UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CARLOS CÉSAR DE OLIVEIRA

GEOMETRIA SONA COMO PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

MOSSORÓ/RN
2014

CARLOS CÉSAR DE OLIVEIRA

GEOMETRIA SONA COMO PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semiárido - UFERSA, Campus Mossoró para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador : Prof. Dr. Odacir Almeida Neves

Mossoró-RN

Dezembro de 2014

O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade de seus autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central Orlando Teixeira (BCOT)
Setor de Informação e Referência

O48g Oliveira, Carlos César.

Geometria sona como proposta pedagógica para o ensino de matemática/ Carlos César de Oliveira -- Mossoró, 2015.
71f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Odacir de Almeida Neves

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação.

1. Geometria. 2. Etnomatemática – Geometria sona. 3. Prática pedagógica - matemática. I. Título.

RN/UFERSA/BCOT/029-15 CDD: 516

Bibliotecária: Vanessa Christiane Alves de Souza Borba
CRB-15/452

CARLOS CESAR DE OLIVEIRA

GEOMETRIA SONA, COMO PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA.

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM : 18 de dezembro de 2014

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Odacir Almeida Neves - UFERSA
Presidente

Walter Martins Rodrigues

Profº. Dr. Walter Martins Rodrigues - UFERSA
Primeiro Membro

Aleksandre Saraiva Dantas

Profº. Dr. Aleksandre Saraiva Dantas - IFRN
Segundo Membro

MOSSORÓ/RN, 18 de dezembro de 2014.

Este trabalho é dedicado especialmente ao meu filho André Ezzi, que trouxe muita alegria e prosperidade. Que no futuro este trabalho sirva-lhe de inspiração.

AGRADECIMENTOS

Sou grato primeiramente a Deus, pela minha vida e por me permitir realizar com êxito este trabalho.

Sou grato a minha esposa Erilene Laurindo e ao meu filho André Ezzi, por todo apoio, carinho e compreensão.

Sou grato a minha mãe Maria José e a meu pai Antônio Evangelista, por darem-me educação familiar para minha vida.

Sou grato aos meus irmãos e amigos, que torceram e acreditaram no meu empenho e dedicação.

Sou grato ao meu cunhado Erivaldo Laurindo, pela força e atenção às minhas dúvidas na construção desse trabalho.

Sou grato ao meu Orientador Prof. Dr. Odacir Almeida Neves pela a orientação e apoio de sempre.

Sou grato ao meu co-orientador Prof. Dr. Josildo José Barbosa da Silva pela orientação na fase inicial desse trabalho.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfe içoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado.

Enfim, agradeço com afeto ao grupo de estudo formado por grandes amigos de Mossoró – RN e de Felipe Guerra – RN, e principalmente aos meus alunos do 3º Ano do Ensino Médio da Escola Estadual Desembargador Silvério Soares, Areia Branca- RN.

“ Verás que um filho teu não foge à luta ”
(Joaquim Osório Duque Estrada)

Resumo

Este trabalho procura mostrar a Geometria Sona como uma prática pedagógica a ser aplicada nas aulas de Matemática, cujo objetivo é inovar o conhecimento matemático tradicional, fazendo com que o aluno renove sua forma de pensar o uso da Matemática em seu cotidiano através da cultura vivenciada pelos povos africanos, especificamente o povo Quioco, do Nordeste da Angola. A Geometria Sona é caracterizada pela confecção de desenhos na areia, composta por pontos e linhas feitos com as extremidades dos dedos, onde se preservam as identidades culturais transmitidas de geração a geração pelo povo Quioco. Este trabalho tem como base teórica a Etnomatemática de Ubiratan D'Ambrósio e outros suportes de estudos de Paulus Gerdes acerca da Geometria Sona africana. A Etnomatemática ligada a Geometria Sona, mostra o quanto é possível aplicar e enriquecer as aulas, não só na prática docente, mas como também na vivência de mundo com conhecimento matemático contextualizado. Como metodologia foram realizadas aulas expositivas acerca da Geometria Sona e aplicações de atividades com os Teorema de Euler, Pick e sequências aritméticas, com alunos do 3º ano do ensino médio da rede pública, na Escola Estadual Desembargador Silvério Soares, no município de Areia Branca-RN, onde foram perceptíveis a participação positiva e o interesse satisfatório dos alunos pelo conhecimento matemático.

Palavras-chaves: Etnomatemática, Geometria Sona, prática pedagógica.

Abstract

This article shows the Sona Geometry as a pedagogical practice to be applied in Math classes, which aims to innovate the traditional mathematical knowledge, making the student renew their thinking the use of Mathematics in their daily lives through culture experienced by African peoples, specifically the Quioco people, north-east Angola. Geometry Sona is characterized by making drawings in the sand, made up of dots and lines made with the ends of the fingers, which preserve cultural identities transmitted from generation to generation by the people Quioco. This work is the theoretical basis of Ethnomatematics Ubiratan D'Ambrosio and other Paulus Gerdes studies media about the geometry African Sona. Ethnomatematics connected to the Sona Geometry, shows how you can apply and enrich the lessons, not only in teaching practice, but also as the world experience with mathematical knowledge in context. The methodology were held lectures about Sona Geometry and activities applications with Euler's theorem, Pick and arithmetic sequences, with students 3 year of high education in public schools, in the State School Desembargador Silvério Soares, in Areia Branca-RN, which were noticeable positive participation and satisfying students' interest in mathematical knowledge.

Key-words: Ethnomatematics, Sona Geometry, pedagogical practice.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

A metodologia de ensino da Matemática em sala de aula sempre foi um desafio na realidade de muitas escolas. A Matemática ministrada de forma tradicional sem ligação com a realidade local e cotidiana, resulta em ações mecânicas sem fundamentações aplicáveis no dia a dia do aluno, gerando assim, problemas de aprendizagem como o bloqueio da disciplina, desinteresse pela ciência, tempestades mentais, baixo rendimento em massa e evasão.

Sabe-se que hoje, deve-se buscar metodologia de ensino que forme o cidadão consciente, com uma aprendizagem completa, sem fragmentação e compartilhamento, que esteja embasada em uma metodologia transdisciplinar. Deve-se apresentar uma Matemática contextualizada, interligada com várias áreas do conhecimento, com sentido cultural e étnico, que não discrimine a cultura do outro e possa formar uma cultura de paz. Isso é possível através de pesquisas em Etnomatemática. Para (D'AMBROSIO, 1990, p. 06),

> *etno* é hoje aceito como algo muito amplo, referente ao contexto cultural, e portanto inclui considerações sobre linguagem, jargão, códigos de comportamento, mitos e símbolos; *matema* é uma raiz difícil, que vai na direção de explicar, de conhecer, de entender; e *tica* vem de dúvida de *techne* , que é a mesma raiz de arte e de técnica. Assim, poderíamos dizer que etnomatemática é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender nos diversos contextos culturais. Nessa concepção, nos aproximamos de uma teoria de conhecimento ou, como é modernamente chamada , uma teoria de cognição.

Matemática, etimologicamente falando, tem tudo haver com a arte de explicar, arte de aprender, arte de conhecer.

> A aventura da espécie humana é identificada com a aquisição de estilos de comportamentos e de conhecimentos para sobreviver e transcender nos distintos ambientes que ele ocupa, isto é, na aquisição de modos, estilos, artes, técnicas - *tica* . De explicar, aprender, conhecer,

> lidar com- *matema* . O ambiente natural, social, cultural e imaginário- *etno* . (D'AMBROSIO, 2007, p. 04)

Diante dessa ideia, tornou-se necessário realizar um estudo de caráter exploratório em uma escola de rede pública no município de Areia Branca/RN, sobre a eficácia da Etnomatemática no arsenal escolar com alunos de 3º ano. Tendo por base a geometria africana, popularmente conhecida como Sona, objetivando fazer uma breve exposição das principais ideias em Etnomatemática que surgiram ao longo de sua história, e procurar visualizar quais podem ser suas aplicações na Educação, ressaltando seu caráter transdisciplinar, assim como na valorização e manutenção de tradições culturais.

A transdisciplinaridade nos traz a compreensão que devemos trabalhar para "construir e reconstruir" nossa autonomia através de atitudes críticas, onde possamos ter uma visão global do conhecimento sem qualquer limite, estimular e ser estimulado para provocar reações ao meio, pois a cultura humana é produto das nossas ações e que essa reflete sobre nós. Devemos ter mentes abertas sobre diferentes temas do nosso dia a dia, se apropriando do princípio da dialógica e do pensamento complexo, para tolerar situações que envolvam religiões, dogmas, superstições, culturas locais, regionais e globais; estando sempre aproveitando situações adversas para a construção do conhecimento, sem arrogância e preconceito; entendendo a realidade sobre várias dimensões.

Partindo desse pressuposto, esta pesquisa foi estruturada em quatro capítulos. No primeiro capitulo fala-se sobre Etnomatemática. Também traz um apanhado sobre uma pesquisada realizada por Paulus Gerdes, matemático e antropólogo, que através de suas investigações, descobriu desenhos tradicionais do povo Tchokwe (Quioco, Cokwe), que habita o Nordeste da Angola, região de Luanda. Povos estes, que adoravam decorar as paredes, pintar cabaças e fazer desenhos na areia como distração.

No segundo capítulo discute-se a metodologia da pesquisa, mostrando passo à passo como os desenhos Sona são construídos e como foi desenvolvido este estudo em sala de aula.

No terceiro capitulo trata-se da aplicação, mostrando que a Geometria Sona pode ilustrar a Matemática no caso plano do Teorema de Euler, em sequências e no Teorema de Pick.

No último capítulo, faz-se uma análise das atividades, buscando levantar reflexões que tragam contribuições que realmente consolidam as práticas de uma civilização distinta dentro de um cenário educacional, compartilhado de forma dinâmica e expressiva acerca da Etnomatemática.

Nas considerações finais, há uma síntese das reflexões que emergem da pesquisa, e sugere direcionamentos para novas investigações, tendo em vista a amplitude e a importância do tema no ensino da Matemática no Brasil.

CAPÍTULO 1

ETNOMATEMÁTICA E GEOMETRIA SONA

1.1 Etnomatemática como um programa de pesquisa

A Etnomatemática foi pensada pela primeira vez em 1975 como um programa de pesquisa pela qual propõe uma nova forma de pensar e agir frente ao pensamento matemático. Segundo D'Ambrosio (2007, p. 17) : "este programa constitui uma ferramenta onde procura compreender o saber/ fazer matemático ao longo da história, contextualizado de diferentes comunidades, povos e nações".

Este programa de pesquisa tem uma postura educacional que busca constantemente o saber, embasado numa postura transdisciplinar, vendo a formação com significado, contextualizada e interligada entre diversas áreas do conhecimento, com atitude ética e consciente frente aos seus direitos e deveres de cidadão. O conhecimento é agregado a valores e atitudes, é construído pela prática e por saberes adquiridos pela vivência de mundo e a intuição, não desprezando o saber popular, mas valorizando o bom senso.

> A Etnomatemática permite o reconhecimento de diferentes formas de fazer matemática, utilizadas pelos grupos sociais em suas práticas diárias, na tentativa de resolver e manejar realidades específicas, as quais nem sempre seriam identificáveis sob a ótica da matemática acadêmica. (HALMENSCHLAGER, 2001, p. 15)

A Etnomatemática está se globalizando. Configura-se agora como um campo de exploração no cenário acadêmico, onde muitos pesquisadores estão interessados em descobrir o que está por trás do programa já assinalado. Estes por sua vez, estão procurando vê-lo como uma saída do problema em que se encontra o ensino da Matemática. E neste panorama globalizado e em transformação de valores éticos, exigem-se conhecimentos contextualizados e transdisciplinar.

Estas transformações globais, refletem também na educação, exigindo não só dos alunos, bem como de quem pratica, garantindo uma nova postura e concretizando formas de pensar. Nesse contexto, a matemática vivenciada por grupos culturais pode extrair o conhecimento, não só matemático, como também conhecimento ético, moral, religioso, histórico, geográfico, ambiental, etc., fazendo dessa forma um conhecimento transdisciplinar, com valores que transcendem a barreira dessa ciência exata e institucionalizada; isso sim acompanha as transformações do mundo.

D'Ambrosio (2007, p. 29) comenta:" Estamos agora vivendo um momento que se assemelha à efervescência intelectual da idade média. Justifica-se, portanto, falar em um novo renascimento. Etnomatemática é umas das manifestações desse novo renascimento".

A Etnomatemática surgiu dessa necessidade, dessa evolução do saber; pois o conhecimento que resulta da modernização do dia-a-dia, aproveitando e desenvolvendo o saber do povo de forma prática e eficiente, traz um grande aliado para os professores, logo não devem ter o luxo de ficar de fora, devem acompanhar os interesses das nações para também entender o que é Etnomatemática. Para isso,é preciso entender melhor esse programa.

Uma das experiências apresentadas por Knijnik (2012), em seu livro: Etnomatemática em movimento - relata sobre uma pesquisa feita por Duarte (2003), que mostra um exemplo de uma Etnomatemática utilizada por um pedreiro para determinar a metade do comprimento de uma parede. E a partir desse exemplo percebe-se a contextualização do saber/ fazer matemático das diversas áreas do conhecimento, agregando atitude ética e consciente dos conhecimentos adquiridos pela prática e vivência de mundo.

