A'B'

Se (I) se verifica, temos que AB = A'B', $\hat{B} = \widehat{B'}$ e BC = B'C', então pelo caso LAL, os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

Se (II) se verificasse, tomando um ponto D na semirreta $\overrightarrow{BA}$ tal que BD = A'B' (postulado do transporte de segmentos), teríamos DB = A'B', $\hat{B} = \widehat{B'}$, BC = B'C', então, pelo caso LAL, os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes, logo $\widehat{D} = \hat{A}$ e $\hat{A} = \widehat{A'}$, o que é absurdo, de acordo com o teorema do ângulo externo no triângulo ADC. Logo, a segunda possibilidade não se verifica.

A possibilidade (III) também nao se verifica, pelo mesmo motivo, com a diferença que D estaria entre A e B.

Como só pode ocorrer a possibilidade (I), temos que os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

Com esses casos de congruência de dois triângulos, percebe-se que só há a necessidade de se provar que eles possuem três partes congruentes para que possamos afirmar que esses triângulos são congruentes. Isso também prova a robustez do triângulo como já foi citado anteriorente.

Percebe-se também que o único caso que não se prova a congruência é quando temos os três ângulos congruentes, pois pode existir triângulos com os mesmos ângulos internos sem que possuam os mesmos lados.

2.9 Semelhança de Triângulos

Segundo Barbosa (2006), dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais. Desta forma, se ABC e DEF forem dois triângulos semelhantes e se A→D, B→E e C→F é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações:

$$\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E} \ e \ \hat{C} = \hat{F} \ \ e \ \ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

A divisão comum entre as medidas dos lados correspondentes é denominada de razão de proporcionalidade entre dois triângulos.

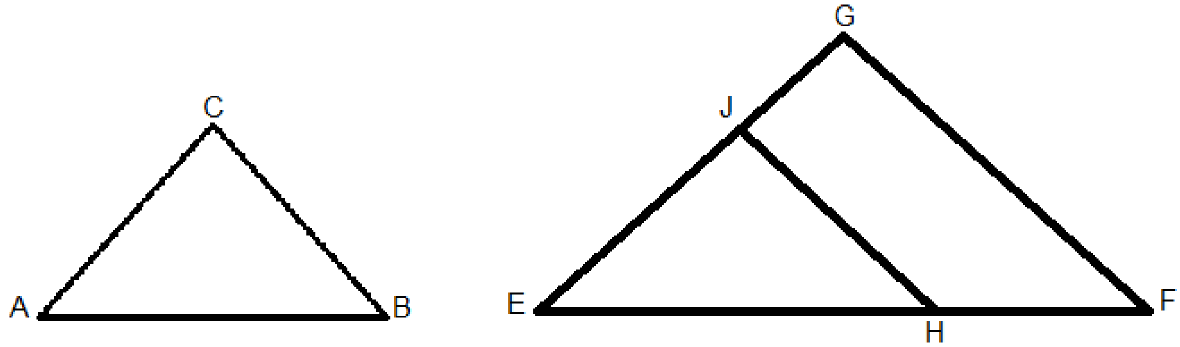
Observa-se que dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade um; inversamente, dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade um, são congruentes.

Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\hat{A} = \hat{E} \ e \ \hat{B} = \hat{F}$, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração: Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, então a congruência dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{E}$ e dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{F}$ acarreta a congruência dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{G}$. Resta provar que os lados são proporcionais. Para isto, tome na semirreta S_{EF} o ponto H de modo que EH = AB. Pelo ponto H trace uma reta paralela a FG. Esta corta a semirreta S_{EG} num ponto J, formando um Triângulo EHJ que é congruente ao triângulo ABC, já que $\hat{A}$ = $\hat{E}$ e AB = EH e $\hat{B}$ = $\hat{F}$ = $E\hat{H}J$. Esta última congruência deve-se ao paralelismo de JH e GF. Usando o teorema de Tales (Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhe-se pontos Ae A' ∈ r, B, B'∈ s e C, C' ∈ t, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A\prime B\prime}}{\overline{B\prime C\prime}}$) teremos que $\frac{EH}{EF} = \frac{EJ}{EG} \Rightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$, devido a congruência entre os triângulos ABC e EHJ.

Então, podemos dizer que sempre dois triângulos com ângulos congruentes entre si, serão semelhantes, e, por isso, possuirão os lados homólogos (opostos a ângulos congruentes nos triângulos semelhantes) proporcionais.

Figura 21: Semelhança de triângulos

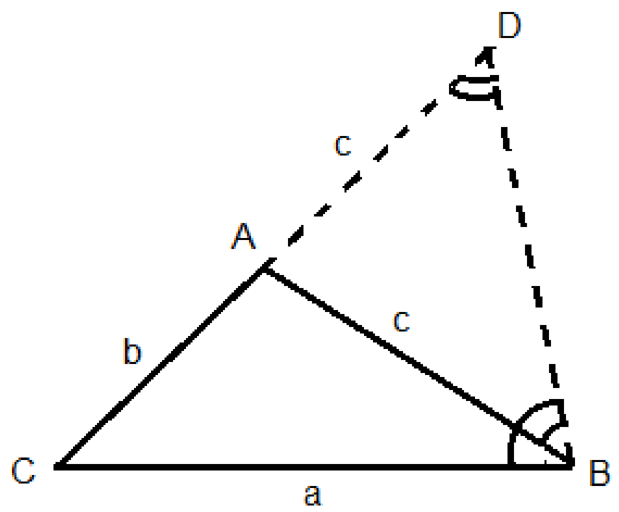


Fonte: Autor, usando o Paintbrush

2.10 Desigualdade Triangular

Em todo triângulo, cada lado é menos que a soma dos outros dois. De acordo com Dolce e Pompeo (2005), pode-se provar tal postulado se considerarmos um triângulo qualquer de vértices A, B e C e lados respectivamente opostos a esses vértices, a, b e c. Para provarmos que a < b + c devemos iniciar marcando um ponto D na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{AC}$, de modo que tenhamos AD = AB = c (figura 22).

Figura 22: Triângulo de lados a, b e c



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Verifica-se que o triângulo ABD é isósceles, pois AB = AD = c, logo, os ângulos desse triângulo opostos a esses lados serão congruentes, isto é, $A\hat{D}B = A\hat{B}D$.

Observando-se agora o triângulo BCD, verifica-se que $C\hat{B}D > A\hat{B}D = A\hat{D}B$, e com foi visto anteriormente, um maior ângulo está oposto ao maior lado desse triângulo, então CD > BC, ou seja, b + c > a. Sem perder a generalidade teremos para o triângulo ABC da figura 22:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases}$$

Também de acordo com Dolce e Pompeo (2005), também podemos enunciar a desigualdade triangular da seguinte forma: “Em todo triângulo, cada lado é maior que a diferença dos outros dois.”

Considere o triângulo da figura 22, de lados a, b e c, então devemos ter as três condições a seguir:

$$\left.\begin{array}{l} a < b + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l} b < a + c \;\Leftrightarrow\; b - c < a \\ c < a + b \;\Leftrightarrow\; c - b < a \end{array}\right\} \Leftrightarrow |b - c| < a \end{array}\right\} \Leftrightarrow |b - c| < a < b + c$$

Portanto, em um triângulo qualquer teremos qualquer lado sendo maior que o módulo da diferença entre os outros dois lados e menos que a soma desses lados.

2.11 Classificação dos triângulos

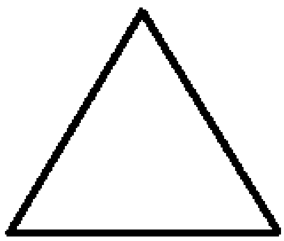
Segundo Neto (2012), os triângulos possuem duas classificações básicas: em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos.

Como todo triângulo tem três lados, as únicas possibilidades para os comprimentos dos mesmos são que haja pelo menos dois lados com o mesmo comprimento ou que os três lados tenham comprimentos diferentes dois a dois.

Portanto de acordo com o comprimento dos lados um triângulo é denominado:

a) Equilátero quando todos os seus lados têm o mesmo comprimento;

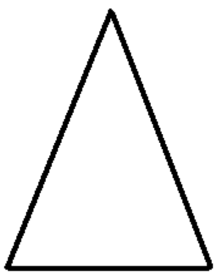
Figura 23: Triângulo equilátero



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

b) Isósceles quando ao menos dois de seus três lados têm o mesmo comprimento;

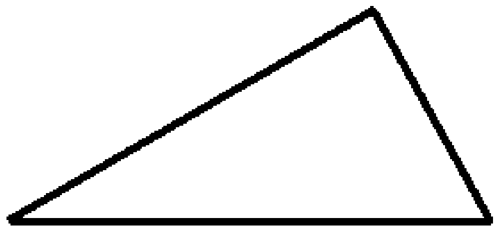
Figura 24: Triângulo Isósceles



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

c) Escaleno quando os três lados têm comprimentos diferentes entre si.

Figura 25: Triângulo Escaleno



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

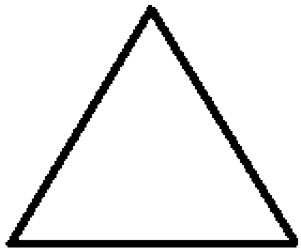
Pela definição acima, todo triângulo equilátero é isósceles; no entanto a recíproca não é verdadeira. Quando um triângulo for isósceles sem ser equilátero, o lado de comprimento diferente é denominado de base do triângulo. Para triângulos equiláteros, qualquer um de seus lados poderá ser chamado de base, mas, nesse caso, raramente usamos essa palavra, isto é, em geral reservamos a palavra base para triângulos isósceles não equilátero.

De acordo, com o item 2.5, em um triângulo, o maior lado está oposto ao maior ângulo e, consequentemente, o menor lado está oposto ao menor ângulo. Portanto, em um triângulo equilátero, os três ângulos internos medem 60°, pois se nesse triângulo, os lados têm o mesmo comprimento, seus três ângulos internos serão congruentes, e como a soma dos três é 180°, cada um é 180° dividido por 3, ou seja, 60°. Da mesma forma, podemos inferir que no triângulo isósceles sem ser equilátero, há dois ângulos congruentes com qualquer medida possível, onde esses ângulos estarão opostos aos lados congruentes.

Sabe-se também, que em todo triângulo há três ângulos internos (ângulos formados entre os lados desse polígono, cuja soma é 180° que foi comprovado anteriormente) que podem ser agudo, reto ou obtuso. De acordo com o item (2.6,c), em qualquer triângulo teremos sempre dois ângulos agudos, onde o terceiro poderá ser agudo, reto ou obtuso e, por causa disso, existe uma outra classificação dos triângulos, denominada de classificação dos triângulos quanto aos ângulos. Então, quanto a medida dos ângulos internos interno, um triângulo pode ser:

a) Acutângulo quando os seus três ângulos internos forem agudos;

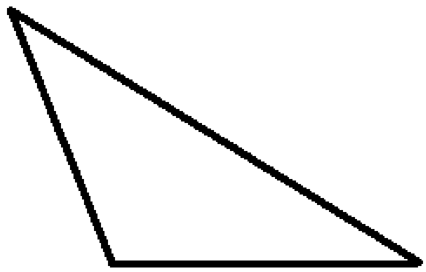
Figura 26: Triângulo acutângulo



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

b) Obtusângulo quando um de seus ângulos for agudo;

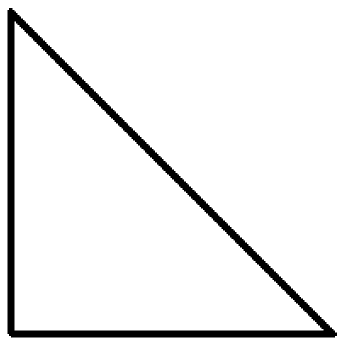
Figura 27: Triângulo obtusângulo



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

c) Retângulo quando um de seus ângulos for reto.

Figura 28: Triângulo retângulo



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

No triângulo retângulo, há uma particularidade em relação aos seus ângulos internos agudos. Eles são complementares, isto é, possuem soma igual a 90°. Sabe-se que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180°, então se um desses ângulos mede 90°, obrigatoriamente a soma dos outros dois é 90°.

Ainda nesse triângulo, podem-se denominar os seus lados de hipotenusa e catetos. A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto, e como esse ângulo é o maior, dos três ângulos internos, afirma-se, pelo item 2.5, que a hipotenusa é o maior lado desse triângulo. Os outros dois lados, que são perpendiculares entre si, são denominados catetos. Há uma relação entre os comprimentos desses lados, denominado de teorema de Pitágoras.

O teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo. Na Geometria Euclidiana, o teorema afirma que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. O enunciado anterior relaciona comprimentos dos lados do triângulo, mas o teorema também pode ser enunciado como uma relação entre áreas de quadrados: em qualquer triângulo retângulo, a soma das áreas dos quadrados cujos lados têm comprimento iguais aos catetos é igual a área do quadrado cujo lado é igual ao comprimento da hipotenusa.

Baseando-se em Marques (2011) o teorema de Pitágoras leva o nome do matemático grego Pitágoras (570 a.C. – 495 a.C.), que tradicionalmente é creditado pela sua descoberta e demonstração, embora seja frequentemente argumentado que o conhecimento do teorema seja anterior a ele (há muitas evidências de que matemáticos babilônicos conheciam algoritmos para calcular os lados em casos específicos, mas não se sabe se conheciam um algoritmo tão geral quanto o teorema de Pitágoras).

Deve-se lembrar ao aluno que o teorema de Pitágoras constitui em um algoritmo para relacionar os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

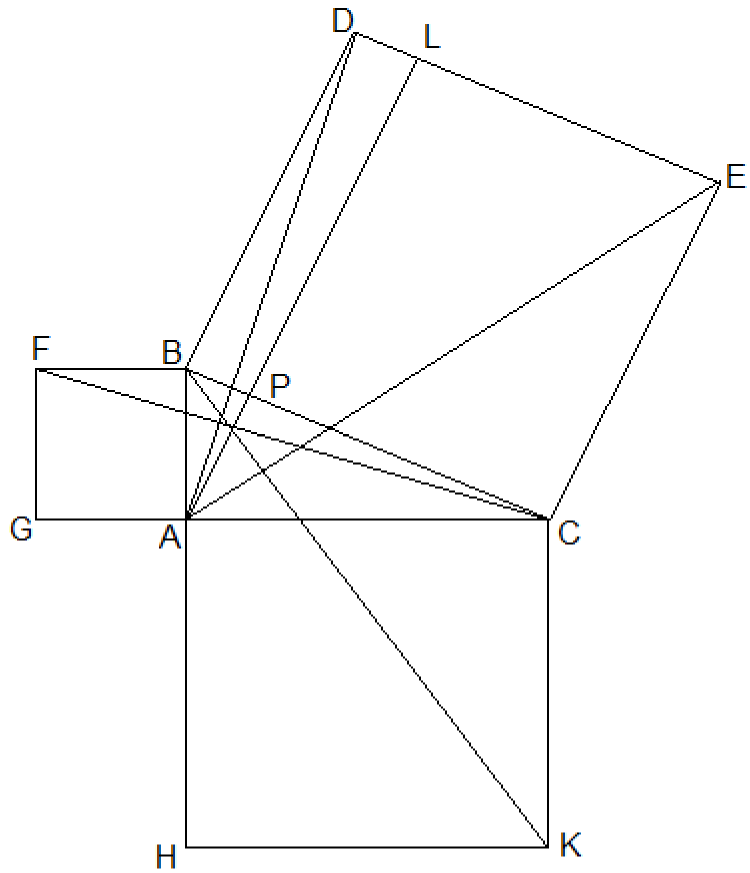
2.12 Demonstração do teorema de Pitágoras

Segundo Marques (2011), existem muitas demonstrações do teorema de Pitágoras, mas não se sabe qual destas provas foi realizada por Pitágoras, ou mesmo, se ele próprio teria descoberto mais de que uma demonstração. Desta forma, pode-se enumerar algumas mais interessantes.

Há uma demonstração no livro de Os Elementos I, de Euclides (2009). Tal demonstração é a seguinte:

Seja ABC um triângulo retângulo em A e seja P o pé da altura relativa a A. Construam-se os quadrados, ABFG, ACKH e BCED, sobre os lados do triângulo dado e prolongue-se a altura AP, como na figura 29, até o ponto L.

Figura 29: O teorema de Pitágoras



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

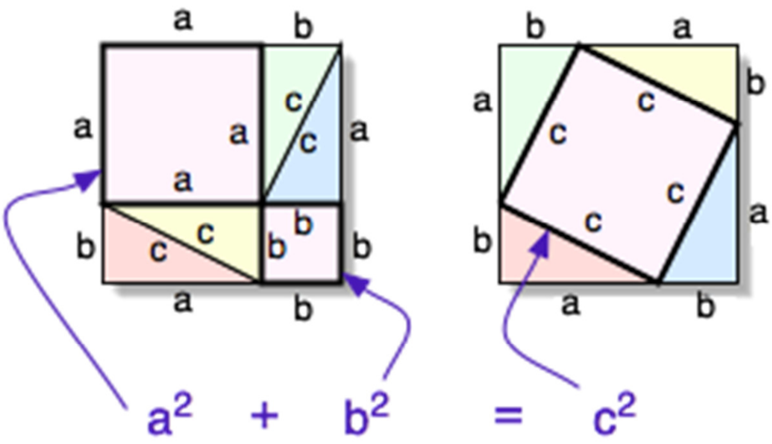
Os triângulos FBC e ABD são congruentes, uma vez que FB = AB e BC = BD e tanto o ângulo $F\hat{B}C$ como o ângulo $A\hat{B}D$ são iguais à soma de um ângulo reto com $A\hat{B}C$. Logo, as suas áreas são iguais, bem como são iguais os respectivos dobros, ou seja, as áreas do quadrado ABFG e do retângulo BDLP.

Analogamente, os triângulos KCB e ACE são congruentes e, portanto, a área do quadrado ACKH é igual à do retângulo CELP.

Logo, a soma das áreas dos dois quadrados, ABFG e ACKH, é igual à soma das áreas dos dois retângulos, BDLP e CELP, ou seja, a área do quadrado BDEC.

A prova que virá a seguir, por comparação de áreas, de acordo com Marques (2011), é considerada pelos historiadores de matemática como sendo a original.

Figura 30: Teorema de Pitágoras por comparação de áreas



Fonte: http://www.google.com.br

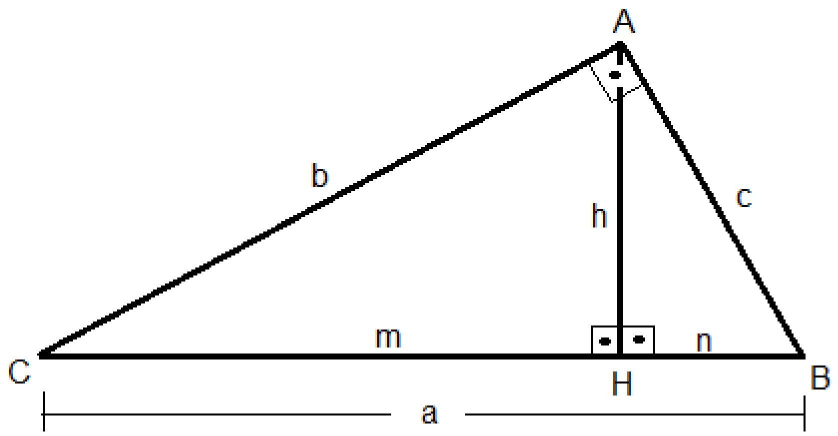
Desenha-se um quadrado de lado (b + a); de modo a subdividir este quadrado em quatro retângulos, sendo dois deles quadrados de lados, respectivamente, a e b (figura30). Traçam-se dois segmentos de reta paralelos a dois lados consecutivos do quadrado, sendo cada um deles interno ao quadrado e com o mesmo comprimento que o lado do quadrado. Em seguida, divide-se cada um destes dois retângulos não quadrados em dois triângulos retângulos, traçando-se as diagonais. Chama-se c o comprimento de cada diagonal. A área da região que resta ao retirar os quatro triângulos retângulos é igual a (b^2 + a^2). Desenha-se agora o mesmo quadrado de lado (b + a), mas colocam-se os quatro triângulos retângulos noutra posição dentro do quadrado: a posição que deixa desocupada uma região que é um quadrado de lado c^2. Assim, a área da região formada quando os quatro triângulos retângulos são retirados é igual a c^2. Como $b^2 + a^2$ representa a área do quadrado maior subtraída da soma das áreas dos triângulos retângulos, e c^2 representa a mesma área, então $b^2 + a^2 = c^2$, ou seja, num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Segundo Lima (2006), esta é, provavelmente, a mais bela demonstração do teorema de Pitágoras e, mesmo sendo uma das mais belas, não está no livro de Elisha Scoott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos) que era realmente apaixonado pelo teorema de Pitágoras, pois durante 20 anos colecionou demonstrações desse teorema, agrupou-as e as organizou em um livro (The Pythagorean Proposition), com 370 demonstrações na sua segunda edição.

2.13 Relações Métricas em Triângulos Retângulos

Usando as propriedades de triângulos semelhantes (item 2.9), pode-se estabelecer proposições denominadas de relações métrica em triângulos retângulos.

Figura 31: Triângulo retângulo e suas relações métricas



Fonte: Autor, usando Paintbrush

Seja ABC um triângulo retângulo em A, com catetos AB = c, AC = b e hipotenusa BC = a (figura 31). Sendo H o pé da altura (segmento de reta que liga um vértice de um triângulo a reta suporte do lado oposto, formando com esta um ângulo reto) relativa à hipotenusa, CH = m, BH = n e AH = h, temos:

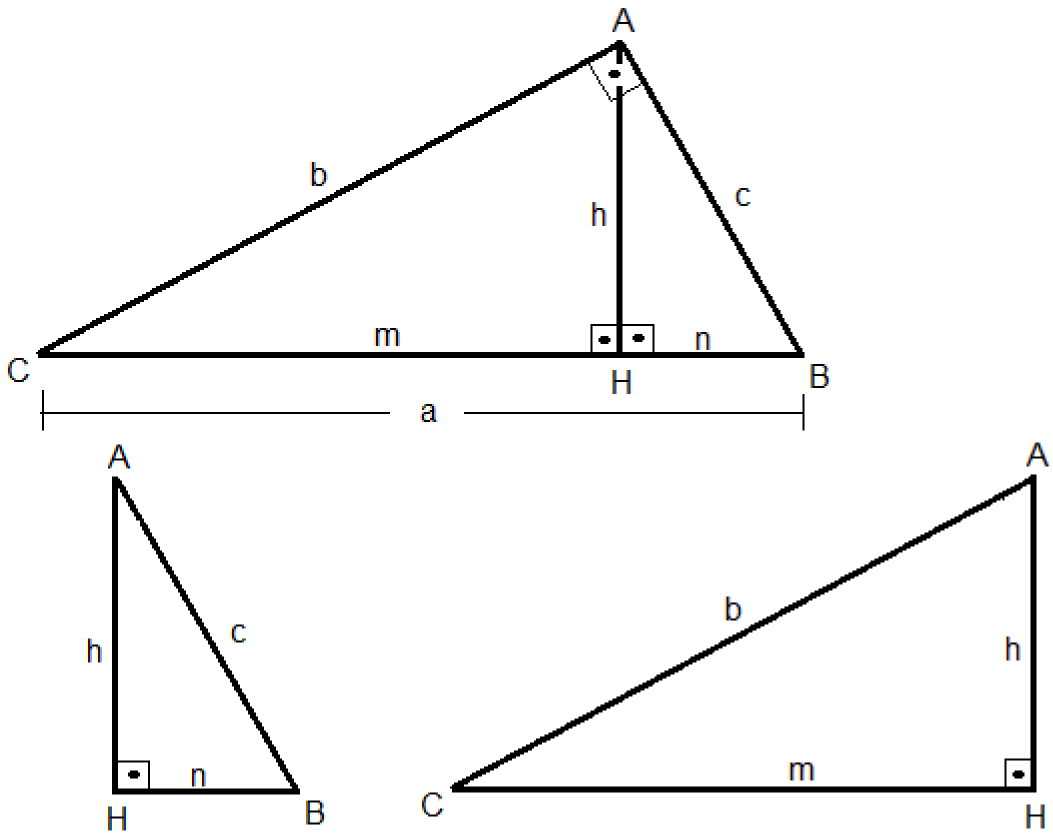
a) $a \cdot h = b \cdot c$
b) $a \cdot m = b^2 \;\; e \;\; a \cdot n = c^2$
c) $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras)
d) $m \cdot n = h^2$

Demonstração

Observe na figura 32 que os triângulos ABC, HAC e HBA, são semelhantes, pois possuem os mesmos ângulos internos $(B\hat{A}C = C\hat{H}A = B\hat{H}A, A\hat{C}B = A\hat{C}H =$

$B\hat{A}H$ e $A\hat{B}C = A\hat{B}H = C\hat{A}H$). Desta forma podemos montar uma proporção com os lados homólogos destes Triângulos.