> O pedreiro utilizava uma ripa de madeira visivelmente maior que a metade do comprimento da parede. Posicionando uma ripa em uma das extremidades da parede, fazia uma marca com giz no local onde se encontrava o final desta. Fazendo de modo análogo com a outra extremidade. No final havia encontrado um intervalo determinado pela duas marcas de giz. Logo após determinava com a trena a metade desse intervalo, correspondendo o ponto médio dessa parede. A vantagem segundo o pedreiro, é que os números ficavam pequenos e dava para calcular de cabeça, justificando que ele tinha dificuldades para operar com números grandes. (KNIJNIK, 2012, p. 37-38)

Essa Matemática que é utilizada no dia-a-dia, também é feita por alunos, eles vão à feira, compram e precisam saber o valor do troco, com números não inteiros, sabem fracionar determinado componente, mas as vezes quando precisam fazer essas mesmas operações, mostrando os procedimentos matemáticos, não conseguem. Portanto todo o processo de contagem, de operar com números que são usuais no dia-a-dia, fica distante da matemática aplicada na escola, pois se o aluno sabe de cabeça, não interessa ao professor, como comenta Knijnik (2012), sobre entrevistas feitas por Wandere(2007):

> Além de posicionar a Matemática Escolar como um conjunto de jogos de linguagem marcados pela escrita, ele destacou também a necessidade, como aluno, de seguir regras, fórmulas e " mostrar como se faz". Em suas palavras: " Tinha que fazer a conta". (KNIJNIK, 2012, p. 52)

Deve-se também discutir e lecionar a matemática do pedreiro, do comerciante e de outras culturas, levando esse conhecimento e essa prática para perto do aluno e da escola, ou a escola deve ir de encontro a essas práticas. Não há somente uma forma de se calcular o ponto médio, de se multiplicar, contar; ou somente uma geometria, uma aritmética, nem uma é mais eficiente que outra, mas sim uma matemática que seja específica para determinado problema de determinada cultura. Pode ser que a multiplicação do comerciante de carne seja mais compreendida pelo aluno, do que aquela multiplicação padronizada. Vê-se muitos alunos que resolvem tão bem e rápido um problema que surpreende os professores, mas quando se direciona para a formalização e escrita de seu pensamento matemático, estes ficam sem mesmo entender nem saber o que fazer.

A Etnomatemática como programa de pesquisa, busca compreender a cultura do outro, seu dia-a-dia e sua história. Nesse sentido, a contextualização é o fator maior para a aprendizagem, pois é na matemática contextualizada, que percebe-se o desafio de saber aplicar o que estamos fazendo, mesmo levando em consideração que essa aplicabilidade está intimamente relacionada ao cotidiano em diversos cenários culturais.

Logo a Matemática desenvolvida por um grupo, não pode ser superior ou inferior, causando descrédito ao outro, mas sim de grande importância para ambos. Portanto, devemos nos apropriar da Matemática desenvolvida por grupos distintos, valorizando e aprendendo a cultura do próximo.

> Ver um conhecimento matemático construído por diferentes grupos sociais e utilizá-lo para a formação cultural e ética desses grupos é uma forma de inclusão social, rompendo barreiras discriminatórias, tornando-se independente ao conhecimento opressor e a recuperação da dignidade humana e cultural desse povo. A Etnomatemática é embebida de ética, focalizada na recuperação da dignidade cultural do ser humano. (D'AMBROSIO, 2007, p. 09)

Diz ainda que:

> A proposta pedagógica da Etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo[agora] e no espaço [aqui]. E, através da crítica, questionar o aqui e agora. Ao fazer isso, mergulhamos nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural. Estamos,

> efetivamente reconhecendo na educação a importância das várias culturas e tradições na formação de uma nova civilização, transcultural e transdisciplinar. (D'AMBROSIO, 2007, p. 46)

No entanto a Matemática ao qual deve ser realmente ensinada é aquela que pode ser melhor compreendida pelos alunos, isto é, tornando-a mais próxima da sua realidade. E assim haverá mudança no modo de ver a Matemática com novas perspectivas para o ensino aprendizagem e na formação cidadão.

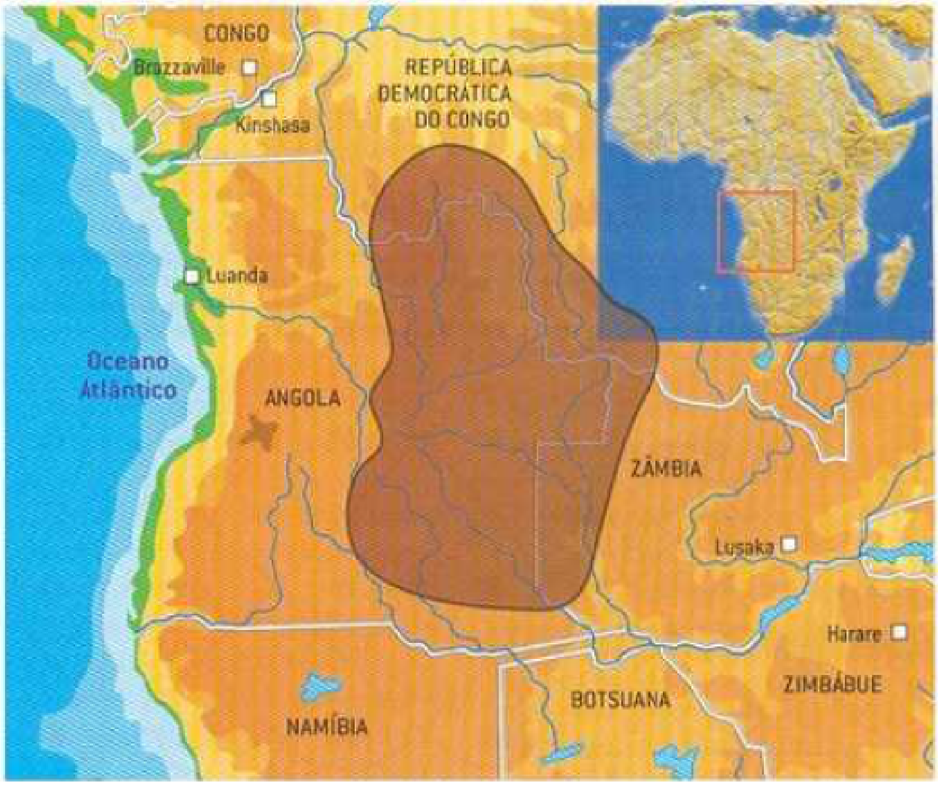
1.2 Etnomatemática da cultura Angolana

No vigésimo boletim da SPM (Sociedade Portuguesa de Matemática), junho de 1991, Paulus Gerdes, que é Matemático e também Antropólogo, mostrou seu interesse pelas frequentes ligações entre a Matemática e elementos culturais das mais diversas origens. As produções das cestarias, ornamentos, armadilhas, jogos e desenhos tradicionais e entre outros, configuram o objeto de suas investigações e divulgações para fins educativos do pensamento Matemático.

Pesquisando sobre esses elementos culturais mencionados anteriormente, destacam-se aqui os desenhos tradicionais do povo Tchokwe (Quioco, Cokwe), que habita o Nordeste de Angola, região de Luanda, com uma população de um milhão de habitantes. Este povo, Cokwe, forma um grande círculo cultural pertencente a uma região situada em todo o Leste da Angola, do Noroeste de Zâmbia e zonas circunvizinhas do Congo/ Zaire, vive praticamente da agricultura e da caça. Também ocupava-se em fazer artesanato e a arte de fundir o ferro; trabalhava com a pintura e a técnica de fabricação de trançados, que são: esteiras, cestos, celeiros para os cereais entre outros. E além disso, fazia tatuagens em seu corpo. Adorava decorar as paredes de suas casas, pintar cabaças e fazer desenhos na areia como passatempo e distração. E são exatamente nesses desenhos que se preservam sua identidade cultural, pois esse povo é até hoje conhecido pela criatividade da arte de seus desenhos.

Os desenhos eram feitos e transmitidos de geração à geração através de suas narrativas orais para os adultos e mais novos. Os conhecedores dos desenhos eram conhecidos como akwa kuta sona (conhecedor de desenho). Estes mais velhos eram considerados como uma elite especial, que passavam saberes de antepassados e responsáveis em transmitirem esse saber para as gerações futuras.

Figura 1 – Território marron dos Tchokwe



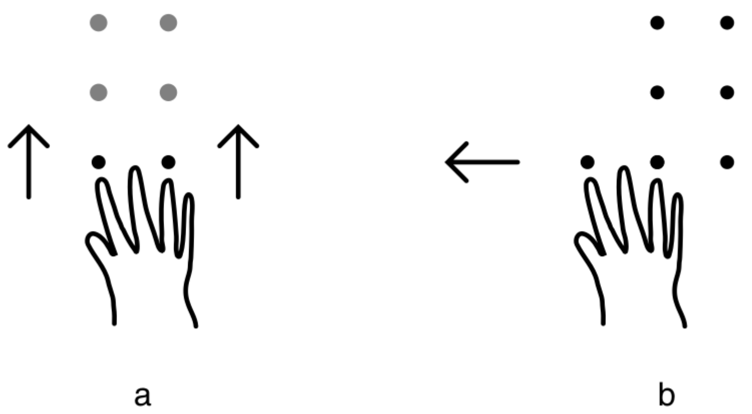
Fonte: (NASTARI, 2001, p. 69)

Nos centros de conversas, como distração, passatempo e passagem da sabedoria dos mais velhos, os Quiocos se reuniam nas aldeias ou no acampamento de caça ou nas sombras de árvores para contar e ouvir histórias, e enquanto conta o narrador vai desenhando no chão, os ouvintes prestam muito atenção na execução do desenho chamado por eles de Sona; os desenhos Sona referem-se: a provérbios, fábulas, jogos, adivinhas, animais, etc.

Na execução desses desenhos, que para o povo Quioco representa sua escrita, composta por pontos e linhas, onde os pontos e linhas são feitos com as extremidades dos dedos estendidos , constrói-se na areia uma rede retangular com filas perpendiculares as colunas. Conforme mostra a figura 2.

É nessa simples tradição que Gerdes (1993a) encontra valores culturais e elementos matemáticos importantes. O que ele passou a chamar de Matemática oprimida, pois era desenvolvida em países subdesenvolvidos, com existência da opressão governamental, da pobreza e da fome, onde temos um termo metafórico para nomear essa Matemática; que por sua vez D'Ambrósio em 1975, utiliza-se pela primeira vez do termo Etnomatemática para caracterizar as diferentes formas de Matemática que são próprias de grupos culturais.

Figura 2 – Marcando a malha de pontos



Fonte: (GERDES, 1993a, p. 24)

Nos desenhos Sona do povo Quioco, encontramos matrizes de pontos, ângulos, curvas, retas, processo de multiplicação, números primos, simetria das figuras, somas de sequências aritméticas, etc., além de tratar de fábulas e histórias do povo Quioco, e assuntos relacionados a interpretação textual e gramatical, História da África, assuntos relacionados a Geografia e temas transversais como Ética e Cidadania. Sendo uma Matemática riquíssima, valiosa e repleta de conteúdo, para Gerdes (1993a, p. 212),

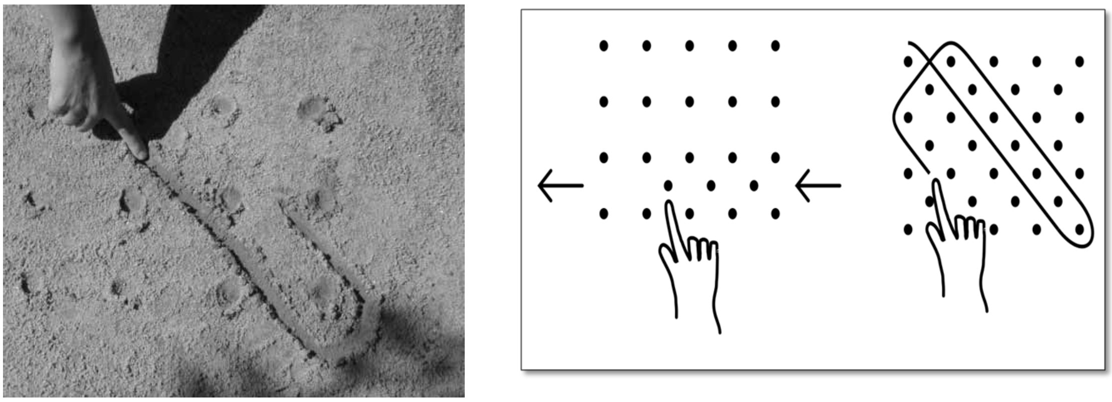
> A minha experiência pessoal de investigação tem-me ensinado que os sona são muito férteis como área para uma exploração matemática mais aprofundada. Fui levado, sucessivamente, à descoberta e análise de curvas-de-espelho, Lunda-designs e simetria lunda, Liki-designs e de vários tipos novos de estruturas algébricas como matrizes cíclicas, de cilindro, de hélice e de tabuleiro de xadrez. No meu livro Aventuras no Mundo das Matrizes (2008) apresento às propriedades maravilhosas de matrizes cíclicas. Outros investigadores tornaram-se interessados nessa direção de pesquisa. Por exemplo, Robert Lange na Universidade Brandeis (Massachusetts, EUA) criou sona-tiles. Franco Favilli e os seus alunos na Universidade de Pisa (Itália) estão a desenvolver sonasoftware. Slavik Jablan (Universidade de Belgrado, Sérvia) e Mark Schlatter (Centenary College of Louisiana, EUA) estão a estudar curvas-de-espelho. Provavelmente, ao entrarem mais investigadores nesse campo de pesquisa, obterão muito mais resultados atrativos. O potencial educacional e científico dos sona demonstra, ainda mais, a força imaginativa e a criatividade dos akwa kuta sona do povo cokwe e a profundidade do conhecimento matemático que eles tinham começado a construir.

O que nos leva a refletir e crer que Matemática é um produto cultural e que cada povo pode produzir sua Matemática específica de acordo com suas necessidades diárias do grupo. Paulus Gerdes (1993b) no seu livro Desenhos da África, tenta mostrar que todos os povos da humanidade, independente de raça, origem social são, em princípio, capazes de descobrir, compreender e desenvolver em seu proveito a ciência matemática.

Figura 3 – Técnica da realização dos desenhos na areia

(a) Desenho de uma rede retangular na areia

(b) Imagem esquemática da linha de malhas



Fonte: (GERDES, 1993a, p. 25)

1.3 Matemática Africana como resgate da cultura brasileira

Vê-se no povo africano um estado de conhecimento e sabedoria que são raramente vistos na cultura nacional. Cunha (2007) afirma que muito das realizações do povo africano no Brasil, ficam subdimensionadas ou não reconhecidas, dado ao tamanho da ignorância reinante no país sobre as nossas origens africanas.

O povo africano tem História, cultura e conhecimento, seja na Arte, na Literatura e na Ciência Matemática. Gerdes (1993b) vê no conhecimento matemático desse povo um sonho, que é a popularização dessa ciência em países como o Brasil e países da África. Como já se sabe que uma forma de produzir Matemática em países africanos, especificamente Angola, é a Geometria Sona. Nela se propaga e divulga seus hábitos, sua crença, sua cultura. D'Ambrosio (1996) comenta que em todas as culturas e em todos os tempos, o conhecimento, que é gerado pela necessidade de uma resposta a problemas e situações distintas, está subordinado a um contexto natural, social e cultural.

Com interesse de estudar a matemática, especificamente a Geometria Sona, que envolve conceitos de ponto, reta, plano, simetria das figuras e sequências aritméticas, Paulus Gerdes vê ainda uma possibilidade de usá-los como certos ritmos aritméticos ou geométricos, chamados de algoritmo, contribuindo mais tarde para trabalhos com computadores. Então pode-se ver que,

> A ausência da história africana é uma das lacunas de grande importância nos sistemas educacionais brasileiros. (...). Tomando como ambiente brasileiro como de exclusões étnicas, os quais denominamos de racismo, existe um processo de criação de credos sobre a inferioridade do negro, do africano e dos afrodescendentes.(CUNHA, 2007)

Logo o ensino de matemática deve estar focado em uma aprendizagem com significado para os educandos, contextualizando os conteúdos com exemplos de matemática de outras culturas. Paulus Gerdes (1991) afirma que os estudos da etnomatemática analisam tradições matemáticas que sobrevivem à atividade diária das populações, procurando possibilidades de incorporá-la no currículo.

CAPÍTULO 2

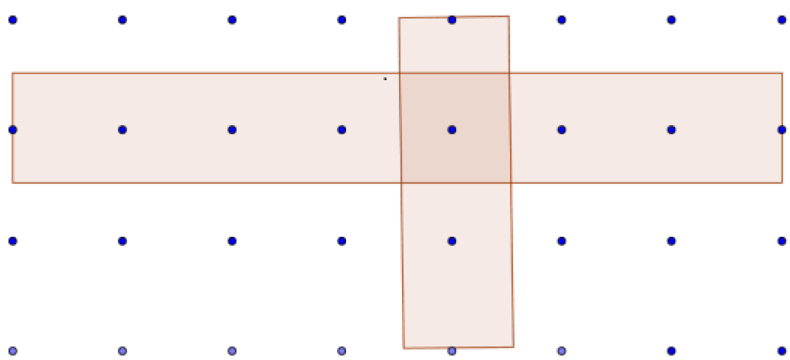
METODOLOGIA

2.1 Entendendo a Geometria Sona

Para a construção de um desenho Sona é necessário fazer uma rede retangular de pontos.

Definição 1. *Seja um retângulo formado por pontos, com f filas perpendiculares a c colunas, designamo-nos de rede retangular de pontos.*

Figura 4 – Rede retangular de pontos

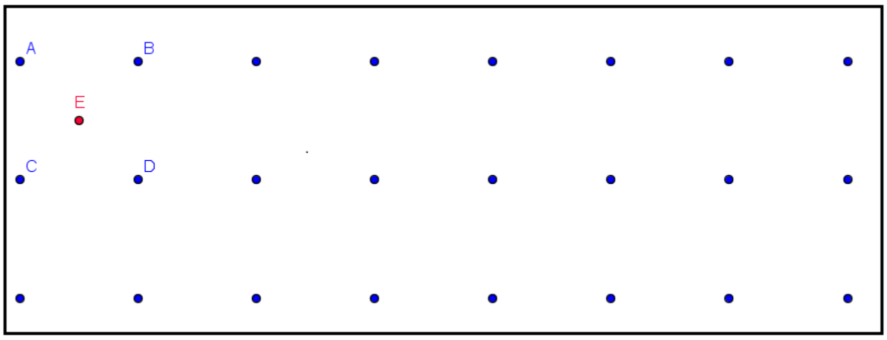


Fonte: Elaborada pelo autor

Também é necessário acrescentar pontos adicionais;

Definição 2. *Chamamos de ponto adicional E o ponto marcado no centro do quadrado formados por quatro pontos A, B, C, D da rede retangular de pontos.*

Figura 5 – Ponto adicional na malha



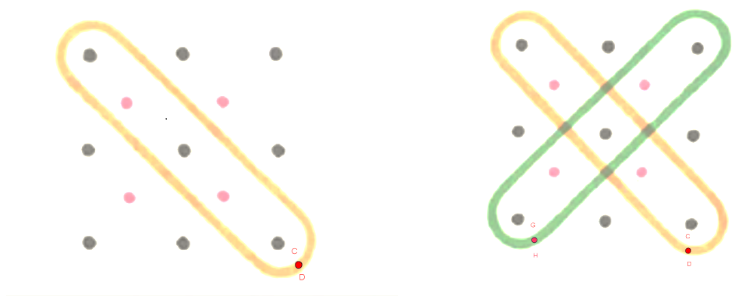
Fonte: Elaborada pelo autor

Dependendo do motivo a ser desenhado, torna-se necessário marcar pontos adicionais em toda a rede retangular de pontos.

Definição 3. *Sejam C e D pontos congruentes no plano, chamamos de linha fechada aquela em que o início coincide com a extremidade.*

Figura 6 – Linha fechada

(a) 1 linha fechada (b) 2 linhas fechadas



Fonte: (GERDES, 1993b, p. 16)

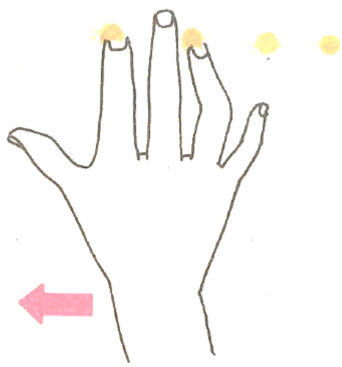
A memorização dos desenhos sona torna-se mais fácil pelos akwa kuta sona (mestre nos desenhos) da seguinte forma: depois de limpar e analisar o chão marca com as pontas dos dedos uma rede ortogonal de pontos equidistantes. São marcados de baixo para cima e do meio para as extremidades, utiliza para isso o dedo indicador e o anelar, (GERDES, 1993b).

Figura 7 – Akwa kuta sona

Fonte: Scientific American, nº 11, p. 65

Ao marcar os pontos seguindo da direita para a esquerda, para garantir que a distância entre dois pontos consecutivos de uma fila seja sempre a mesma, mantém a ponta do dedo anelar no último ponto marcado no terreno, enquanto marca um novo ponto com o indicador.

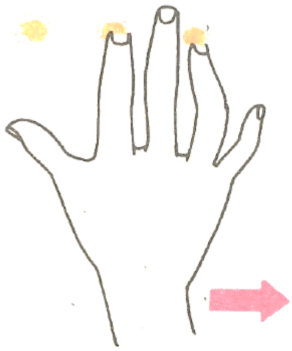
Figura 8 – Marcando pontos da direita para a esquerda



Fonte: (GERDES, 1993b, p. 12)

Quando se move para direita, usa o dedo anelar para marcar novos pontos.

Figura 9 – Marcando pontos da esquerda para a direita



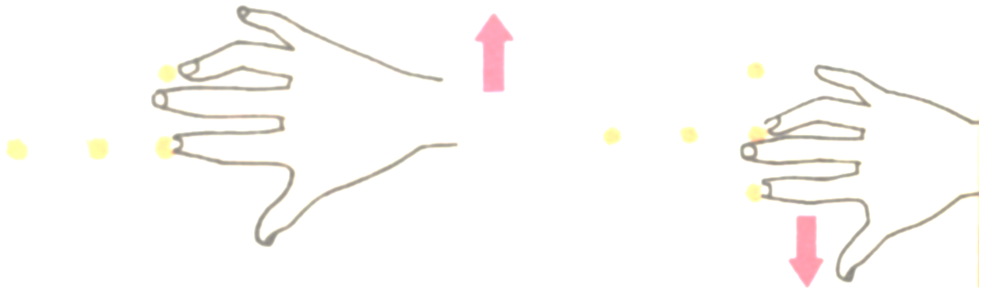
Fonte: (GERDES, 1993b, p. 12)

Quando marca pontos para cima ou para baixo, procede da mesma maneira.

Figura 10 – Marcando pontos para cima e para baixo

(a) 1 linha fechada

(b) Pontos para baixo



Fonte: (GERDES, 1993b, p. 12)

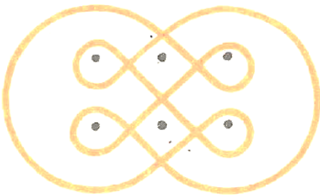
Uma vez marcados todos os pontos necessários a figura, é então desenhada contornando-os, de forma que os pontos ao mesmo tempo guiem e determinem restrições ao desenho.

Há desenhos sona que são construídos com somente uma linha, chamados monodiares e outros são construídos com mais de uma linha, designados por polilineares. A monolinearidade é um valor que os povos Quicos buscavam em seus desenhos, pois de acordo com Paulus Gerdes, no total de 141 desenhos, 61 são monolineares, mostrando que era tido como valor cultural. (GERDES, 1993a, p. 32) diz que : “ Daqui podemos chegar a conclusão de que monolinearidade tinha pelo menos um alto valor e talvez tenha construído um ideal ou norma cultural”.

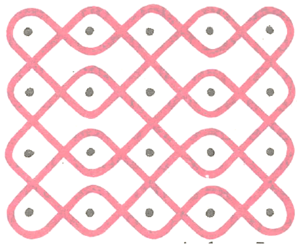
Definição 4. *Um desenho sona é dito monolinear quando o número de linha fechada para contornar todos os pontos de uma rede retangular é único. Na (figura* 11 *) apresentamos alguns sona monolineares.*

Figura 11 – Sona monolineares

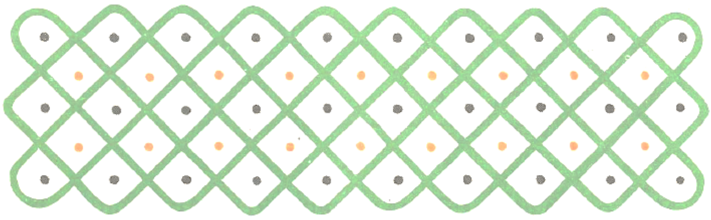
(a) Pata de antílope



(b) Estômago de um leão



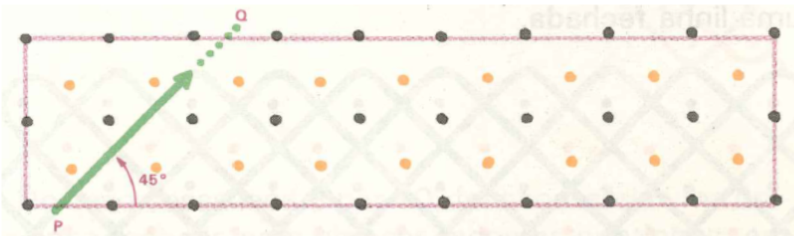
(c) Rede 3 por 10



Fonte: (GERDES, 1993b, p. 20-37)

Para a execução do desenho (Figura 11c) pode-se começar por P e seguir na direção de Q.

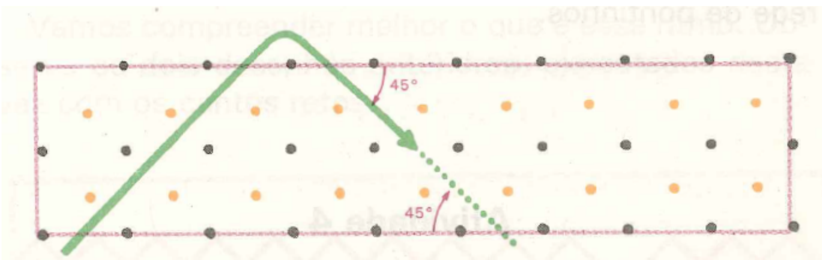
Figura 12 – Linha contornando pontos



Fonte: (GERDES, 1993b, p.19)

A linha PQ faz um ângulo de 45º com o lado do retângulo. Ao chegar no lado oposto do retângulo a linha faz uma curva de 90º, depois da curva a linha faz novamente um ângulo de 45º com o lado do retângulo.

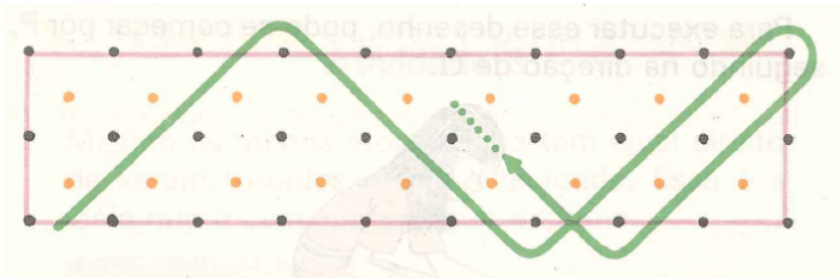
Figura 13 – Construindo um sona



Fonte: (GERDES, 1993b, p. 19)

Quando se chega ao vértice do retângulo, a linha dá um giro em torno dele e volta na mesma direção que vinha antes, mas agora em sentido oposto.

Figura 14 – Construindo um sona



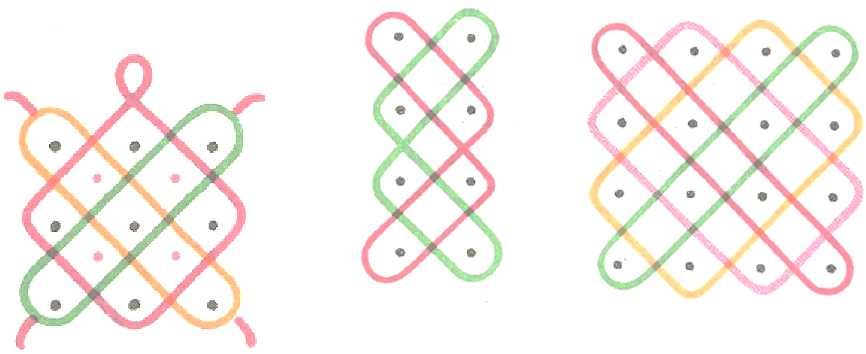
Fonte: (GERDES, 1993b, p. 20)

Depois de abraçar todos os pontos da rede a linha termina onde começou.