Figura 32: Triângulos retângulos semelhantes (Relações Métricas)



Fonte: Autor, usando Paintbrush

a) Triângulos semelhantes ABC e HBA

a/c = b/h ⇒ $a \cdot h = b \cdot c$

b) Triângulos semelhantes ABC, HBA e HAC

a/c = n/c ⇒ $a \cdot n = c^2$ (I) e a/b = b/m ⇒ $a \cdot m = b^2$ (II)

c) Somando-se, membro a membro, as equações (I) e (II), do item anterior, teremos:

$a \cdot m + a \cdot n = b^2 + c^2 \Rightarrow a(m+n) = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$, pois, m + n = a

d) Triângulos semelhantes HBA e HAC

$$h/m = n/h \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

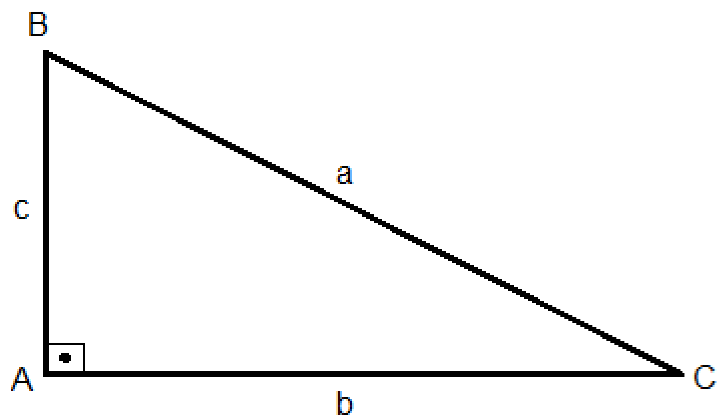
Percebe-se que o item c é outra forma de se demonstrar o teorema de Pitágoras.

2.14 Relações trigonométricas num triângulo retângulo

A palavra “Trigonometria” significa “medida das partes de um triângulo”. Em Geometria Plana, as razões trigonométricas necessárias são: seno, cosseno e tangente.

Num triângulo retângulo qualquer, o seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa. Já o cosseno desse mesmo ângulo é encontrado através da razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa. Caso encontre-se a razão entre o cateto oposto a um ângulo agudo e o cateto adjacente a esse mesmo ângulo teremos a tangente desse ângulo (figura 33).

Figura 33: Razões trigonométricas em um triângulo retângulo



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

$$sen\ A\hat{B}C = {}^{b}/_{a}, \cos A\hat{B}C = {}^{c}/_{a}\ \ e\ \ tg\ A\hat{B}C = {}^{b}/_{c}$$
$$sen\ A\hat{C}B = {}^{c}/_{a}, \cos A\hat{C}B = {}^{b}/_{a}\ \ e\ \ tg\ A\hat{C}B = {}^{c}/_{b}$$

Sabe-se que os ângulos agudos no triângulo retângulo são complementares, isto é, possuem soma igual a 90°, pois a soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°, então como, no triângulo retângulo, um dos seus ângulos internos mede 90°, os outros dois (agudos) somados deve ser igual a 90°.

Verifica-se também, que os senos e cossenos de ângulos complementares são iguais e que possuem tangentes inversas.

Usando o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas de seno e cosseno, pode-se determinar a relação fundamental da trigonometria.

$$c^2 + b^2 = a^2(\times \frac{1}{a^2}) \Rightarrow ({}^{c}/_{a})^2 + \left({}^{b}/_{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow sen^2\left(A\hat{C}B\right) + cos^2\left(A\hat{C}B\right) = 1$$

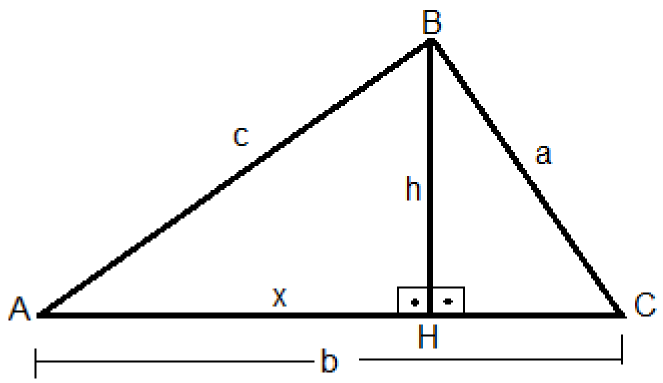
Portanto, o quadrado do seno de um ângulo somado com o quadrado do cosseno desse mesmo ângulo é sempre igual a um.

2.15 Lei dos Cossenos

Parafraseando Morgado et al (2008), pode-se dizer que em um triângulo qualquer, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados subtraído pelo dobro do produto destes dois lados pelos cosseno do ângulo formado entre eles.

Demonstração

Figura 34: Lei dos cossenos



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Seja ABC um triângulo de lados BC = a, AC = b e AB = c. Considera-se ainda a altura relativa ao lado AC, BH = h, e a projeção AH = x do lado AB sobre o lado AC.

Usando o teorema de Pitágoras nos triângulos AHB e BHC, teremos:

$$c^2 = h^2 + x^2 \quad (I) \qquad e \qquad a^2 = h^2 + (b-x)^2 \; (II)$$

Isolando h^2 em (I) e substituindo em (II), ficaremos:

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2 \quad \text{(III)}$$

Observe que no triângulo ABH pode-se dizer que:

$$\cos \hat{A} = x/c \Rightarrow x = c \,.\, \cos \hat{A} \quad \text{(IV)}$$

Cancelando os termos simétricos x^2 e $-x^2$, em (III), e substituindo (IV) em (III), tem-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

Então, por analogia, pode-se afirmar que no mesmo triângulo ABC tem-se:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Percebe-se que nada irá se alterar se algum dos ângulos internos do triângulo for obtuso.

Observe que a lei do cossenos é um algoritmo usado para relacionar as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo com um de seus ângulos, ou seja, caso o comprimento dos lados não se modifique, os ângulos internos terão valore fixos. O que ostra a robustez do triângulo, como polígono indeformável. Isso não ocorre com outros polígonos.

2.16 Síntese de Clairaut

Segundo Morgado et al (2008), observando-se a lei dos cossenos, pode-se escrever:

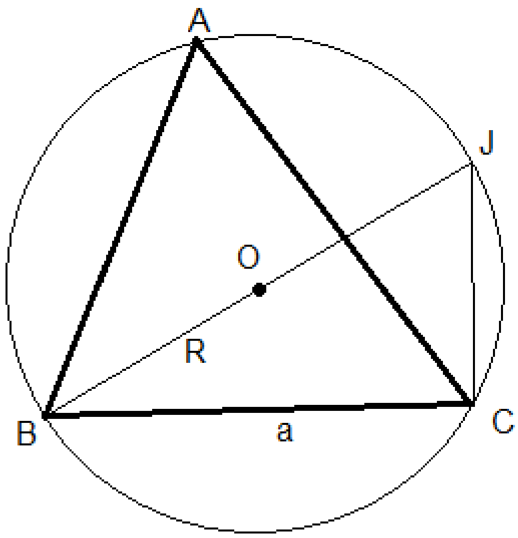
$$\hat{A} < 90° \leftrightarrow \ a^2 < \ b^2 + \ c^2$$
$$\hat{A} = 90° \leftrightarrow \ a^2 = \ b^2 + \ c^2$$
$$\hat{A} > 90° \leftrightarrow \ a^2 > \ b^2 + \ c^2$$

Com a síntese de Clairaut, fica fácil descobrir com o comprimento dos lados do triângulo, se ele é acutângulo, retângulo ou obtusângulo. Para isso, basta usar o quadrado do maior lado e comparar com a soma dos quadrados dos outros dois lados.

2.17 Lei dos Senos

De acordo com Morgado et al (2008), os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos na mesma razão do diâmetro da circunferência circunscrita (circunferência que passa pelos três vértices) ao triângulo.

Figura 35: Lei dos senos



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Demonstração

Seja ABC um triângulo de lados a, b e c inscrito em uma circunferência de raio R e centro O, com diâmetro BJ. Sabendo-se que o triângulo BJC é retângulo, pois o ângulo B$\hat{C}$J está inscrito na circunferência e, portanto, tem medida igual a metade do arco correspondente, que é uma semicircunferência, logo mede 90° e como $\hat{A} = \hat{J}$, pois são ângulos inscritos de mesmo arco correspondentes, então:

$$sen\,\hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{sen\,\hat{A}} = 2R$$

Analogamente, $$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} = 2R$$

Usando a lei dos senos, pode-se demonstrar a robustez do triângulo, pois o comprimento de cada lado é proporcional ao seno do ângulo oposto, ou seja, não se pode alterar a medida dos ângulos internos sem alterar o comprimento dos lados. O que não ocorre com outros polígonos.

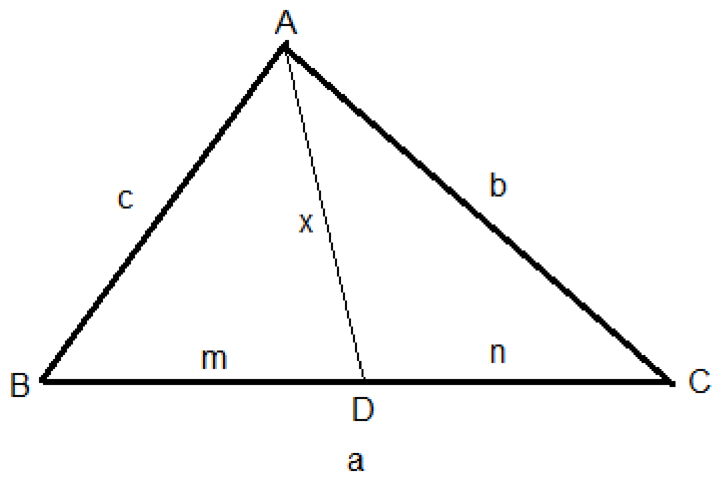
Outra definição importante que se provou, é que todo e qualquer triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo, com a hipotenusa sendo o diâmetro da circunferência.

2.18 Relação de Stewart

A relação de Stewart é uma fórmula que relaciona o comprimento dos três lados do Triângulo, uma ceviana (segmento de reta que une um vértice do Triângulo à reta suporte do lado oposto) qualquer e os dois segmentos determinados pela ceviana sobre o lado correspondente.

Essa relação é utilizada para deduzir fórmulas que são usada para encontrar o comprimento das principais cevianas: mediana, altura e bissetriz interna.

Figura 36: Relação de Stewart



Fonte: Autor, usando Paintbrush

Demonstração

Seja ABC um triângulo de lados a, b e c (figura 36) e x o comprimento de uma ceviana (segmento de reta que une um vértice do triângulo à reta suporte do lado oposto a este vértice) AD que divide o segmento BC em dois segmentos quaisquer m e n.