Definição 5. *Um desenho Sona é dito polilinear quando o número de linha fechada para contornar todos os pontos de uma rede retangular é maior ou igual a dois. Na figura abaixo alguns sona polilineares.*

Figura 15 – Sona polilinear

(a) Cágado 3 linear (b) Sona 4 por 2, 2 linear (c) Sona 4 por 4, 4 linear

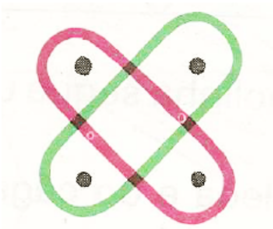


Fonte: (GERDES, 1993b, p. 21-26)

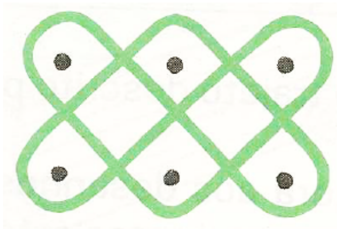
A monolinearidade depende das dimensões da rede de pontos; o povo Quioco já sabia quantas linhas eram necessárias para construir uma leoa de dimensão 4 por 6, dizem prontamente que são necessárias duas linhas fechadas. Ou uma malha 4 por 4 são necessárias 4 linhas fechadas. Paulus Gerdes fez algumas relações entre a malha e os números de linhas necessárias para construir a figura. O interessante é que eles, os Quiocos, com suas experiências, já sabiam matematicamente quantas linhas eram necessárias, logo a Matemática esta embutida nesses desenhos sem que eles esforçassem para descobri-la. A quantidade de linhas para executar o desenho varia, depende deste desenho e das dimensões da rede retangular de pontos. (GERDES, 1993b) investigou vários desenhos:

Figura 16 – Rede retangular com 2 filas

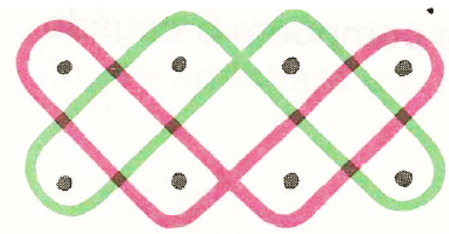
(a) Sona 2 por 2, 2 linear



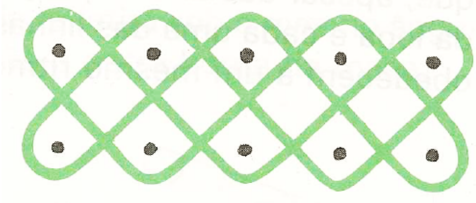
(b) Sona 2 por 3, 1 linear



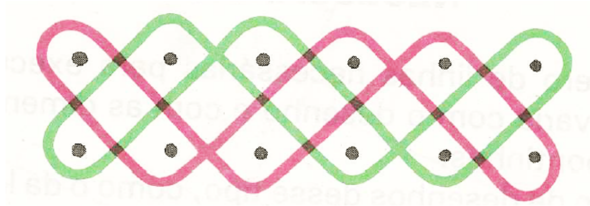
(c) Sona 2 por 4, 2 linear



(d) Sona 2 por 5, 1 linear



(e) Sona 2 por 6, 2 linear



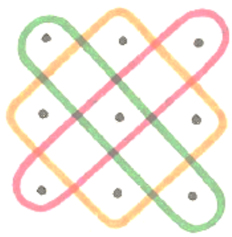
Fonte: (GERDES, 1993b, p. 24)

Concluiu que nas redes com 2 filas, totalizando 2, 4 ou 6 pontos em cada fila, são necessário 2 linhas fechadas. E nas redes com 2 filas, com 3 ou 5 pontos em cada fila, o desenho é feito com uma única linha, monolinear.

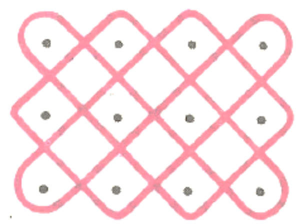
Fazendo uma nova investigação nos Sona com 3 filas.

Figura 17 – Rede retangular com 3 filas

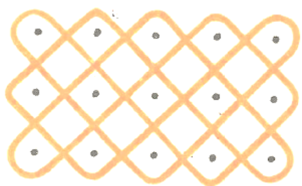
(a) Sona 3 por 3, 3 linear.



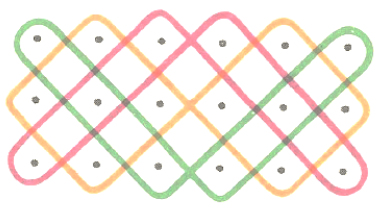
(b) Sona 3 por 4, 1 linear.



(c) Sona 3 por 5, 1 linear.



(d) Sona 3 por 6, 3 linear.



Fonte: (GERDES, 1993b, p. 25)

Conclui-se que havendo 3 ou 6 pontos em cada fila, são necessárias 3 linhas, se houver 4 ou 5 pontos em cada fila precisa-se uma única linha.

Para observar um padrão matemático envolvido nesses desenhos Gerdes (1990) montou uma tabela de registro dos resultados:

Tabela 1 – Número de linhas fechadas

Filas	Colunas	linhas fechadas
2	2	2
2	3	1
2	4	2
2	5	1
2	6	2
3	3	3
3	4	1
3	5	1
3	6	3
4	2	2
4	3	1
4	4	4
4	5	1

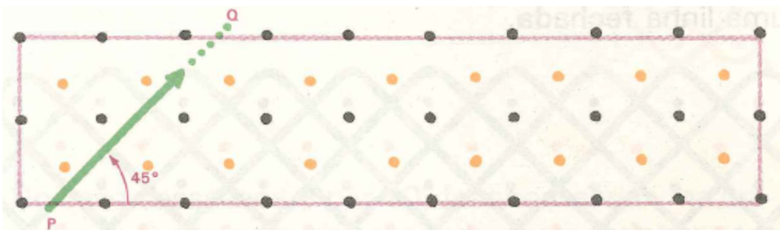
Fonte: (GERDES, 1993b, p. 27)

Assim, para descobrir o total de linhas para construir os desenhos Sona, há uma regra básica, que é verificar o número de linhas e de colunas dessa malha retangular, havendo uma relação entre a monolinearidade e as dimensões das malhas para construí-lo. Pode-se perceber nessas relações um algoritmo denominado MDC, o máximo divisor comum, embutidos nessas figuras monolineares. Portanto, os desenhos Sona são monolineares quando o número de linhas e colunas são primos entre si.

Os Sona são divididos em classes, onde as mais estudadas são: padrão-de-esteira-entrecruzada, casal deitado, galinha em fuga e estômago de um leão. Começamos a descobrir a maior classe, aos dos padrões-de-esteira-entrecruzada.

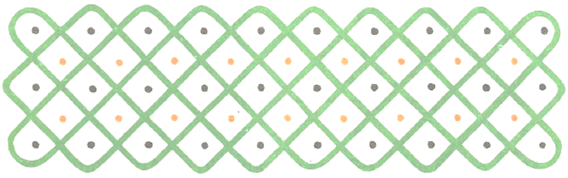
Definição 6. *Chama-se padrão-de-esteira-entrecruzada os desenhos Sona que compõem-se de linhas semelhantes às tiras de uma esteira entrecruzada, fazendo ângulo de* 45^o *com a borda.*

Figura 18 – Linha que faz ângulo de 45° com a borda do retângulo



Fonte: (GERDES, 1993b, p. 19)

Figura 19 – Padrão-de-esteira-entrecruzada



Fonte: (GERDES, 1993b, p. 20)

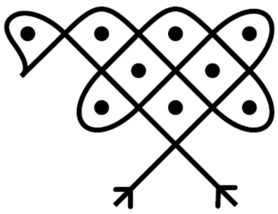
A classe padrão-de-esteira-entrecruzada divide-se em quatro subclasses: A, B, C e D.

A subclasse A tem a seguinte característica:

$$f_1 = f_2 + 1 \text{ e } c_1 = c_2 + 1 \ ,$$

Onde f_1 e c_1 indicam o número de filas e de colunas principais dos pontos da rede retângular e f_2 e c_2 o número de filas acrescentadas.

Figura 20 – Uma ave

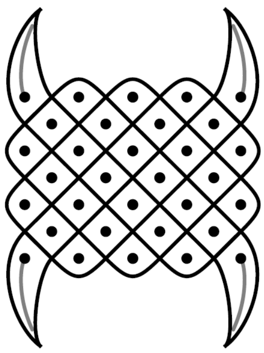


Fonte:(GERDES, 1993a, p. 56)

$$f_1 = 2, f_2 = 1 \text{ e } C_1 = 3, c_2 = 2$$

Na figura acima, não consideremos o ponto da cabeça, pois não faz parte da rede retângular principal. Outro elemento da subclasse A, abaixo:

Figura 21 – Mbau, a cabeça de um búfalo (dimensões de 4x5)



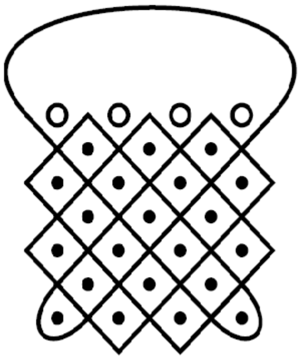
Fonte:(GERDES, 1993a, p. 57)

$$f_1 = 4, c_1 = 5 \text{ e } f_2 = 3, c_2 = 4.$$

Da subclasse B, que tem as seguintes características:

$$f_1 = f_2 \text{ e } c_1 = c_2 + 1 \text{ ou } f_1 = f_2 + 1 \text{ e } c_1 = c_2$$

Figura 22 – Tanga ryangombe, curral de bois com quatro casas de pastores



Fonte:(GERDES, 1993a, p. 62)

Temos:

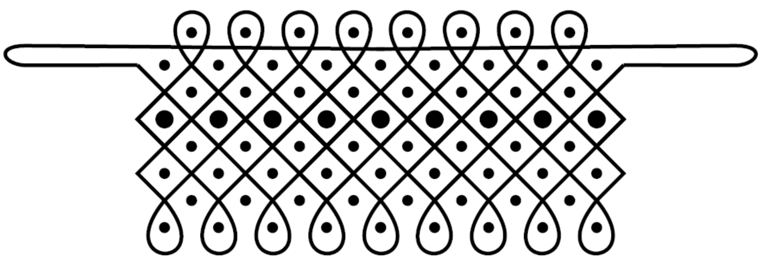
$$f_1 = 3, f_2 = 3 \text{ e } c_1 = 4 \text{ e } c_2 = 3 \ ,$$

Nesta subclasse B,

$$f_1 = f_2 \text{ e } c_1 = c_2 + 1.$$

Outro exemplo da subclasse B:

Figura 23 – Subclasse B



Fonte:(GERDES, 1993a, p. 65)

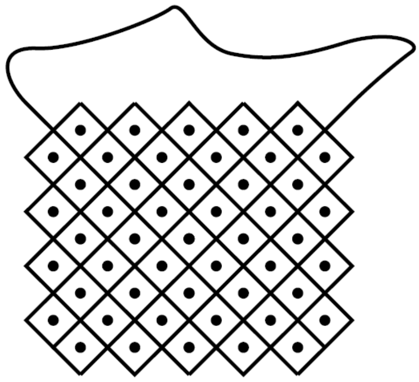
Temos então:

$$f_1 = 4, f_2 = 4 \text{ e } c_1 = 9, c_2 = 8$$

Que tem a característica $f_1 = f_2$ e $c_1 = c_2 + 1$.

Finalmente temos a subclasse C e D da classe esteira-esteira-entrecruzada, que são relativamente raros. A figura mostra um padrão pertencente à subclasse D.

Figura 24 – Referente a uma vasilha de favos de mel



Fonte:(GERDES, 1993a, p. 66)

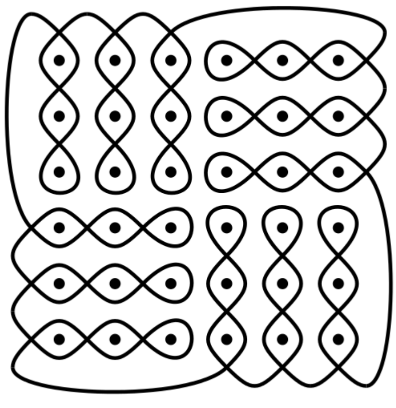
Neste Sona, temos:

$$f_1 = 4, f_2 = 5 \text{ e } c_1 = 6, c_2 = 5.$$

Exemplos da subclasse C, não está neste trabalho.

Outra classe de Sona é chamada de casal deitado, que se constitui de sona monolineares construído a partir de ziguezagues do tipo ida-e-volta. A linha pode passar por cima, por baixo de dois ou mais pontos de uma fila ou de uma coluna da rede retangular de referência.

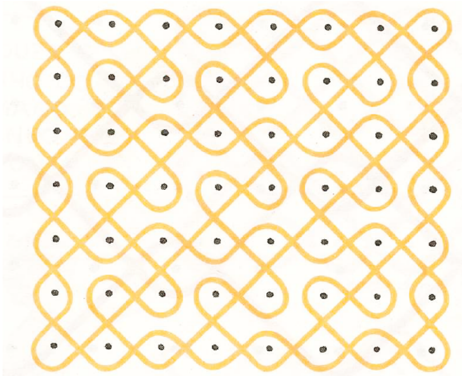
Figura 25 – Homens-leões



Fonte: (GERDES, 1993a, p. 70)

Tem-se também a classe galinha em fuga, que representa o trajeto descrito por uma galinha selvagem quando perseguida. Os Sona dessa classe são monolinear.

Figura 26 – Galinha em fuga de dimensão 7 por 8

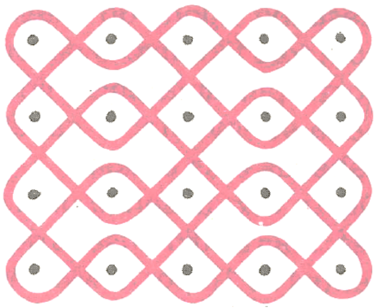


Fonte: (GERDES, 1993b, p. 34)

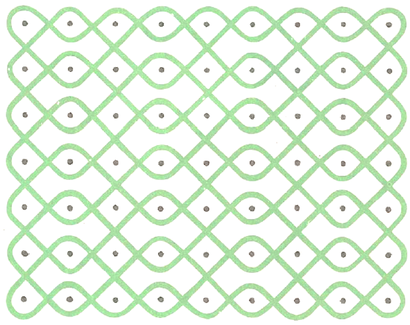
E estômago dum leão é outra classe de Sona que tem destaque entre os desenhos. O desenho é monolinear, provavelmente tenha sido originado na tecelagem de redes.

Figura 27 – Estômago dum leão

(a) Estômago dum leão de dimensão 4 por 5



(b) Estômago dum leão de dimensão 7 por 9



Fonte: (GERDES, 1993b, p. 32)

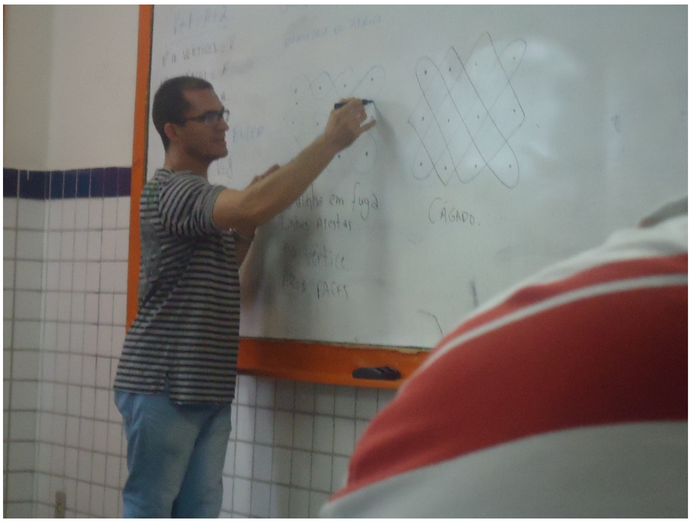
Paulus Gerdes comenta na revista *Scientific American* que o estudo dos sona ultrapassou o quadro etnológico e permitiu o surgimento de uma nova matemática.

2.2 Aplicando a Geometria Sona em sala de aula

A Escola Estadual Desembargador Silvério Soares (EEDSS), de nível médio, situada no município de Areia Branca-RN, tornou-se o ambiente propício para a aplicação da Geometria Sona. Foram Selecionadas as turmas de 3º ano A e B do turno vespertino com alunos na faixa etária entre 15 a 17 anos, totalizando 27 alunos como público alvo.

Buscando perceber o conhecimento prévio destes alunos, foi feita inicialmente a pergunta inquietante: É possível aplicar o Teorema de Euler em uma geometria construída por uma cultura africana? como previsto, os alunos não souberam responder. Então, foi proposto um desafio para que os mesmos através de uma rede de pontos, traçassem uma única linha que contornasse todos os pontos, e para resolução desse problema da Geometria Sona, foi estipulado o tempo de 10 minutos para raciocinarem.

Figura 28 – Desenho em sala



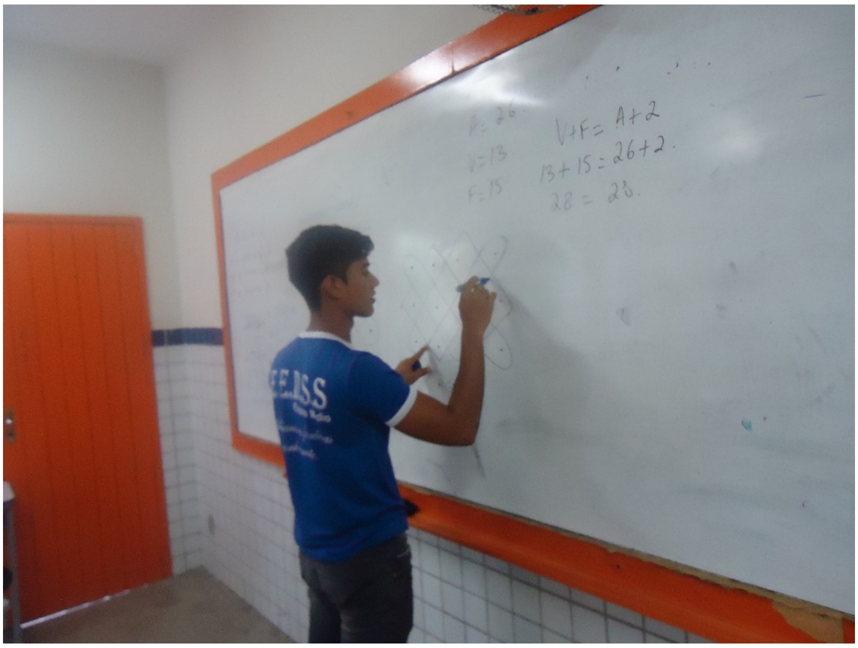
Fonte: Foto do autor, 2014

Como resultado eles não souberam responder. Daí, houvera necessidade que fosse explicado que essa figura era feita pelos povos africanos sem cometer nenhum erro, e se caso errasse era motivo de chacota. Foi Mostrado também para os alunos outros desenhos feito pelos Quiocos. Nesse momento, discutiu-se sobre a cultura, a arte e o país onde estes moravam, tentando conhecer os motivos que estes povos faziam tais desenhos.

Após toda essa elucidação tornou-se necessário retornar ao desafio anterior, conseguindo desta vez êxito. Vale ressaltar que todos os alunos ficaram atentos a execução do desenho, uma vez concluído, todos presentes em sala de aula se mostraram interessados no tocante desempenho da atividade.

Em seguida os alunos foram conduzidos a verificar a aplicação do caso plano do Teorema de Euler. Onde foi dada todas as definições necessárias de faces, vértices e arestas para tal uso desse teorema. Como resultado, o mesmo se mostrou realmente válido.

Figura 29 – Aluno em interação



Fonte: foto do autor, 2014

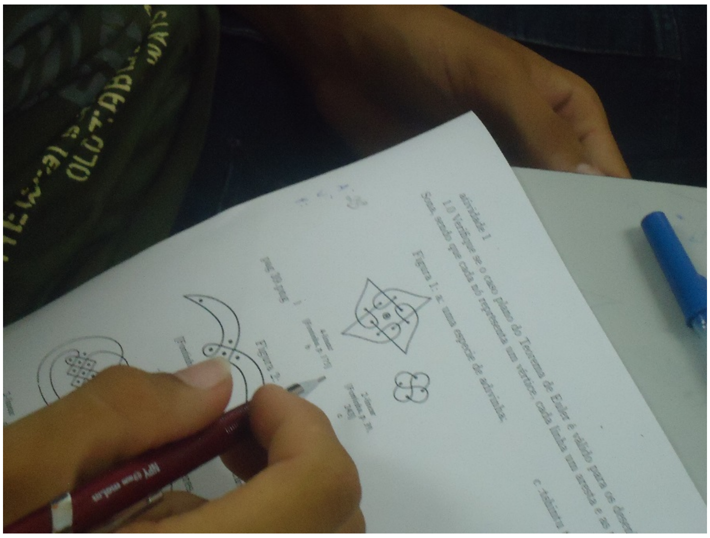
No segundo momento foi proposta uma atividade sobre a Geometria Sona, e o caso plano do Teorema de Euler, para que eles respondessem. Curioso perceber que todos os alunos envolvidos na ação teórico-prática encontravam-se atentos ao exercício, que chegou a passar o fim da aula. Não concluída a atividade, foram recolhidas para serem feitas na aula seguinte.

Finalizada a atividade da aula anterior, outro desafio foi lançado: é possível através da Geometria Sona, determinar a somatória da sequência: 1+2+3+4+5+...+100? A partir daí, foi demonstrado inicialmente que era possível para uma malha 3 por 4. Posteriormente para uma malha 4 por 5 e 5 por 6; finalmente mostrou-se para uma malha m por n, um fórmula geral para determinar o somatório de 1 à n. Foi percebido nessa experiência uma diferença no interesse pelo conhecimento matemático através da aplicabilidade da Geometria Sona por parte dos alunos, ao qual mostra que a matemática contextualizada proposta pela Etnomatemática pode-se alcançar grandes resultados satisfatórios.

Figura 30 – Atividade em grupo

Fonte: foto do autor, 2014

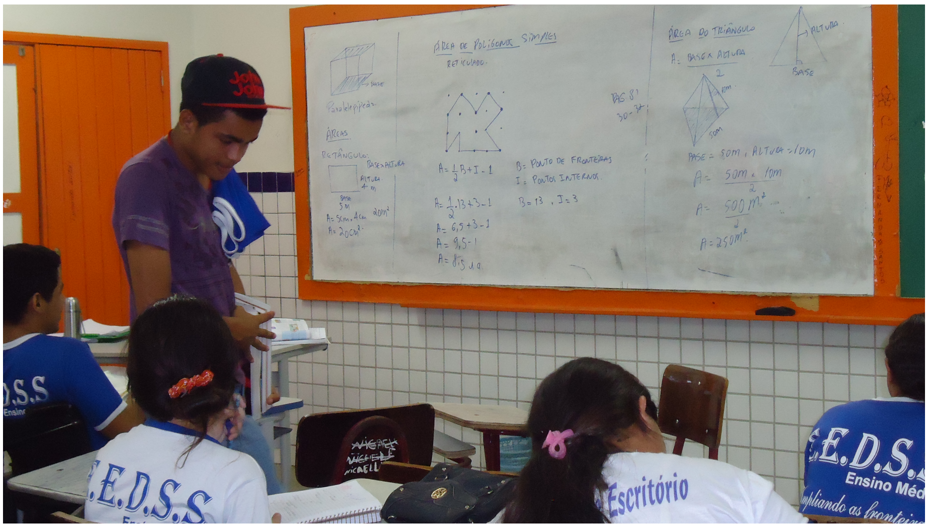
Figura 31 – Atividade em sala



Fonte: foto do autor, 2014

Para demonstrar que a Geometria Sona pode ser bem explorada em sala de aula, foi acrescentado a essa experiência a aplicação do Teorema de Pick. Iniciando o assunto com cálculo de áreas de superfícies planas. Logo após, foi introduzido áreas de polígonos reticulados, que não eram conhecidos pelos alunos através da Geometria Sona.

Figura 32 – Teorema de Pick em sala



Fonte: foto do autor, 2014

Uma das preocupações de alguns alunos era se essa etnomatemática ou esse conteúdo abordado era cobrado no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), afirmei que sim, pois como exemplo disso era o caso plano do Teorema de Euler, que no dia-dia pode ser aplicado a mapas e teoria dos grafos. Pois se levarmos em consideração um mapa, temos que as fronteiras podem ser as arestas, os nós os vértices as áreas das cidades ou país podem ser as faces. O mesmo pode ser com o Teorema de Pick, que também pode ser aplicado a mapas, para cálculo de suas áreas.

CAPÍTULO 3

A GEOMETRIA SONA ILUSTRANDO A MATEMÁTICA

3.1 Introdução à Teoria de Euler

O suíço Leonardo Euler, que viveu do século $XVIII$, é até hoje considerado o matemático que mais publicou trabalhos relevantes. Suas contribuições variam impressionantemente da Geometria à Combinatória, passando pela Teoria dos Números e Física, havendo, em cada uma dessas áreas do conhecimento, um celebrado Teorema de Euler.(MUNIZ, 2012, p. 189)

Figura 33 – Leonardo Euler

Fonte: (WWW.GOOGLE.COM.BR, 2014), acesso em 05/06/2014

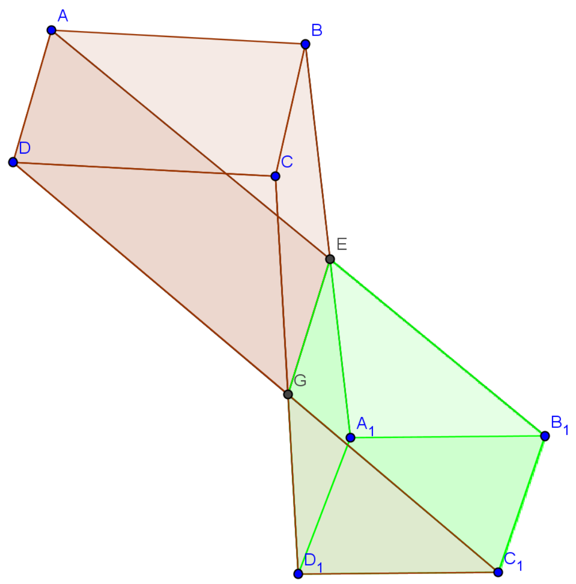
O Teorema de Euler foi visto pela primeira vez no ano de 1758, onde afirma que:

Teorema 3.1.1 (Teorema de Euler)**.** *Em todo poliedro com A arestas, V vértices e F faces vale a relação $V - A + F = 2$.*

Renê Descartes, filósofo, físico e matemático francês , em 1639 em um dos seus manuscritos conteria resultados suficientes pelas quais se poderia obter a fórmula do Teorema de Euler; mas passou despercebida. Que posteriormente encontrado em 1675 por Leibniz, filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão. O navio que trouxe para França os pertences de Descartes, depois de sua morte em Estocolmo, naufragou no rio Sena. O baú que continha o manuscrito, flutuou e foi encontrado no dia seguinte. A cópia feita por Leibniz também se perdeu, sendo reencontrada em 1860.

O próprio Euler não se preocupou em definir poliedros, trazendo controvérsia em relação à que tipo de poliedro era válido este teorema, no poliedro não convexo, ver figura 34, o Teorema de Euler que $V - A + F$ é igual 3.

Figura 34 – Poliedro não convexo



Fonte: Elaborada pelo autor

Então, o Teorema de Euler não estava dando solução para os questionamentos que estavam ocorrendo à séculos, O Teorema de Euler não é válido com toda a generalidade do enunciado(em todo poliedro), mas a solução definitiva do problema deu-se com Poincaré, matemático, físico e filósofo da ciência francesa (1893), que foi o primeiro matemático a compreender que o Teorema de Euler é um Teorema de Topologia, e não de Geometria, ao notar que o número $V - A + F$ é uma invariante topológica do Poliedro P.