Usando a lei dos cossenos nos triângulos ABD e ADC, respectivamente, teremos:

$$c^2 = x^2 + m^2 - 2 \cdot x \cdot m \cdot \cos\left(A\widehat{D}B\right) \quad \text{(I)}$$

$$b^2 = x^2 + n^2 - 2 \cdot x \cdot n \cdot \cos\left(180° - A\widehat{D}B\right) \quad \text{(II)}$$

Multiplicando a equação (I) por n, a equação (II) por m e lembrando que cos (180°- A$\widehat{D}$B) = - cos A$\widehat{D}$B, temos:

$$c^2n = x^2n + m^2n - 2 \cdot x \cdot m \cdot n \cdot \cos\left(A\widehat{D}B\right) \quad \text{(III)}$$

$$b^2m = x^2m + n^2m + 2 \cdot x \cdot m \cdot n \cdot \cos\left(A\widehat{D}B\right) \quad \text{(IV)}$$

Somando as equações (III) e (IV) ficamos:

$b^2m + c^2n = x^2(m+n) + mn(m+n)$, mas $m + n = a$,

$$b^2m + c^2n = x^2a + mna$$

2.19 Teorema de Menelaus

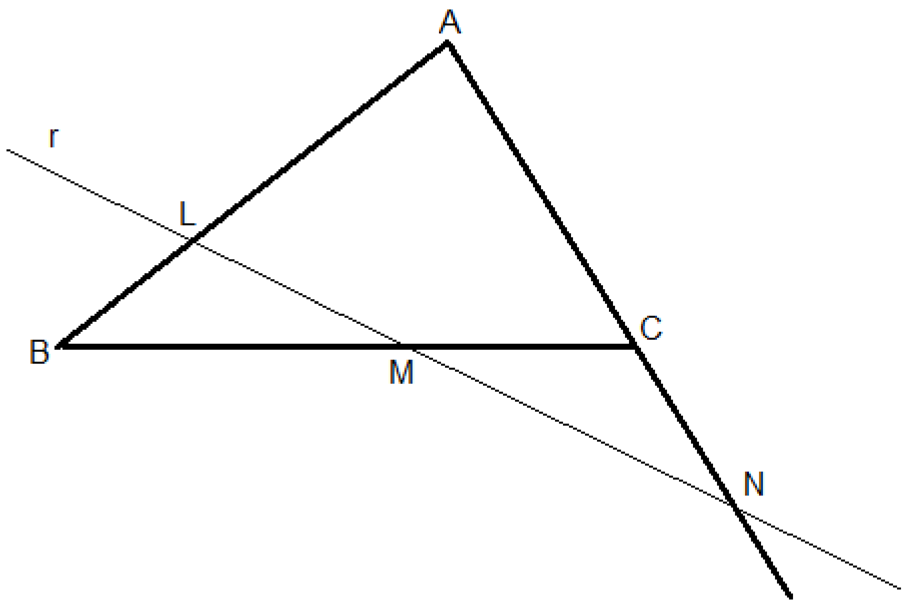
Esse teorema é usado para relacionar o comprimento dos segmentos determinados sobre os lados de um triângulo por uma reta que cruza os lados desse triângulo.

Uma reta qualquer determina, sobre os lados de um triângulo ABC, os pontos L, M e N, como mostra a figura 37. Verifica-se que:

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

.

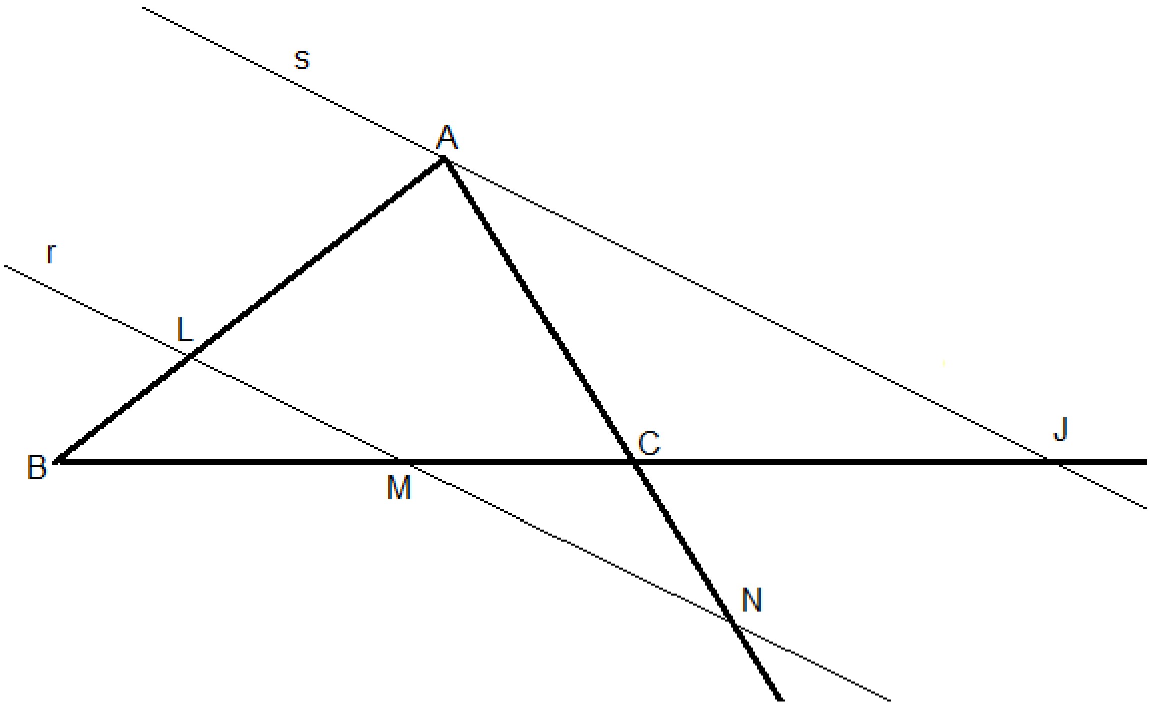
Figura 37: Teorema de Menelaus



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Seja, na figura 38, s // r (reta s paralela a reta r).

Figura 38: Demonstração do Teorema de Menelaus



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Considerando as retas paralelas r e s e as secantes $\overleftrightarrow{BLA}$ e $\overleftrightarrow{BMJ}$, tem-se:

$$\frac{LA}{MJ} = \frac{LB}{MB} \quad OU \quad \frac{LA}{MJ} \cdot \frac{MB}{LB} = 1 \ \ (I)$$

Agora tira-se das secantes MJ e NA.

$$\frac{MJ}{NA} = \frac{MC}{NC} \quad OU \quad \frac{MJ}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1 \ \ (II)$$

Multiplicando as equações (I) e (I), membro a membro, resulta:

$$\frac{LA}{MJ} \cdot \frac{MB}{LB} \cdot \frac{MJ}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1 \ \ OU \ \ \frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

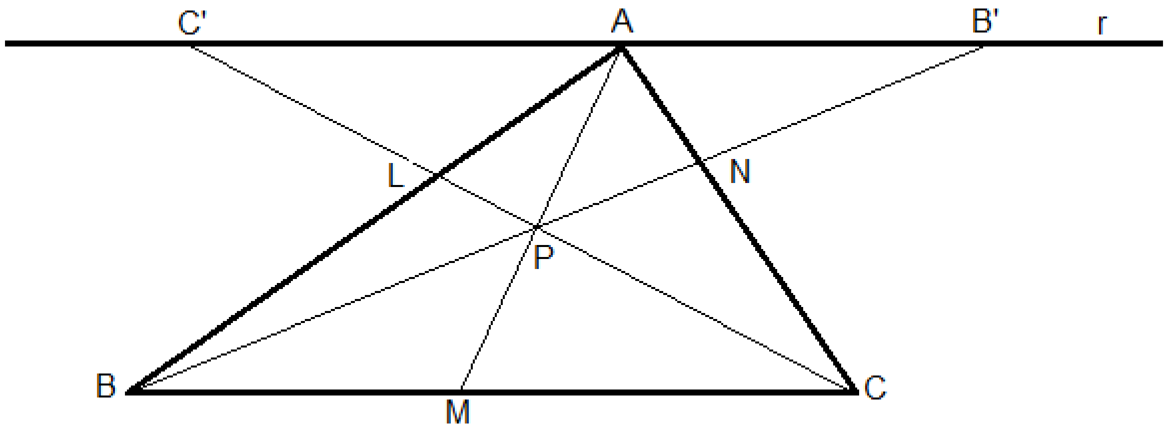
2.20 Teorema de Ceva

Esse teorema deve ser lembrado sempre que se quiser trabalhar com os segmentos de reta determinados sobre os lados de um triângulo por três cevianas que se interceptam em um mesmo ponto.

Considerando em um triângulo ABC três cevianas (segmentos de reta que ligam um vértice do triângulo à reta suporte do lado oposto a esse vértice) AM, BN e CL. Caso essas três cevianas sejam concorrentes em um mesmo ponto teremos:

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

Figura 39: Teorema de Ceva



Fonte: Autor, usando Paintbrush

Sabendo-se que a reta r é paralela à reta suporte do segmento BC, teremos triângulos semelhantes PB'C' e PBC, PAC' e PMC e PAB' e PMB. Usando-se a proporção com os segmentos homólogos dos triângulos semelhantes ficamos:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB'}{AC'} \ (I), \qquad \frac{NC}{NA} = \frac{BC}{AB'} \ (II), \qquad \frac{LA}{LB} = \frac{AC'}{BC} \ (III)$$

Multiplicando as equações (I), (II) e (III), membro a membro, ficamos:

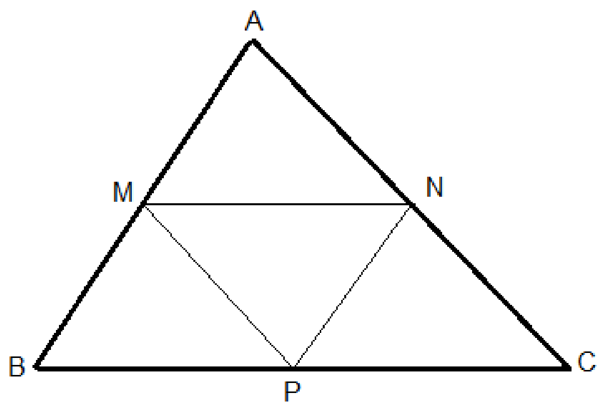
$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{AC'}{BC} \cdot \frac{AB'}{AC'} \cdot \frac{BC}{AB'} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

2.21 Triângulo Medial

Parafraseando Neto (2012), triângulo medial de um triângulo ABC é o triângulo que tem por lados as bases médias (segmento de reta que une os pontos médios de dois de seus lados) de ABC.

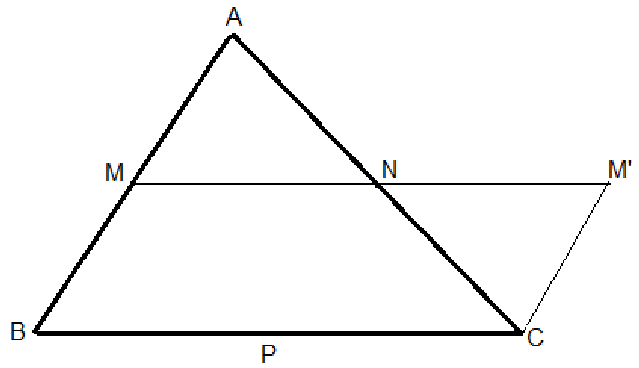
Figura 40: Base média e triângulo medial



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Usando o conhecimento sobre paralelogramos pode-se demonstrar o teorema da base média. Tal teorema nos afirma que qualquer base média do triângulo é paralela a um de seus lados, e ainda que seu comprimento é a metade desse lado.

Figura 41: Teorema da base média



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Considere M e N, os pontos médios dos lados AB e AC do triângulo ABC (figura 41), respectivamente. Então MN será uma base média do triângulo ABC. Tome M' sobre a semirreta $\overrightarrow{MN}$ tal que MN = NM'. Como N é ponto médio de MM' e AC e $A\hat{N}M = C\hat{N}M'$ (ângulos opostos pelo vértice), os triângulo ANM e CNM' são congruentes (caso LAL). Então, como MN é paralelo NM', NA é paralelo a NC, então MA = MB é paralelo e congruente a CM'. Portanto o quadrilátero BCM'M é um paralelogramo (quadrilátero que possui dois de seus lados paralelos e de mesmo comprimento). Analogamente, pode-se provar isso para as outras bases médias.

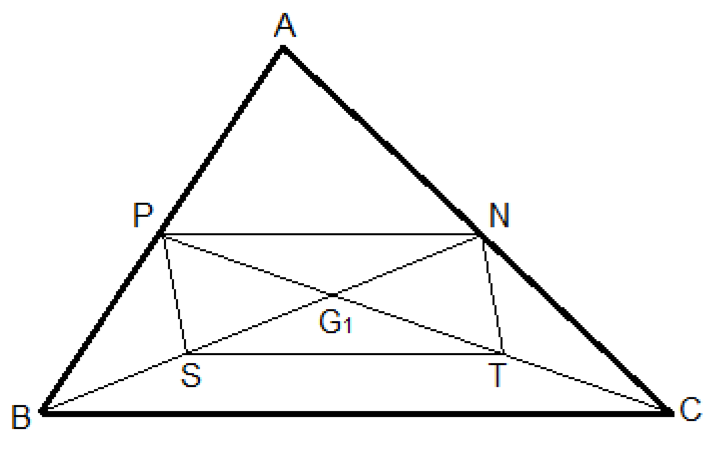
Sabendo-se que na figura 41, a base média MN é paralela ao lado BC, então os ângulos dos triângulos AMN e ABC são congruentes entre si e, por isso, esses triângulos são semelhantes, cuja razão de proporcionalidade é ½, pois M e N são pontos médios de AB e AC. Logo, BC = 2 MN.