> Topologia:s.f. Ramo da matemática que estuda certas propriedades das figuras geométricas. Entre essas propriedades estão aquelas que não variam quando as figuras são deformadas. A topologia não faz distinção entre uma esfera e um cubo, pois essas figuras podem ser transformadas, através de deformações, uma na outra. Mas a topologia distingue uma esfera de um toro, visto que essas figuras não podem ser deformadas de modo que uma se transforme na outra.
>
> (FERREIRA, 2014)

Isto significa, que $V - A + F = X(p)$, onde $X(p)$ é chamado de característica de Euler-Poincaré do poliedro P. Isto quer dizer que poliedros homeomorfos têm a mesma característica. Dois poliedros S e K são Homeomorfos quando existe uma transformação contínua $T : S - K$ cuja inversa $T^{-1} : K - S$ também é contínua, sendo neste caso um homeomorfismo de S sobre K. Como exemplo tomemos um poliedro feito de borracha, se inflarmos o poliedro, ele será transformado em esfera ou um toro; assim sendo, os poliedros que ficam em formato de esferas quando inflados são homeomorfos a esfera e os do formato do toro são homeomorfos ao toro.

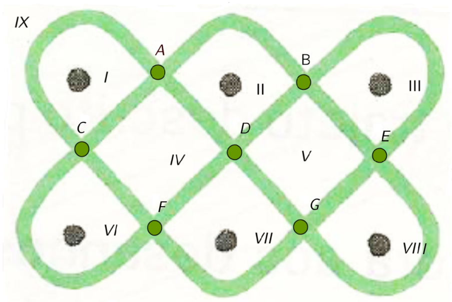
Assim Poincaré demonstrou que poliedros homeomorfos S e K, tem-se em geral $V - A + F = V' - A' + F'$, sendo V, F e A elementos do poliedro S e V', A' e F' são do poliedro K. Então poliedros convexos tem característica de Euler-Poincaré igual a 2, logo são todos homeomorfos a esfera.

3.2 O caso plano do Teorema de Euler aplicado a Geometria Sona

Antes da demonstração do caso plano do Teorema de Euler é preciso entender os elementos encontrados na Geometria Sona (vértice, face e aresta).

Vértices são os nós, o encontro de duas ou mais linhas. É compreendido como aresta, qualquer curva contínua sem auto-interseções, que liga um vértice a outro. Designa-se face como a região limitada por pelo menos duas arestas, considerando também o exterior como região. Uma ilustração do que está sendo comentando encontra-se na (figura 35) .

Figura 35 – Sona 2 por 3 monolinear.



Fonte: (GERDES, 1993b), p. 24

Vê-se que neste desenho Sona o plano foi dividido em nove regiões. As regiões numeradas de I à $VIII$ são limitadas, enquanto a IX é ilimitada; sendo esta chamada de oceano.

O contorno da região IX é formado pelas arestas que ligam os vértices consecutivos A, B, E, G, F, C e voltando ao vértice A. A região limitada I é formada pelas arestas que ligam consecutivamente os vértices $C - A - C$ e a região II é limitada por três arestas que ligam os vértices $A - B - D - A$.

Nessas condições explícitas acima considere-se uma região do plano, sendo este dividido em regiões menores. Cada região é limitada por pelos menos duas arestas, os vértices são pontos comuns a pelos menos duas arestas.

Logo, um plano particionado em F regiões, com uma região externa ilimitada (oceano), por A arestas que interceptam em V vértices (Figura 36) . Então, provar-se que sobre n vale $V - A + F = 2$ do Teorema 3.1.1, onde n trata-se de um polígono desenhado no plano de n lados.

Demonstração. Do Teorema 3.1.1

$$V - A + F = 2$$

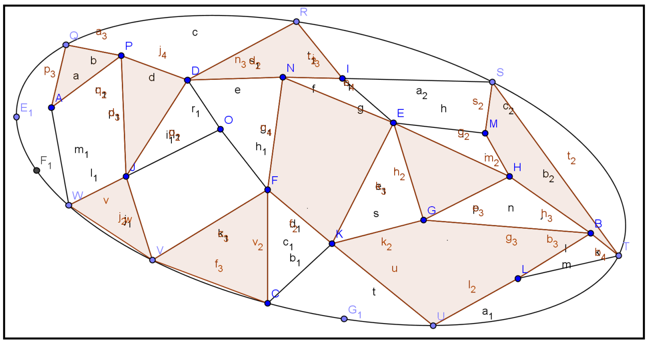
Têm-se que a característica de Euler-Poincaré igual 2. Mostra-se que é válida para polígonos de n lados no plano, pois:

$$A = V = n \quad \text{e} \quad F = 2$$

Isto implica que

$$n - n + 2 = 2$$

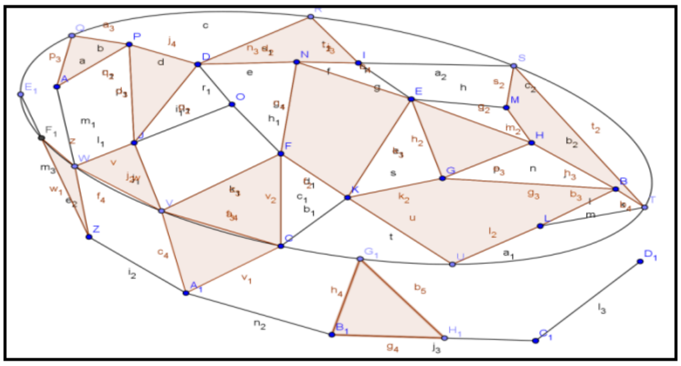
Figura 36 – Partição do plano



Fonte: Elaborada pelo autor

É preciso mostrar que se a relação de Euler é válida para uma partição do plano em F regiões, então ela ainda será válida para $F+1$ regiões. Considerando uma partição do plano em F regiões, com A arestas que intersectam em V vértices. Uma nova partição do plano pode ser construída à partir da anterior, é somente acrescentar uma nova região na região ilimitada (oceano).

Figura 37 – Partição do plano



Fonte: Elaborada pelo autor

Para construção de uma nova região é preciso acrescentar uma sequência de arestas, ligadas a dois vértices da região anterior. Logo, se acrescentasse r arestas, então será acrescentado $r-1$ vértices e uma nova região.

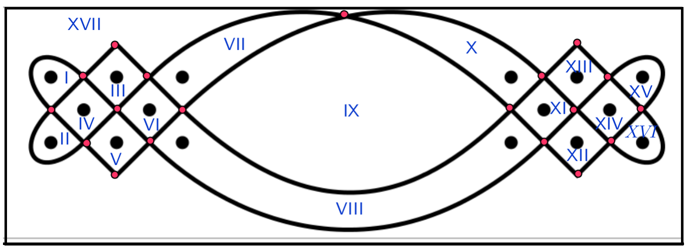
Tomando-se o Teorema de Euler, têm-se:

$$
\begin{aligned}
V - A + F &= (V + r - 1) - (A - r) + (F + 1) \\
&= V - A + F
\end{aligned}
$$

Permanece válida para $F+1$, o que conclui a demonstração. $\square$

Tornando assim sua aplicação às variadas figuras planas, inclusive sua utilização na Geometria Sona. A (figura 38) foi trabalhada em sala de aula com os alunos da 3º série do ensino médio.

Figura 38 – Lusona tungu



Fonte: Gerdes (1993), p. 46

Tem-se que os vértices estão em destaque em vermelho, as faces estão numeradas de I à $XVII$ e as arestas estão em preto ligando os vértices. Logo:

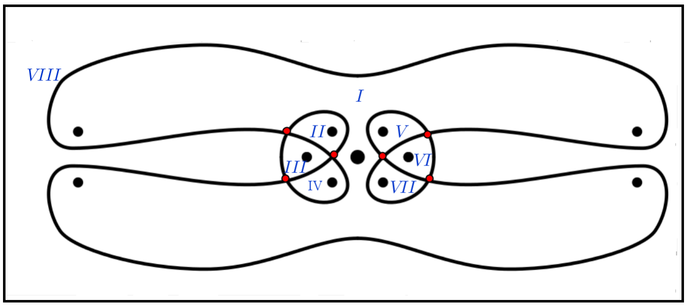
$$V = 19,\ A = 34,\ F = 17$$

então:

$$19 - 34 + 17 = 2.$$

Outro desenho Sona,

Figura 39 – Pormenor do rosto de uma figura humana



Fonte: (GERDES, 1993a), p. 37

Os vértices estão em destaque em vermelho, as faces estão numeradas de I à $VIII$ e as arestas estão em preto ligando os vértices. Logo:

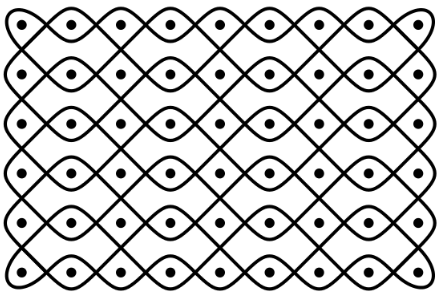
$$V = 6,\ A = 12,\ F = 8,$$

Logo:

$$6 - 12 + 8 = 2$$

Outra bem popular entre os desenhadores, estômago de leão, que foi trabalhada através de cópia, com discursão sobre seu significado para o povo Quioco:

Figura 40 – Estômago de leão



Fonte: (GERDES, 1993a), p. 124

$$V = 73, \ A = 146, \ F = 75$$

Implica a validade pois

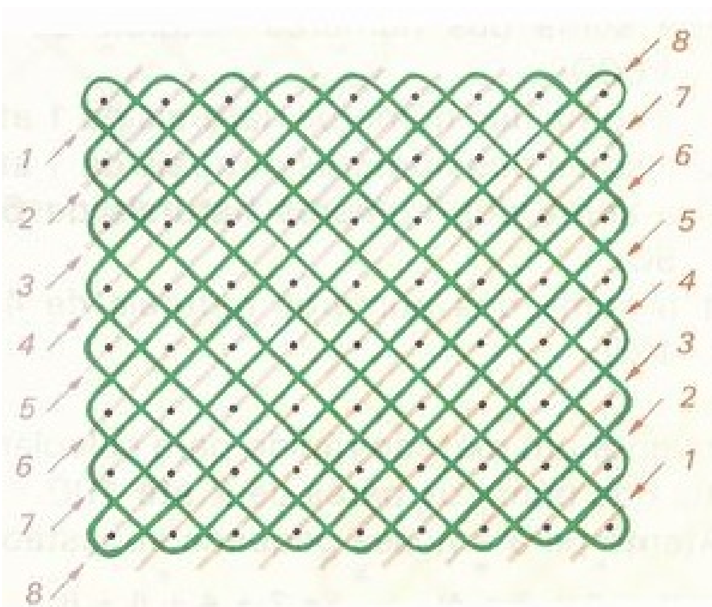
$$73 - 146 + 75 = 2$$

3.3 Somas interessantes e Geometria Sona

Carl Friedrich Gauss, o grande gênio da matemática foi desafiado pelo professor a resolver a soma dos números de 1 à 100, pois era um aluno hábil, terminava os problemas propostos pelo professor muito rápido e ficava sem ter o que fazer. Então encontrou uma forma prática pela aritmética para resolver. O desafio foi resolvido pela Geometria Sona e pelos alunos da 3º série do ensino médio.

Como procede-se para resolver? Paulus Gerdes em seu livro “ Desenho da África ” diz que os desenhos dos Quiocos vão nos ajudar encontrar a métodos de cálculo rapidíssimo. Vê-se o desenho:

Figura 41 – Estomago de um leão



Fonte: (GERDES, 1993b), p. 64

Observe a figura (figura 41), o número de pontos da rede é igual a:

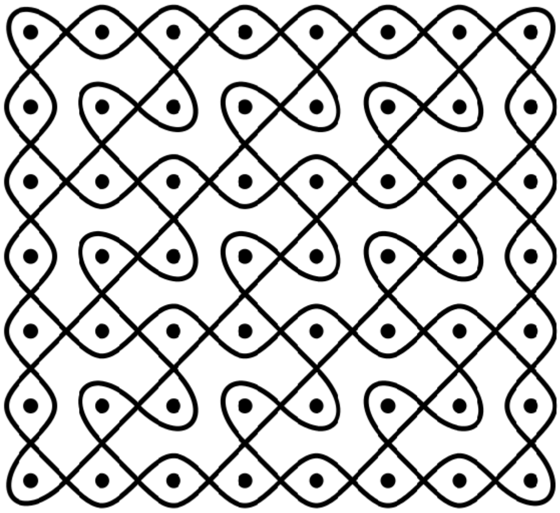
$$2.(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$$

Que é igual à 8 . 9, logo

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = (8\ .\ 9)/2.$$

Outro desenho Sona, galinha em fuga:

Figura 42 – Galinha em fuga



Fonte: (GERDES, 1993a), p. 78

O número de pontos da rede é igual a:

$$2.(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$$

Que é igual à 7 . 8, logo

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = (7\ .\ 8)/2.$$

Se a dimensão da malha for de 10 . 11, temos a seguinte conclusão:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = (10\ .\ 11)/2.$$

Se a soma for de 1 à 100, como problema resolvido por Fermat será:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100) = (100\ .\ 101)/2$$

Que rapidamente resolve-se que é 5050. Onde encontra-se uma fórmula geral para a sequência de qualquer número, tornando algo inédito, pois não se trabalhava com alunos da 3º série do ensino médio as demonstrações de fórmulas e vi que é possível. Só preciso incentivá-los e instiga-los. Dada a soma:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + n) = n.(n + 1)/2.$$

Sua demonstração pode ser feita pelo axioma da indução:

Sendo

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n = n.(n + 1)/2,$$

Tem-se que é válido para $n = 1$, isto é,

$P(1) = 1$. Supondo $P(n)$ verdade para um certo valor de n, somando $n+1$ a ambos os membros, tem-se:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n + (n + 1) = n.(n + 1)/2 + n + 1$$

Ou seja:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n + (n + 1) = (n^2 + 3n + 2)/2,$$

Logo

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n + (n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$$

Sendo a última igualdade igual à P $(n+1)$. Logo $P(n)$ implica em $P(n+1)$. Portanto $P(n)$ é válido para todo n pertencente aos naturais.

3.4 O Teorema de Pick

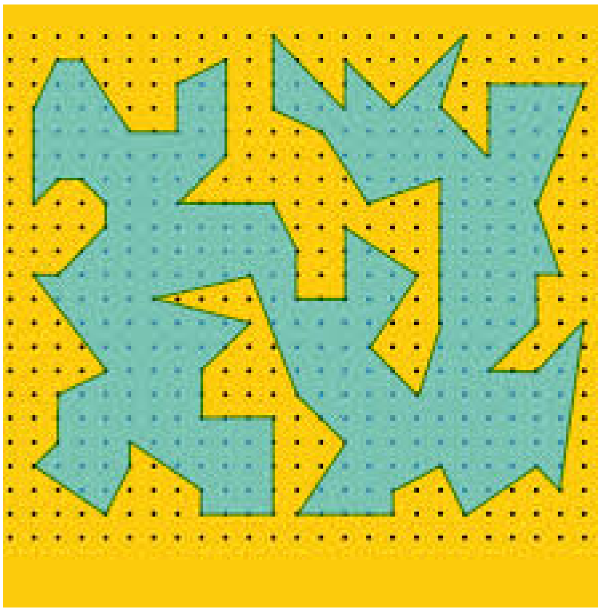
Estuda-se quase sempre áreas de polígonos que se assemelham aos triângulos, quadrados e círculos, mas não busca-se figuras que tenham aparências diferentes.

> Pouca ou nenhuma ênfase é dada ao desenvolvimento histórico do conceito de área e à sua importância no desenvolvimento das sociedades na antiguidade. Além disso, os cálculos de área ficam restritos às figuras poligonais, à exceção do círculo, não contemplando a área de figuras cujos contornos são curvas ou irregulares, nem sempre presentes nos livros didáticos. (ROCHA, 2008, p. 02)

Nesse contexto, o Teorema de Pick objetiva calcular a área de um polígono qualquer a partir de pontos do reticulado.

Reticulado refere-se à formato de rede; reticular. Que se imprimiu com o processo de retícula. Logo, levando para o lado matemática, polígono reticulado é um polígono cujos vértices se situam nos pontos de um reticulado quadrado e que os pontos estejam separados por uma unidade.

Figura 43 – Polígono reticulado



Fonte: www.google.com.br, acesso em 20/07/14

Georg Pick, matemático austríaco, em 1899 provou que por mais complicado e estranho que seja o polígono reticulado pode-se encontrar sua área. Para calcular, é somente contar o número de pontos de fronteira B e os pontos interiores I e seguir à fórmula:

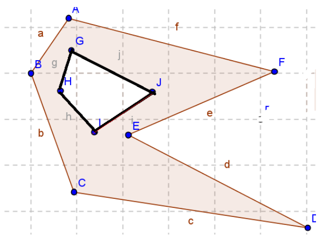
$$A = \frac{1}{2}.B + I - 1$$

Teorema 3.4.1 (Teorema de Pick)**.** *Seja P um polígono simples. Se B é o número de pontos de fronteira e I o número de pontos interiores, então a área de P é dada por $A(p) = 1/2B + I - 1$.*

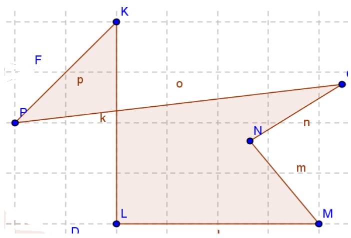
Sendo polígono simples aquele em que seu contorno for uma curva fechada simples, ou seja, ela não possui " buracos " no seu interior nem intersecções de suas arestas.

Figura 44 – Polígonos reticulados

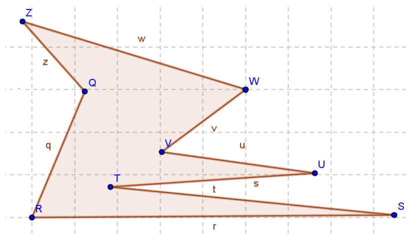
(a) Polígono reticulado não simples



(b) Polígono reticulado não simples



(c) Polígono reticulado simples



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstrando o Teorema de Pick (Teorema 3.4.1).

Demonstração. Como o número de Pick de um polígono determina sua área, então o número de Pick deve ser aditivo. Então se P é um polígono simples obtido pela justaposição de dois polígonos simples P_1 e P_2, ao longo de pelo menos uma aresta, então,

$$Pick(p) = Pick(p_1) + Pick(p_2) \tag{3.1}$$

Antes da demonstração, é necessário provar a proposição 3.1. Seja V o número de vértices de fronteira comum aos dois polígonos. Tem-se que, exatamente dois destes pontos serão pontos de fronteira do polígono P, e que os $V - 2$ vértices restantes serão pontos interiores de P. Então o número I de pontos interiores de P será dado por

$$I = I_1 + I_2 + v - 2$$

e o número B de pontos de fronteira de P, será dado por

$$B = B_1 + B_2 - 2(v - 2)$$

Logo

$$\begin{aligned}
(p) &= 1/2B + I - 1 \\
&= 1/2[B_1 + B_2 - 2(v - 2)] + (I_1 + I_2 + v - 2) - 1 \\
&= 1/2B_1 + 1/2B_2 - V + 1 + I_1 + I_2 + V - 2 - 1 \\
&= (1/2B_1 + I_1 - 1) + (1/2B_2 + I_2 - 1) \\
&= Pick(P_1) + Pick(P_2).
\end{aligned}$$

Portanto, dois polígonos simples justapostos ao longo de pelo menos uma aresta, os respectivos números de Pick adicionam-se, assim como as suas respectivas áreas. A decomposição de um polígono simples em uma justaposição de polígonos mais simples facilita a demonstração desse teorema, pois torna mais prático sua verificação.

Logo, pode-se decompor qualquer polígono simples em triângulos, com vértices no reticulado. Mostrando assim a validade do teorema para o triângulo, concluindo assim o resultado.

Tem-se que qualquer triângulo pode ser completado de modo a compor um retângulo, justapondo a ele triângulos retângulos com catetos paralelos aos eixos coordenados.

Tomando-se um retângulo, decompondo-o em triângulo com vértices no reticulado. Como o número de Pick do retângulo é dado pela soma dos Picks dos triângulos, tem-se que se o teorema é válido para esse retângulo, então é válido para triângulos quaisquer.

Sabe-se também que o retângulo é a justaposição de quadrados, no qual o Teorema de Pick é verificável diretamente. A Área do quadrado elementar:

$$A(Q) = 1, B = 4 \quad \text{e} \quad I = 0$$

Aplicando na fórmula:

$$Pick(Q) = \frac{1}{2}.4 - 1 = 1 = A(Q).$$

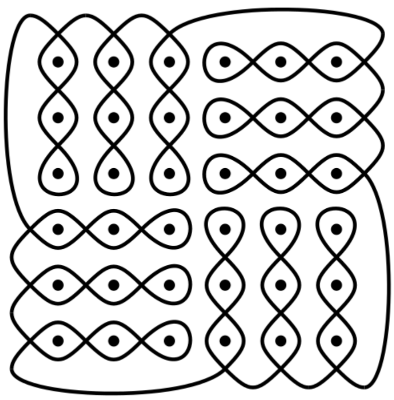
Como se queria demonstrar. $\square$

3.5 Aplicação do Teorema de Pick à Geometria Sona

Durante os estudos procurou-se temas matemáticos que fossem possíveis a sua aplicação à Geometria Sona, assuntos que não foram nem mencionados pelo matemático Paulus Gerdes, mostrando assim sua grande aplicabilidade e aceitabilidade.

A Geometria Sona encaixa-se perfeitamente no teorema de Pick, tem-se sempre malhas reticuladas nessa geometria, sendo possível sua aplicação.

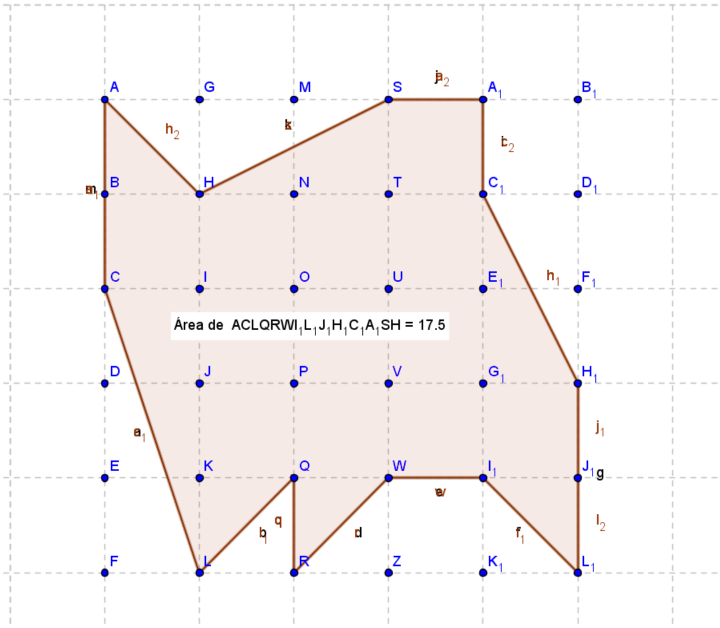
Figura 45 – Vandumba zia vantu



Fonte: Gerdes, p. 70

Tomando uma malha reticulada 6 por 6 da figura 45, pode-se construir um polígono simples através de sua malha e calcular a área pelo Teorema de Pick, atividade que foi discutida com os alunos no quadro, desenvolvendo ainda mais seu conhecimento sobre polígonos e mais um pouco de Geometria Sona.

Figura 46 – Polígono reticulado



Fonte: Elaborada pelo autor

$$B = 15, I = 11$$

Logo

$$A = \frac{1}{2}.15 + 11 - 1 = 17,5u.a$$

Trata-se de uma fórmula simples de grande utilidade, mas pouco conhecido. Que pode ser mais trabalhada juntamente com a Geometria Sona.

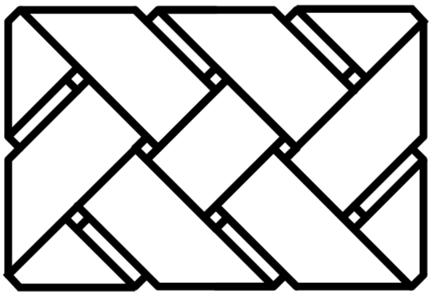
3.6 Como a Geometria Sona contribui para a melhoria do ensino aprendizagem de matrizes?

A Geometria Sona é rica. Gerdes (1993b) comenta que, com alguns elementos matemáticos da geometria sona reconstruídos por ele, foi possível explorar o potencial geométrico tanto na educação Matemática como na construção da teoria Matemática. Nos seus livros Lusona: Recreações Geométricas da África (1991, 1997,2002) e Geometria da África (1999, parte 4), são apresentados exemplos de explorações na educação Matemática aos níveis secundário e universitário. Tratando-se de uma geometria colorida e divertida, onde podemos brincar quando construímos os desenhos, e simultaneamente contamos a história relacionada à determinada construção. Deixa de ser um simples desenho, passando a ser algo vivo, com sentido e significado.

Os desenhos Sona, que são classificados por características visíveis, como a quantidade de linhas para construir essa figura (monolinear ou polilineares), pelas dimensões das malhas, por linhas curvas ou retas, também por simetrias rotacionais ou axiais e simetria dupla.

Outra característica importante aqui a se tratar são os Sonas que seguem um padrão-de- esteira-entrecruzada. São desenhos Sonas que são construídos em que as linhas ao qual é composto o desenho segue um ângulo de 45 com a borda ou com os lados do retângulo de pontos. Conforme Gerdes (1993a) exemplifica com desenho abaixo dessa esteira:

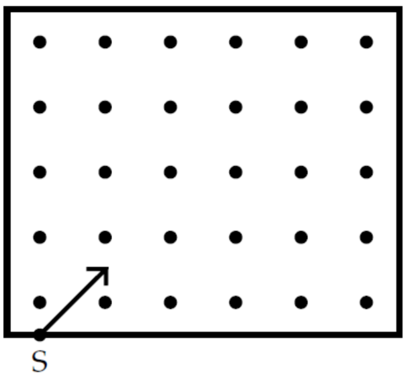
Figura 47 – Uma pequena esteira entrecruzada



Fonte: (GERDES, 1993a, p. 53)

Também certos desenhos Sona, são considerados curva-de-espelho, que é a versão lisa do caminho poligonal descrito por um raio de luz emitido a partir do ponto de partida S, fazendo um ângulo de 45 com a linha horizontal (vide figura 48)

Figura 48 – Ponto de partida S



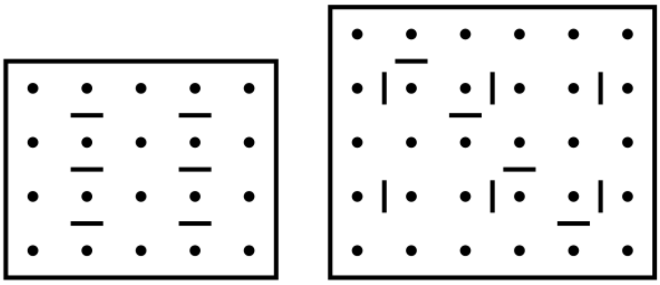
Fonte:(GERDES, 1993b, p. 223)

Ao atravessar a grelha, o raio reflete-se nos lados dos retângulo e nos “espelhos de dois lados” que o raio encontra no seu caminho. Os espelhos estão colocados horizontal e verticalmente, no meio, entre dois pontos vizinhos da grelha, como ilustra a (Figura 49).

Figura 49 – Espelhos vertical e horizontal

Fonte:(GERDES, 1993b, p. 224)

Figura 50 – Posição dos espelhos no caso Sona estômago do leão



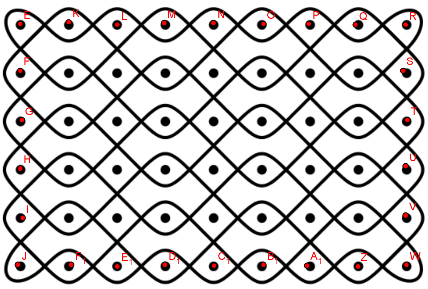
Fonte:(GERDES, 1993b, p. 224)

Para melhor descrição do caminho do feixe de luz entre os pontos e os espelhos de duas faces, utilizou-se o software GeoGebra na construção de uma grelha de forma que cada ponto consecutivo tenha uma distância entre si de duas unidades, formando assim um malha quadriculada de forma que o feixe passe uma única vez por cada quadrado, denominada por Gerdes (1993a) de curva-de-espelhos. Ao se conhecer essa prática e executá-la através do software GeoGebra podemos trabalhar simultaneamente matemática e recurso computacional.