2.22 Principais cevianas e pontos notáveis do triângulo

2.22.1 Mediana

A mediana de cada lado de um triângulo é a ceviana que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto. Dessa forma, todo triângulo possui três medianas que se intersectam em um único ponto denominado de baricentro, que divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão 2 : 1.

Figura 42. Mediana e baricentro



Fonte Autor, usando o Paintbrush

Seja o triângulo ABC (figura 42) e considere N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados AB e AC. Portanto, como já mencionado, PN é base média, cujo comprimento é a metade do comprimento de BC, e BN e CP, são medianas correspondentes aos vértices B e C, respectivamente. Dessa forma G_1, ponto de encontro das medianas BN e CP, é o baricentro.

A partir de PN, constrói-se o paralelogramo PNTS, cujos vértices pertençam as medianas BN e CP. Como ST é paralelo e congruente a NP, então ST é paralelo a BC e tem comprimento igual a metade de BC, logo ST é base média do triângulo G_1BC e, por isso, S e T são pontos médios de BG_1 e CG_1, respectivamente.

Verifica-se, também, que G_1 é o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo PNTS, que se cruzam nos seus pontos médios (propriedade dos paralelogramos), então $BS = SG_1 = G_1N$ e $CT = TG_1 = G_1P$. Dessa forma, podemos afirmar que o baricentro de qualquer triângulo divide cada mediana na proporção 2 : 1, a partir do vértice correspondente.

Segundo Alves (2010), caso fosse feita a seguinte pergunta aos professores e estudantes de Matemática: Qual é o centro de massa de um triângulo? Certamente a grande maioria iria responder que seria o baricentro. Mas é importante lembrar que o centro de massa de um corpo (ponto onde fisicamente poderíamos considerar toda a massa do corpo concentrada) depende da distribuição da massa desse corpo. O centro de massa de uma região triangular só é realmente o baricentro se esse triângulo tiver sua massa distribuída de forma homogênea. Caso o Triângulo seja formado apenas por seus lados (como um triângulo feito com um arame fino e homogêneo) o seu centro de massa seria o centro da circunferência de Spieker (circunferência inscrita ao triângulo medial do triângulo formado com o arame), ou seja, seria o encentro (ponto de encontro das bissetrizes do triângulo medial do triângulo de arame).

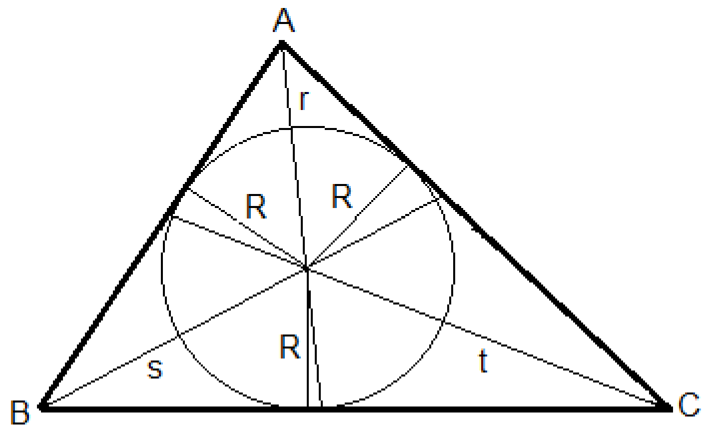
2.22.2 Bissetriz interna

A bissetriz de cada ângulo interno de um triângulo é uma ceviana que une um vértice de um triângulo ao lado oposto, dividindo o ângulo interno em dois ângulos congruentes. As três bissetrizes internas de um triângulo encontram-se num ponto denominado de encentro.

A definição de bissetriz para um ângulo qualquer seria a de uma reta formada por pontos, onde todos eles são equidistantes aos lados do ângulo.

A demonstração proposta por Neto (2012) utilizou bem o conceito de bissetriz de um ângulo. Suponha um triângulo ABC, sendo r, s e t, respectivamente as bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}\ e\ \hat{C}$ e I o ponto de intersecção das retas r e s. Como I pertence a r, então I é equidistante aos lados AB e AC, mas I também pertence a s e, por isso, também é equidistante a AB e BC. Logo, I é equidistante a AC e BC, portanto I pertence a t, sendo o ponto de intersecção das três bissetrizes, denominado incentro, que também é o centro da circunferência inscrita ao triângulo ABC, cujo raio (R), denominado de apótema, é exatamente a distância do incentro a cada lado do triângulo (figura 43).

Figura 43. Bissetriz interna e incentro



Fonte Autor, usando o Paintbrush

2.22.3 Altura

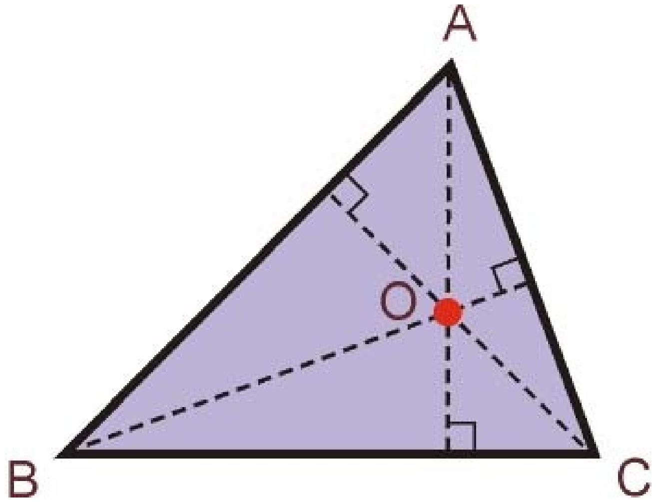
Altura de um triângulo é a ceviana que une um vértice de um triângulo qualquer à reta suporte do lado oposto a esse vértice. Todo e qualquer triângulo possui três alturas que se encontram num ponto denominado de ortocentro.

Sobre o ortocentro de um triângulo ABC qualquer há três casos a considerar:

A) ABC acutângulo

O ortocentro é interno ao triângulo, pois as alturas correspondentes aos três lados são internas.

Figura 44: Ortocentro de um triângulo acutângulo

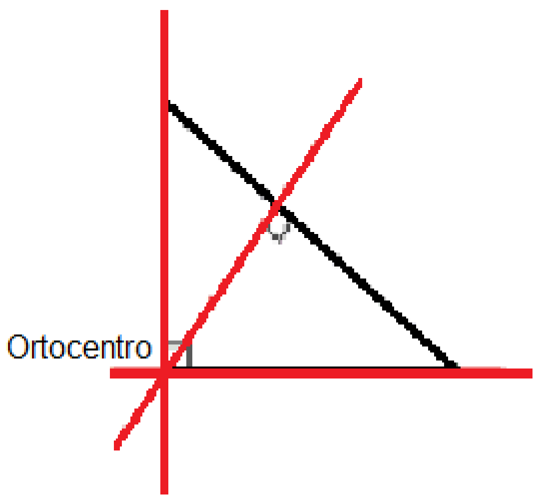


Fonte: http://www.google.com.br

B) ABC retângulo

O ortocentro é o próprio vértice do ângulo reto, pois as alturas correspondentes a cada cateto é o outo cateto. Nesse caso, a única altura interna é a correspondente à hipotenusa (maior lado).

Figura 45: Ortocentro de um triângulo retângulo

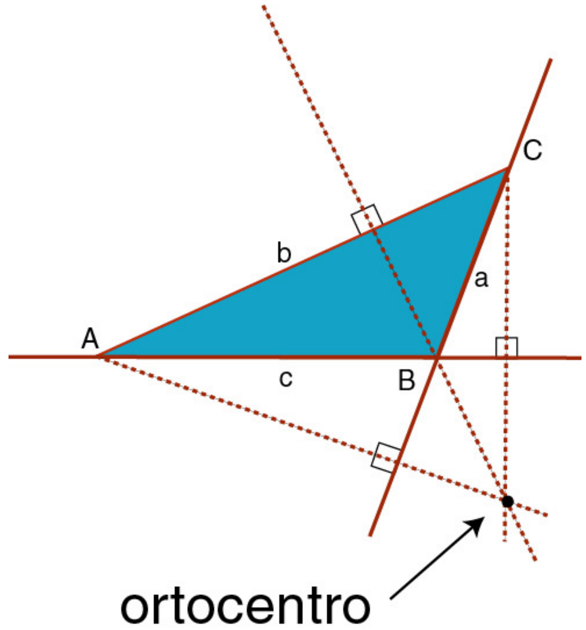


Fonte: Autor, usando o Paintbrush

C) ABC obtusângulo

O ortocentro é externo ao triângulo, pois as alturas correspondentes aos dois menores lados são externas. Nesse caso, a única altura interna ao triângulo é a correspondente ao maior lado.

Figura 46: Ortocentro de um Triângulo Obtusângulo



Fonte: http://www.google.com.br

Ao desenhar um triângulo a partir dos pontos de intersecção das alturas com os respectivos lados de um triângulo tem-se um triângulo órtico.

2.22.4 Mediatriz e circuncentro

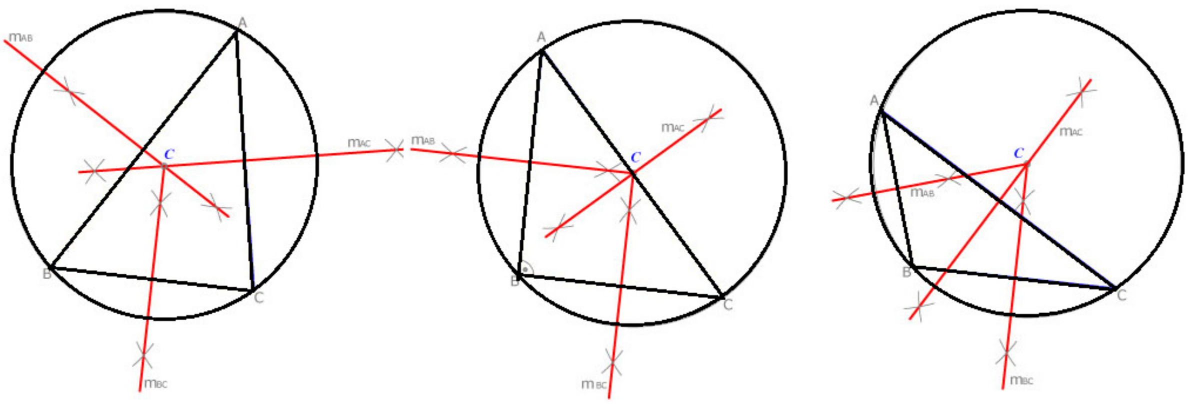
Mediatriz de um segmento é uma reta formada por infinitos pontos onde todos são equidistantes às extremidades do segmento. Como cada lado do triângulo é um segmento de reta, em todos os triângulos há três mediatrizes, uma relativa a cada um dos lados.

Vale salientar que mediatriz não é ceviana, pois as mediatrizes não passam necessariamente pelos vértices do Triângulo, mas as três mediatrizes intersectam-se em um ponto denominado de circuncentro, que é um ponto notável do triângulo.

Neto (2012) demonstra que as três mediatrizes de um triângulo se intersectam num mesmo ponto (circuncentro) usando um triângulo qualquer ABC e considerando que r, s e t são as mediatrizes dos lados BC, AC e AB, respectivamente. Considera que O seja o ponto de intersecção das mediatrizes r e s. Como O pertence a r, então O é equidistante aos vértices B e C. Da mesma forma, se O pertence a s, então será equidistante aos vértices A e C. Portanto, se O é equidistante aos vértices A e B, então O pertence a t, provando eu as três mediatrizes se intersectam num mesmo ponto, que é o circuncentro. Ponto este que é equidistante aos três vértices do triângulo e, por isso, centro da circunferência que passa por esses pontos (circunferência circunscrita). Então podemos concluir que o circuncentro de um triângulo qualquer é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo (circunferência que passa por todos os vértices de um polígono).

Deve-se lembrar que o circuncentro só é interno ao triângulo quando este é acutângulo. Quando é retângulo o circuncentro está no ponto médio da hipotenusa e se for obtusângulo, será externo. Essa posição do circuncentro pode ser facilmente observada, lembrando-se da ideia de ângulo inscrito em uma circunferência, onde sua medida é igual a metade do arco correspondente. Por esse motivo, um triângulo retângulo sempre poderá ser inscrito em uma semicircunferência, onde sua hipotenusa será o diâmetro da referida circunferência. Por isso que podemos afirmar que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo tem comprimento igual à metade do comprimento da própria hipotenusa, ou seja, essa mediana será igual ao raio da circunferência circunscrita ao referido triângulo (figura 47).

Figura 47: Circuncentro de um triângulo



Fonte: http://www.google.com.br

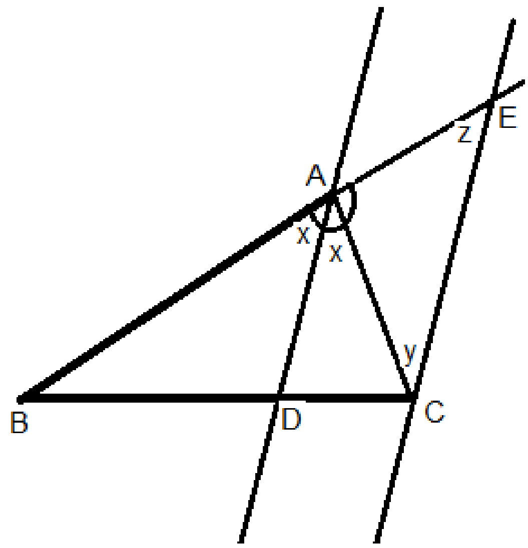
Uma conclusão que pode passar despercebida sobre esses pontos notáveis é a que o circuncentro de um triângulo ABC coincide com o ortocentro do Triângulo medial.

2.23 Teorema das bissetrizes

Segundo Morgado et al (2008) as bissetrizes interna e externa, de um triângulo, dividem o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.

Demonstração:

Figura 48: Teorema da bissetriz interna

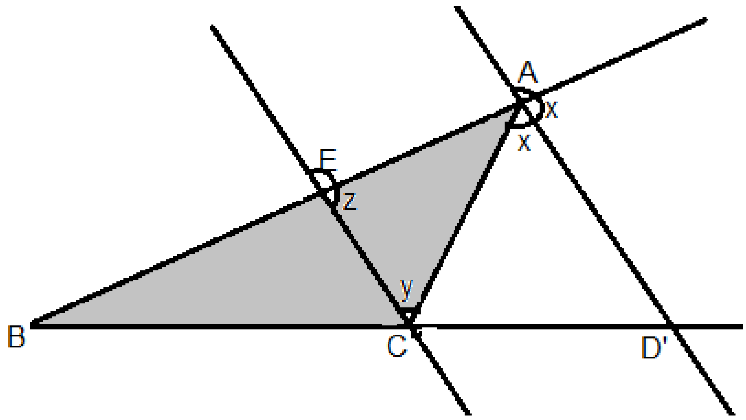


Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Seja AD a bissetriz interna (reta que divide o ângulo em dois ângulos congruentes, isto é, de mesma medida) do ângulo interno de vértice A do triângulo ABC, mostrado na figura 48. Em seguida traça-se uma reta CE paralela a AD. Desta forma, teremos os ângulos $\hat{x}(D\hat{A}C)$ = $\hat{y}$ (por serem alternos internos) e $\hat{x}(D\hat{A}B)$=$\hat{z}$ (por serem correspondentes). Portanto, pela reflexividade, teremos que $\hat{y} = \hat{z}$. Logo, o triângulo ACE é isósceles e teremos AE = AC.

Usando o teorema de Tales (Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhe-se pontos Ae A' ∈ r, B, B'∈ s e C, C' ∈ t, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$) teremos que $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, e como AE = AC, $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

Figura 49: Teorema da bissetriz externa



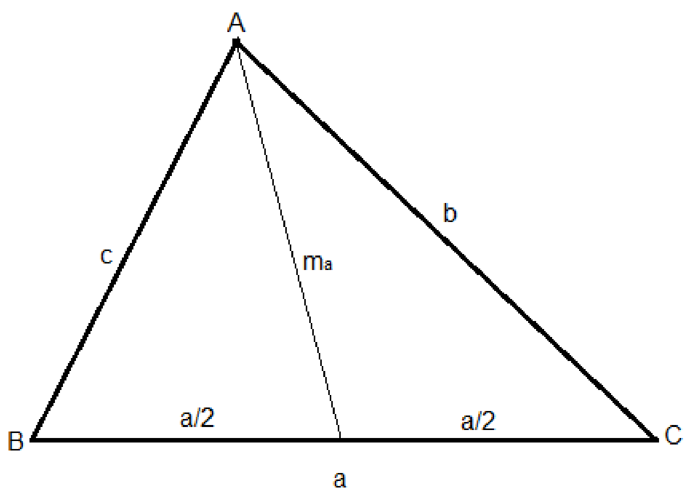
Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Considera-se a bissetriz do ângulo externo de vértice em A (AD') (figura 49). Traça-se CE paralela a AD'. Teremos os ângulos $\hat{x}(D'\hat{A}C)$ = $\hat{y}$ (por serem alternos internos) e $\hat{x}$ = $\hat{z}$ (por serem correspondentes). Então o triângulo ACE, por ter dois ângulos congruentes, será isósceles e, por isso, AE = AC. Usando novamente o teorema de Tales, teremos que $\frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, e como AE = AC, $\frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

2.24 Cálculo do comprimento das principais cevianas

A) Mediana

Figura 50: Comprimento de uma mediana



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Usando a relação de Stewart no triângulo ABC (figura 50) de lados com comprimentos a, b e c e mediana relativa ao lado BC = a, cujo comprimento é m_a, tem-se:

$$b^2 \cdot {a}/{2} + c^2 \cdot {a}/{2} = {m_a}^2 a + {a}/{2} \cdot {a}/{2} \cdot a \;\Rightarrow\; {b^2}/{2} + {c^2}/{2} - {a^2}/{4} = {m_a}^2 \Rightarrow$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

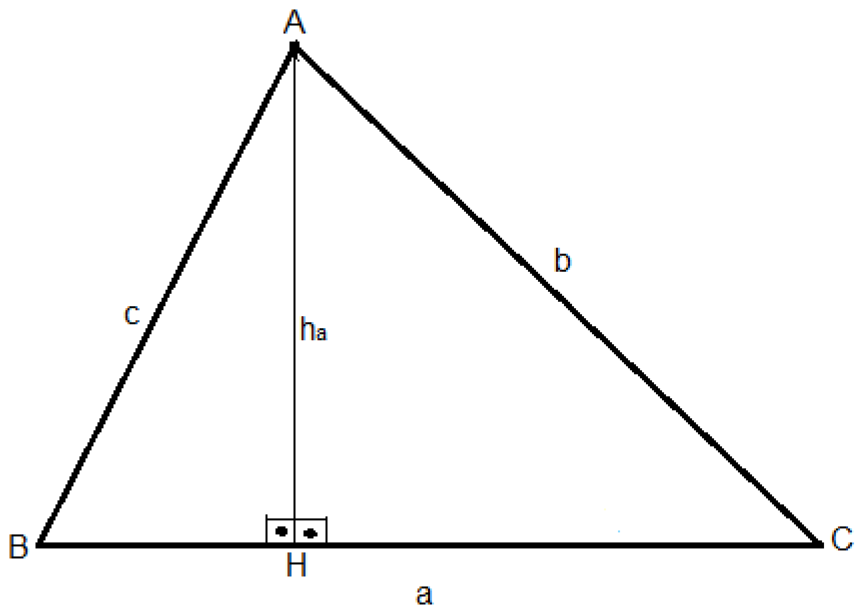
Analogamente fica:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

B) Altura

Figura 51: Comprimento de uma altura



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC de figura 51, tem-se:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\hat{B}$$

Como $c \cdot cos\hat{B} = BH$, pode-se afirmar que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo ABH, fica:

$$h_a{}^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_a{}^2 = \frac{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_a{}^2 = \frac{(2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_a{}^2 = \frac{(2ac + c^2 + a^2 - b^2)(2ac - c^2 - a^2 + b^2)}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_a{}^2 = \frac{[(a + c)^2 - b^2][(b^2 - (a - c)^2]}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_a{}^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)}{4a^2} \qquad (I)$$

Sabe-se que: $\begin{cases} a + b + c = 2p\ (perímetro)\ (II) \\ b + c - a = 2(p - a)\ \ (III) \\ a + c - b = 2(p - b)\ \ (IV) \\ a + b - c = 2(p - c)\ \ (V) \end{cases}$

Substituindo (II), (III), (IV) e (V) em (I):

$$h_a{}^2 = \frac{16p(p - a)(p - b)(p - c)}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

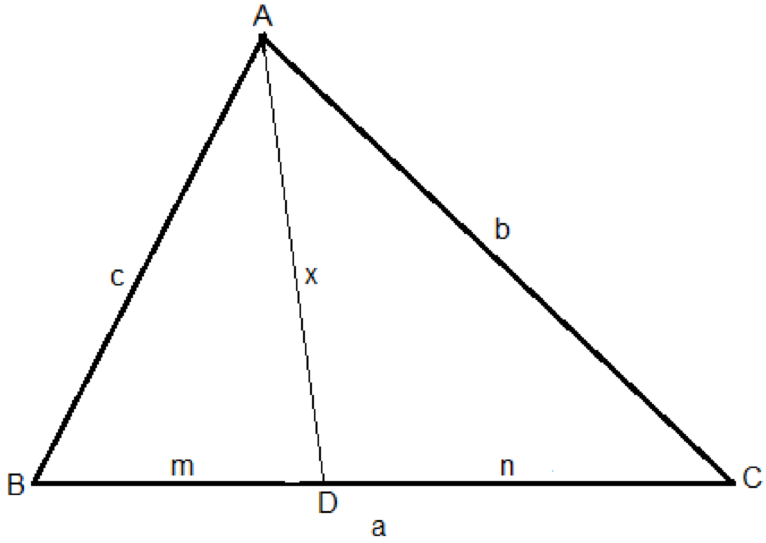
Analogamente, tem-se:

$$\Rightarrow h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$\Rightarrow h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

C) Bissetriz Interna

Figura 52: Comprimento de uma bissetriz interna



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Na figura 52 tem-se um Triângulo ABC, de lados a, b e c. Considere a bissetriz x, do ângulo interno com vértice em A. Essa bissetriz determina sobre o lado a, dois segmentos de reta, m e n.

Usando o teorema da bissetriz interna e considerando que m + n = a, tem-se:

$$n = \frac{ab}{b+c} \quad e \quad m = \frac{ac}{b+c}$$

Usando a relação de Stewart fica:

$$b^2m + c^2n = x^2a + mna \;\Rightarrow\; \frac{b^2ac}{b+c} + \frac{c^2ab}{b+c} = x^2a + \frac{a^2bca}{(b+c)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{bc(b+c)}{b+c} = x^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \;\Rightarrow\; \frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{bc \cdot 2p \cdot 2(p-a)}{(b+c)^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

Analogamente tem-se:

$$x_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$x_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$

$$x_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

2.25 Área de um Triângulo

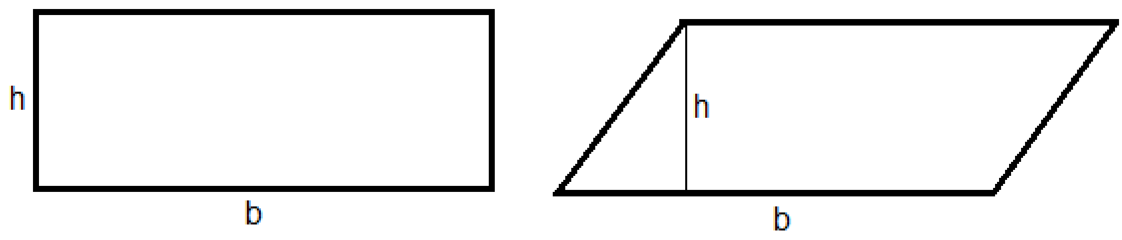
De acordo com o Houaiss (2010), área é a medida de uma superfície plana, ou seja, uma região formada por infinitos pontos coplanares, isto é, pontos que pertencem a um mesmo plano.

Segundo Lima et al (2006), medir uma grandeza significa compará-la com uma outra de mesma espécie tomada como unidade. Área é a medida da porção do plano ocupada por uma figura.

Então, para encontrar a área de uma figura deve-se comparar sua superfície com a de outra figura tomada como unidade. O resultado dessa comparação será um número que expressará quantas vezes maior a área da figura será em relação a unidade de área tomada como padrão.

Considerando-se que a área de um retângulo e de um paralelogramo é o produto entre a base e a altura do polígono (figura 53), tem-se uma forma de encontrar a medida de uma superfície triangular.

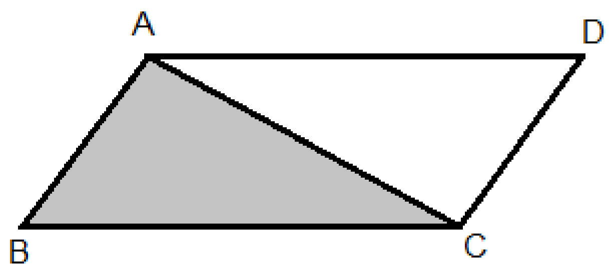
Figura 53: Área de um Paralelogramo e Retângulo



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Para obter a área de um triângulo ABC, deve-se escolher um lado para chamar de base. Considere o lado BC, cujo comprimento é b, como a base escolhida e que a altura relativa a essa base tenha tamanho h. Em seguida, a partir do vértice oposto ao lado que foi escolhido como base, traça-se uma reta paralela à base, e depois, de qualquer um dos outros dois vértices, traça-se uma reta paralela ao lado oposto a esse vértice. Forma-se então o paralelogramo ABCD, cuja área é o dobro da área do paralelogramo.

Figura 54: Área de um triângulo



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

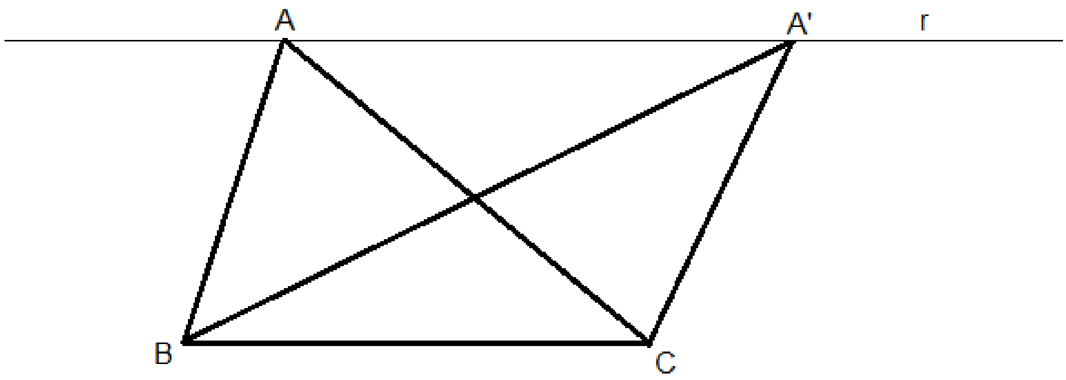
Portanto, a área do triângulo ABC (figura 54) é dada pelo semi-produto entre base (b) e altura (h).

Propriedade 1

A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base.

Observa-se na figura 55 que a reta r é paralela a BC e, por isso, os triângulos ABC e A’BC têm a mesma base e a mesma altura. A base continua sendo o lado BC para os dois triângulos e a altura será a distância de A até a reta suporte de BC, para o Triângulo ABC e de A’ até a reta suporte de BC, para o triângulo A’BC. Como A e A’ pertencem a uma reta paralela a BC, os dois triângulos têm a mesma altura, logo possuem áreas com valores iguais.

Figura 55: Área de triângulos com mesma base e um vértice qualquer pertencendo a uma reta paralela à base



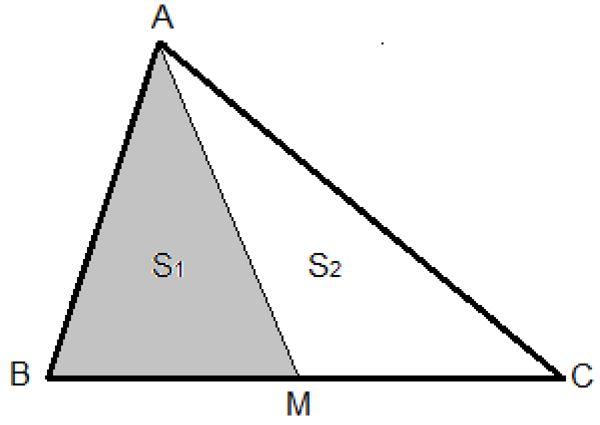
Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Propriedade 2

Num triângulo qualquer, uma mediana divide sua área em partes iguais.

De fato, observando a figura 56, nota-se que os triângulos ABM e AMC, possuem mesma base, pois M é ponto médio de BC, e têm a mesma altura, que é a distância do vértice A à reta suporte do lado BC. Logo, possuem a mesma área.

Figura 56: Divisão de um triângulo por uma mediana



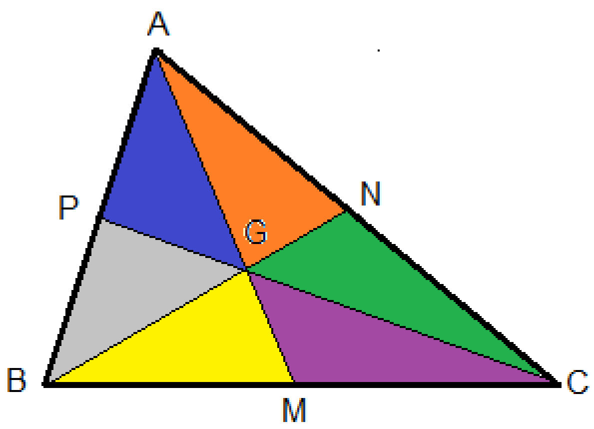
Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Propriedade 3

As medianas de um triângulo qualquer dividem esse triângulo em seis outros triângulos de mesma área.

Seja um triângulo ABC de área S e suas respectivas medianas AM, BN e CP (figura 57).

Figura 57: Divisão de um triângulo pelas três medianas



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

O ponto de intersecção das medianas (G), que é denominado de baricentro, divide BN na proporção 2:1, a partir do vértice B. Então BG = $\frac{2}{3}$ BN. Logo a área do triângulo ABG é 2/3 do triângulo ABN, cuja área é S/2. Desta forma, tem-se:

$$Area_{\Delta ABG} = \frac{2}{3} Area_{\Delta ABN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{3}$$

Analogamente tem-se:

$$Area_{\Delta ABG} = Area_{\Delta BCG} = Area_{\Delta CAG}$$

Como GP é mediana no triângulo ABG, os triângulos APG e BPG têm áreas iguais a S/6. Assim, os seis triângulos têm área S/6.

Propriedade 4

Se dois triângulos têm a mesma altura então a razão entre suas áreas é igual a razão entre suas bases.

Segundo Lima et al (2006), a afirmação acima tem comprovação imediata a partir da fórmula que calcula a área do triângulo.

Realmente se for considerado dois triângulos de mesma altura h, mas com alturas distintas b_1 e b_2. Supondo que suas áreas são S_1 e S_2. Calculando suas respectivas áreas e a razão entre elas tem-se:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1 h / 2}{b_2 h / 2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Propriedade 5

A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Considere dois triângulos semelhantes com bases b e b’, e alturas h e h’.

Como os triângulos são semelhantes, a razão entre as bases é a mesma razão entre as alturas. Essa constante é denominada de constante de proporcionalidade entre os triângulos.

$$\frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} = k$$

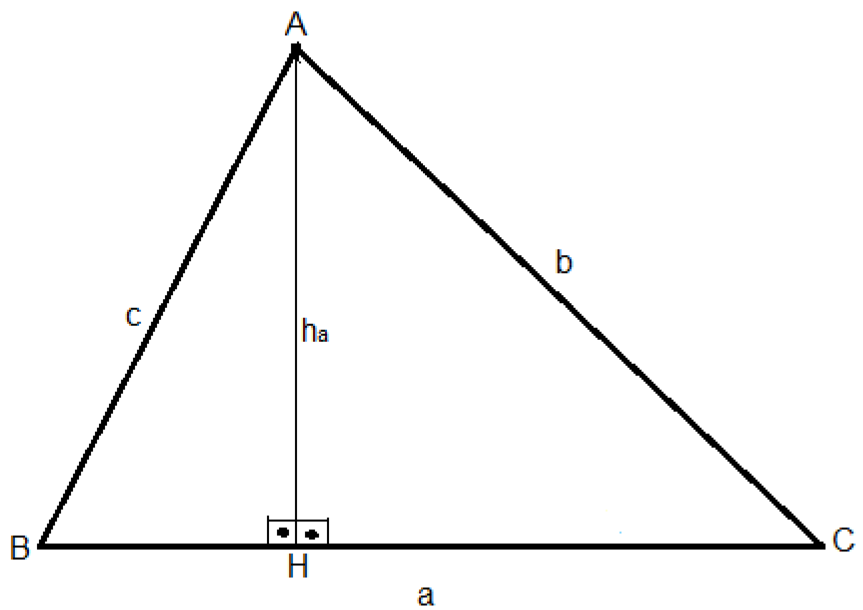
Denominando de S e S', as áreas dos respectivos triângulos e calculando a razão entre elas, tem-se:

$$\frac{S}{S'} = \frac{bh/_2}{b'h'/_2} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} = k^2$$

2.25.1 Área de um triângulo tendo o comprimento dos três lados

Considere o triângulo ABC da figura 58. Seus lados são a, b e c, h_a é sua altura relativa ao lado a e S é sua área.

Figura 58: Fórmula de Heron



Autor: Autor, usando o Paintbrush

Sabe-se que sua área do triângulo é calculada pelo semi-produto entre um lado (base) e a altura relativa a esse lado e que o comprimento da altura h_a é dado por:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

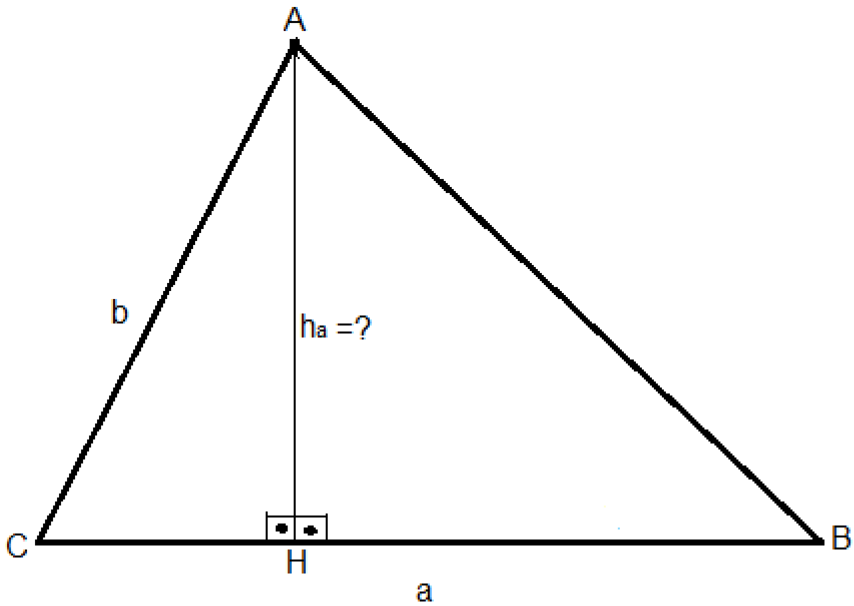
Logo, sua área será dada por:

$$S = \frac{a}{2}h_a = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \;\Rightarrow\; S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

2.25.2 Cálculo da área de um triângulo sabendo o comprimento de dois lados e o valor do ângulo entre eles

Sabe-se que sua área de um triângulo qualquer é calculada pelo semi-produto entre um lado (base) e a altura relativa a esse lado e que o comprimento da altura h_a é desconhecido, mas temos o valor do lado b e o ângulo $A\hat{C}B$ (figura 59).

Figura 59: Área do triângulo com o comprimento de dois lados e de um ângulo



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Seja S a área do triângulo ABC, então:

$$S = \frac{ah_a}{2} \; (I)$$

Sabe-se que:

$$\text{sen}\, A\hat{C}B = \frac{h_a}{b} \quad \Rightarrow \quad h_a = b \cdot sen\ A\hat{C}B \ \ (II)$$

Substituindo (II) em (I), tem-se:

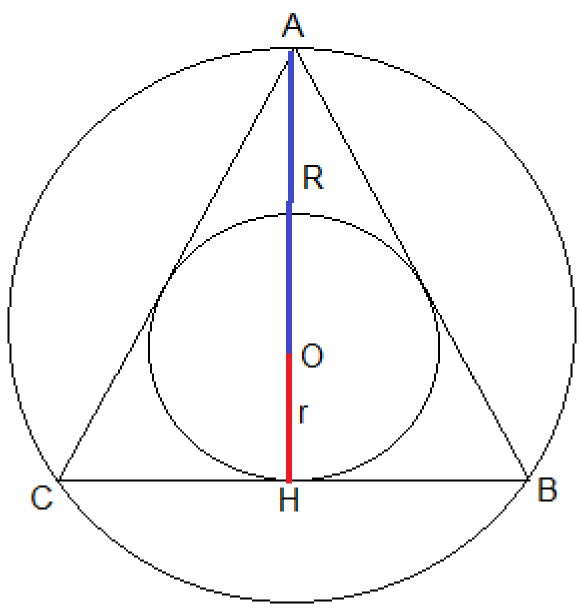
$$S = \frac{a \cdot b \cdot cosA\hat{C}B}{2}$$

Portanto, a área de um triângulo pode ser encontrada pelo produto de dois de seus lados e cosseno do ângulo entre esses lados, dividido por dois.

2.26 O Importante triângulo equilátero e seus pontos notáveis

Como já foi mencionado, os pontos notáveis do triângulo equilátero (figura 60) coincidem.

Figura 60: Triângulo equilátero e seus pontos notáveis



Fonte: Autor, usando o Paintbrush

Seja o triângulo ABC com lado a. Como AH é mediana, altura e bissetriz, pode-se encontrar a medida de AH = h, em função de a das seguintes formas:

A) Teorema de Pitágoras no triângulo AHB

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

B) Seno do ângulo C$\hat{B}$A = 60°

$$sen\ 60° = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad h = a \cdot sen\ 60° \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Como O é o baricentro, incentro e o circuncentro, então AO e OH são, respectivamente, raio da circunferência circunscrita e inscrita (apótema). Mas o baricentro divide cada mediana em segmentos proporcionais a 2:1, logo:

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad e \quad r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Verifica-se que o raio da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero é o dobro da circunferência inscrita no mesmo triângulo.

Para calcular a sua área, basta usarmos a fórmula do semi-produto entre base e altura, usando como base a e altura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$S = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

3. O MÉTODO IRRACIONAL DE ENSINO

Esse capítulo constitui apenas um desabafo para expressar a atual situação de como se encontra a educação em nosso país e a angústia de não ter a mínima ideia de como reverter esse quadro tão negativo.

Todos os anos, é divulgado nos meios de comunicação, o fraco desempenho que os alunos brasileiros têm nos testes internacionais quanto ao desempenho em Matemática. O que se pode fazer pra melhorar tal desempenho? Será que há uma fórmula mágica? Deve-se pensar nessas competições para professores. Inicialmente dentro do município, em seguida, passava-se para uma seleção a nível estadual, para que finalmente viesse uma etapa nacional.

Claro que essa avaliação não poderia ser feita apenas com uma prova pra se resolver questões. Seria necessária uma avaliação sobre a didática de como se deve ensinar determinado conteúdo. Será um sonho? Ou realmente será possível fazer algo, mesmo que em longo prazo (educação não é fácil), para que os nossos jovens, que são lembrados por ser bons de bola, por terem uma sensualidade a flor da pele, possam necessariamente ser lembrados e conhecidos em todo o planeta por suas capacidades intelectuais.

O que vem reverberando entre os professores de ensino fundamental, médio e nos cursinhos, é que pra ser bom professor deve-se procurar uma forma simples de memorização das fórmulas matemáticas, os conhecidos “macetes”. Infelizmente, não é muito comum, o incentivo à busca pelas deduções lógicas ou demonstrações dessas fórmulas. Essa postura não contribui em nada para fazer com que nossos jovens estudantes entendam e, consequentemente, aprendam a gostar de Matemática.

Na presente dissertação, muitos teoremas e propriedades, dos mais simples até aqueles mais complexos, foram enunciados e devidamente demonstrados. Alguns deles, memorizar a fórmula é até mais trabalhoso do que entender a sua demonstração. Mas, mesmo que a memorização seja mais simples, há a necessidade de que os professores e estudantes tentem entender a forma de se chegar à conclusão.

Tem-se um falso dilema entre entender ou decorar na Matemática. O verdadeiro aprendizado da Matemática se faz através da compreensão e memorização. O ideal é que a compreensão preceda a memorização e uma não exclui a outra. Deve-se ter cuidado com as armadilhas colocadas pelos próprios alunos, pois algumas perguntas surgem. Professor, eu preciso saber dessa demonstração ou posso só decorar a fórmula? Sabe-se que não é fácil, pois muitos dos professores enfrentam grandes jornadas de trabalho e turmas numerosas. Nossos jovens são, em grande maioria, resultados de uma sociedade consumista que possui uma renda mal distribuída, levando à procura de outros valores e não o verdadeiro: boa educação.

Todavia, a essência do ensinar se volta, nessa perspectiva, para o modelo de demonstração fazendo com que os alunos conquistem o objetivo da educação, precisamente, o da matemática, que é o compreender e não, simplesmente, fazer. Para isso, o escopo deste trabalho, manifesta, incisivamente, a preocupação de que o conteúdo, eficientemente, ministrado e detalhado, conjuga, a concepção precisa do aprender e não do decorar.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Indissoluvelmente tenta-se, através do ensino, conduzir as necessidades de uma sociedade, no que concerne ao direcionamento profissional e ético de cada cidadão. Aprimorar a prática pedagógica é peça fundamental do profissional professor, além priorizar a real aprendizagem do aluno, quando o fundamental é prioridade. Acredita-se então, que os professores de Matemática possam cumprir duas missões com seus alunos. Uma é a de mostrar que não há razão para temer a Matemática. A outra é a de mostrar aos estudantes diversos modo pelos quais a Matemática está integrada em sua vida diária. Percebe-se que a primeira auxilia a segunda. Assim, o referido trabalho buscou apresentar as propriedades de uma das figuras geométricas mais importantes para a geometria. Além de apresentar as propriedades e teoremas, teve-se o cuidado de informar a maneira mais simples de demonstrar tal propriedade, para que, dessa forma, seja possível encontrar uma maneira mais simples de estuda-la e repassá-la aos alunos. Embora muitas situações consolidem a heterogeneidade de conhecimento apresentada pela pesquisa, vertentes se unem por relações norteadoras da experiência cotidiana, vivenciada pelo profissional matemático, além dos estudiosos pesquisados.

Contudo, com o objetivo de descobrir um modelo para que o aluno venha identificar os triângulos quanto a sua classificação, quanto aos lados e ângulos, tanto na nomenclatura quanto no desenho, bem como realizar demonstração da condição de existência levando-se em conta o comprimento de seus lados. Como também, permitir que o aluno, possa desenhar todos esses triângulos e identificar suas cevianas e seus pontos notáveis, além de demonstrar, com toda a precisão e atenção necessária, as propriedades e teoremas que norteiam o conhecimento sobre tal polígono. Além, ainda, de verificar a existência e a demasiada importância dos triângulos nas estruturas de cobertura e de sustentação em algumas edificações antigas e modernas e, também no uso estrutural de equilíbrio de móveis e imóveis.

Constatou-se que para acontecer o desenvolvimento esperado é necessária a observação mais bem apurada do conteúdo oferecido pelos livros didáticos, pois, é notado em grande escala o desprezo de informações pertinentes à base formadora do conceito geométrico, em especial do polígono triângulo. Outrossim, propositalmente, foi abordado, neste trabalho, todos os conhecimentos necessários à apresentação em um livro didático, no quesito triângulo, tendo como retorno, a observação de algumas notórias incompatibilidades de uso, no que se refere, aos livros apresentados no meio pedagógico – ensino fundamental e médio.

O ensino da Geometria, se comparado com o ensino de outras partes da Matemática, tem sido o mais desvairador; alunos, professores, autores de livros didáticos, educadores e pesquisadores, de tempos em tempos, têm se deparado com modismos fortemente radicalizantes, desde o formalismo impregnado de demonstrações apoiadas no raciocínio lógico-dedutivo, passando pela algebrização e indo até o empirismo inoperante. Todavia, em detrimento a estes fatores, conclui-se, por vez, que para a aplicabilidade da geometria faz-se necessário o conhecimento por parte do professor, em controvérsia, a não ocorrência desse conhecimento, gera a não identificação da beleza e importância que a Geometria possui para a formação do futuro cidadão.

Diante dessa perspectiva, observa-se a incorreta apresentação didática quando o professor é remetido a ministrar a Geometria baseado apenas em definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; em outros, a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico. Como se isso não bastasse, a Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo. Assim, apresentada aridamente, desligada da realidade, não integrada com as outras disciplinas do currículo e até mesmo não integrada com as outras partes da própria Matemática.

Assim como outras disciplinas passaram por reformas, a matemática também sofreu durante a década de 50, conforme trata a Revista do Professor de Matemática, diante das palavras de Geraldo Ávila (2010). Essa reforma revestiu, principalmente, a Geometria, de uma nova forma de aprendizagem, conduzida por uma didática restrita, quando esta descartou a apresentação das demonstrações, simplesmente, em troca de fórmulas de áreas e volumes, que são apresentadas como simples "decorebas" num verdadeiro insulto à inteligência dos leitores.

A pesquisa bibliográfica feita poderia ter sido feita juntamente com uma pesquisa de campo para se verificar a melhor forma de se ensinar geometria a alunos de ensino fundamental e médio, em especial a função e influência do triângulo na nossa vida, mas pode ser realizada em outro momento.

Espera-se que esse trabalho possa, de alguma forma, despertar um maior interesse nas pesquisas sobre geometria e, consequentemente, interesse nessa espetacular figura: o triângulo.

Com base em tudo o que foi discutido, provoca-se recomendando, a iniciativa de pesquisas futuras para observar a elucidada transformação dos ambientes no contexto: necessidade geométrica, em razão das demais formas, no percurso pós-moderno, fazendo ressurgir à atenção devida para os estudos minuciosos das formas geométricas no cotidiano social, corroborando, com o entendimento menos mecânico de tratar a matemática, em especial à geometria.

REFERÊNCIAS

ALVES. Sérgio. O Centro e massa de um Triângulo. **Revista do Professor de Matemática.** São Paulo, p. 40-46, jan/abr. 2010.

ANDRADE, Maria Margarida de. **Introdução à metodologia do Trabalho científico:** elaboração de trabalhos na graduação. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

ÀVILA. Geraldo. Reflexões sobre o ensino de Geometria. **Revista do Professor de Matemática.** São Paulo, p. 3-8, jan/abr. 2010.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 10ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

BENTLEY, Peter. **O livro dos números: Uma história ilustrada da matemática.** Tradução Maria Luiza X. de A. Borges; revisão técnica Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9:** geometria plana. 8ª.ed. São Paulo: Atual, 2005.

Euclides. **Os elementos.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

GARBI, Gilberto Geraldo. **C.Q.D.:** explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

Importância do triângulo na vida humana. Disponível em: http://www.prof2000.pt/users/secjeste/modtri01/Pg000650.htm Acesso em: 02 fev. 2013.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino.** 3ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

LIMA, Elon Lajes; et al. **Temas e problemas elementares**. 12ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. 5ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MARQUES, Sofia Cardso. **A descoberta do Teorema de Pitágoras.** São Paulo: Livraria da Física, 2011.

MARTINS, Gilberto de Andrade. PINTO, Ricardo Lopes. Manual para elaboração de trabalhos acadêmicos. São Paulo: Atlas, 2001.

MORGADO, Augusto César; et al. Geometria I. 4ª Ed. Fortaleza: VestSeller, 2008.

MORGADO, Augusto César; et al. **Geometria II**: métrica plana. 4ª Ed. Fortaleza: VestSeller, 2008.

Necrópole de Gizé. Disponível em http://www.google.com.br . Acesso em 03 fev. 2013.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar:** Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

STEWART, Ian. **Almanaque das curiosidades matemáticas**. Tradução Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.