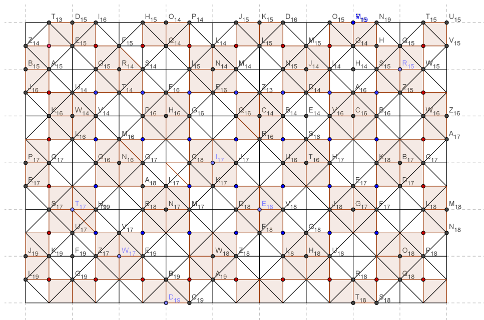
Em um desenho Sona monolinear a linha passa somente uma vez no interior do quadradinho, ver (figura 51b), dessa forma, possibilitando enumerar os quadradinhos módulo 2, isto é, enumerar o primeiro quadradinho onde começa com número 1 e o segundo ao qual a linha passa com 0, formando assim uma sequência de 1010101 . . . até que a linha unitária se feche.

Figura 51 – Construção de curva-de-espelho

(a) Sona estômago de um leão



(b) Linha passando nos quadradinhos



Fonte: Figura *a*: (GERDES, 1993a), Figura *b*: Elaborada pelo autor

Podendo formar uma matriz binária de 0 e 1. Esses quadradinhos podem ser pintados com duas cores diferentes formando um desenho, que Gerdes denomina Lunda-designs (ver figura 53b). Também podemos enumerar os quadradinhos módulo 3, pintando assim com três cores distintas. (GERDES, 1993a) encontra algumas propriedades dos Lunda-desings:

(i) Em cada fila, o número de quadradinhos pretos é igual ao número de quadradinhos brancos;

(ii) Em cada coluna, o número de quadradinhos pretos é igual ao número de quadradinhos brancos;

(iii) Ao longo do rebordo, dos dois quadradinhos unitários associados a um ponto qualquer da-grelha sempre um é branco enquanto o outro é preto.

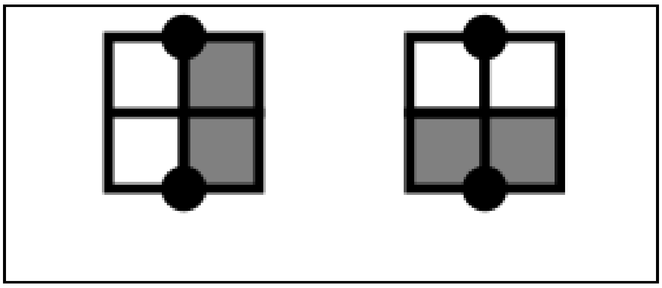
(iv) Dos quatro quadradinhos associados a dois pontos (horizontal ou verticalmente) vizinhos da grelha, sempre dois são brancos, enquanto os outros dois são pretos. (GERDES, 1993a, p. 226)

Finalmente, chegando a concluir que qualquer desenho retangular a preto-e-branco, que satisfaz a essas quatro propriedades é um Lunda-design. Com essas características Paulus Gerdes generalizou os Lunda-designs, tendo-se Lunda-desings circulares e hexagonais, em particular lunda-desings quadrados, os quais ele nomeia de link-desings, os quais vamos ater. Ele também apresenta uma alteração no item IV anterior, substituindo-o.

(iv) por uma proposição mais forte:

(iv') Dos quatro quadradinhos associados a dois pontos (horizontal ou verticalmente) vizinhos da grelha, sempre dois quadradinhos *adjacentes* são brancos enquanto os outros dois são pretos (ver figura 52)

Figura 52 – Quadrados associados a dois pontos

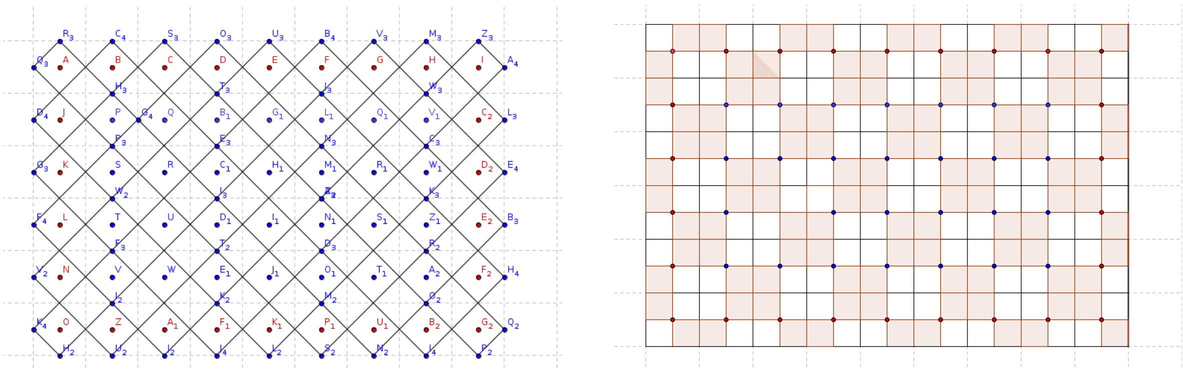


Fonte:(GERDES, 1993a, p. 226)

As matrizes relacionadas à linki-desings, tem características interessantes, que podem ser percebida quando se instiga os alunos a pensar e perceber as sequências de números que forma dentro da matriz, não um padrão comum como que é tratado nas aulas de Matemática, mas um padrão elegante. Ver-se as malhas construídas no GeoGebra e posteriormente a matriz associada:

Figura 53 – Construção de Lunda-desings

(a) Feixe de luz (b) Lunda-desing



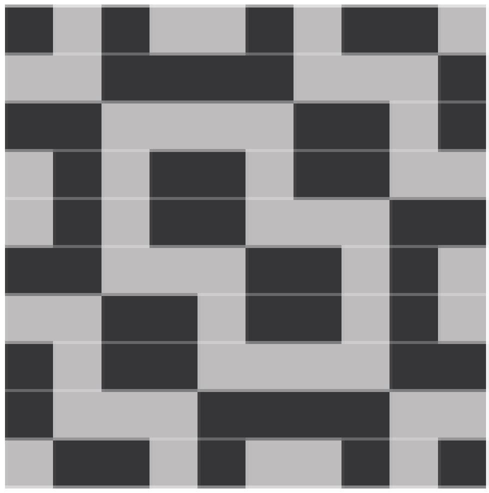
Fonte: Elaborada pelo autor

Matriz correspondente ao Lunda-designs.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Através dessas matrizes e o uso do software GeoGebra, pode- se trabalhar definições e propriedades, tratando especificamente da definição de multiplicação de matrizes por si mesma, isto é, potência de matrizes. Ao fazer as potências das matrizes binárias relacionadas aos linki-desings, instigando o aluno a aplicar as propriedades da multiplicação. Com a prática percebe-se que é importante o conhecimento da teoria e vice-versa. Passa-se a analisar algumas potências de matrizes, discutindo algumas propriedades interessantes das mesmas, que não são vistas na Matemática da prática escolar.

Figura 54 – Liki-desing



Fonte: Gerdes (1993), p. 229

Matriz L associada ao Liki-desing,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gerdes (1993a) em seu livro Matemática duma Tradição Africana, estuda alguns tipos de matrizes-cíclicas, que possuem uma estrutura cíclica interna de seus elementos. Abaixo, potências da matriz L:

$$L^2 = \begin{bmatrix}
5 & 2 & 2 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \\
2 & 5 & \mathbf{1} & 2 & 3 & \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 & 3 \\
2 & \mathbf{1} & 5 & 3 & 2 & 3 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 3 \\
\mathbf{1} & 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 & \mathbf{1} & 3 & 3 \\
\mathbf{1} & 3 & 2 & 3 & 5 & 2 & 2 & 3 & \mathbf{1} & 3 \\
3 & \mathbf{1} & 3 & 2 & 2 & 5 & 3 & 2 & 3 & \mathbf{1} \\
3 & 3 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & \mathbf{1} \\
3 & 3 & 2 & \mathbf{1} & 3 & 2 & 3 & 5 & \mathbf{1} & 2 \\
3 & 2 & 3 & 3 & \mathbf{1} & 3 & 2 & \mathbf{1} & 5 & 2 \\
2 & 3 & 3 & 3 & 3 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 2 & 2 & 5
\end{bmatrix}$$

$$L^3 = \begin{bmatrix}
16 & 9 & \mathbf{15} & \mathbf{10} & 9 & 16 & 12 & 13 & \mathbf{15} & 19 \\
9 & \mathbf{10} & 16 & 16 & \mathbf{15} & 13 & 9 & \mathbf{10} & 12 & \mathbf{15} \\
\mathbf{15} & 16 & 9 & 9 & 12 & \mathbf{10} & \mathbf{15} & 16 & \mathbf{10} & 13 \\
\mathbf{10} & 16 & 9 & 13 & 16 & \mathbf{10} & \mathbf{15} & \mathbf{15} & 9 & 12 \\
9 & \mathbf{15} & 12 & 16 & \mathbf{15} & 9 & \mathbf{10} & \mathbf{10} & 13 & 16 \\
16 & 13 & \mathbf{10} & \mathbf{10} & 9 & \mathbf{15} & 16 & 12 & \mathbf{15} & 9 \\
12 & 9 & \mathbf{15} & \mathbf{15} & \mathbf{10} & 16 & 13 & 9 & 16 & \mathbf{10} \\
13 & \mathbf{10} & 16 & \mathbf{15} & \mathbf{10} & 12 & 9 & 9 & 16 & \mathbf{15} \\
\mathbf{15} & 12 & \mathbf{10} & 9 & 13 & \mathbf{15} & 16 & 16 & \mathbf{10} & 9 \\
\mathbf{10} & \mathbf{15} & 13 & 12 & 16 & 9 & \mathbf{10} & \mathbf{15} & 9 & 16
\end{bmatrix}$$

$$L^4 = \begin{bmatrix}
\mathbf{75} & 60 & 60 & 53 & 53 & 68 & 68 & 66 & 66 & \mathbf{56} \\
60 & \mathbf{75} & 53 & 60 & 68 & 53 & 66 & 68 & \mathbf{56} & 66 \\
60 & 53 & \mathbf{75} & 68 & 60 & 66 & 53 & \mathbf{56} & 68 & 66 \\
53 & 60 & 68 & \mathbf{75} & 66 & 60 & \mathbf{56} & 53 & 66 & 68 \\
53 & 68 & 60 & 66 & \mathbf{75} & \mathbf{56} & 60 & 66 & 53 & 68 \\
68 & 53 & 66 & 60 & \mathbf{56} & \mathbf{75} & 66 & 60 & 68 & 53 \\
68 & 66 & 53 & \mathbf{56} & 60 & 66 & \mathbf{75} & 68 & 60 & 53 \\
66 & 68 & \mathbf{56} & 53 & 66 & 60 & 68 & \mathbf{75} & 53 & 60 \\
66 & \mathbf{56} & 68 & 66 & 53 & 68 & 60 & 53 & \mathbf{75} & 60 \\
\mathbf{56} & 66 & 66 & 68 & 68 & 53 & 53 & 60 & 60 & \mathbf{75}
\end{bmatrix}$$

Ao qual Paulus (GERDES, 1993a) comenta sobre as estruturas dessas matrizes:

> A terceira potência tem a mesma estrutura cíclica que a primeira potência: o primeiro ciclo da terceira potência compõe-se de 16's e 9's alternados; o segundo ciclo de 15's e 10's alternados.etc. As potências de ordem par não têm a mesma estrutura cíclica. As suas diagonais são constantes e elas apresentam outros ciclos, como o de 2's da segunda potência.(GERDES, 1993a, p. 230)

Pode-se explorar o estudo das matrizes com novas ideias, abrindo caminho para a imaginação e descobertas, Gerdes (1993a) deixa uma mensagem referente a esse tema:

> Investigação matemática pode aparecer como uma história infinita de descoberta de conceitos novos, relações novas, teoremas novos e aplicação novas. O exemplo da descoberta de curvas de espelho, Lunda-designs e matrizes cíclicas mostra como uma prática cultural africana antiga pode inspirar e estimular investigação matemática. (GERDES, 1993a, p. 233)

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para avaliar o conteúdo abordado foram formados grupos de alunos para aplicação de atividades e em seguida um questionário individual.

A atividade 1 (em anexo), mencionada acima, corresponde a aplicação do caso plano do Teorema de Euler na Geometria Sona. Participaram dessa atividade 27 alunos do 3º ano do ensino médio, resultando nos seguintes dados representados na tabela abaixo:

Tabela 2 – Tabela de notas

Nota	Número de alunos	Porcentagem de acertos %
$7,0$	3	$11,11$
$7,5$	2	$7,41$
$8,0$	6	$22,22$
$9,0$	9	$33,33$
$9,5$	2	$7,41$
10	5	$18,52$
total	27	100

Fonte: Elaborada pelo autor

Sendo uma atividade desenvolvida em dupla ou individual, com objetivo de discussão de conceitos, todos os 27 obtiveram uma nota maior ou igual a média $(6,0)$.

Quanto a atividade 2 (em anexo), trata-se de sequências de números naturais com uso da Geometria Sona. O número de participantes desta segunda atividade foram 26 alunos,(ver tabela 3).

Quanto a atividade relacionada ao Teorema de Pick, foram feitos questionamentos em sala e resolução de exemplos no quadro, com propostas de utilizá-las em cálculos de

Tabela 3 – Tabela de notas

Nota	Frenquância absoluta	Frequência Relativa %
$5,0 - 6,0$	4	$15,38$
$6,0 - 7,0$	7	$26,92$
$7,0 - 8,0$	6	$23,09$
$8,0 - 9,0$	7	$26,92$
$9,0 - 10,0$	2	$7,69$
total	26	100

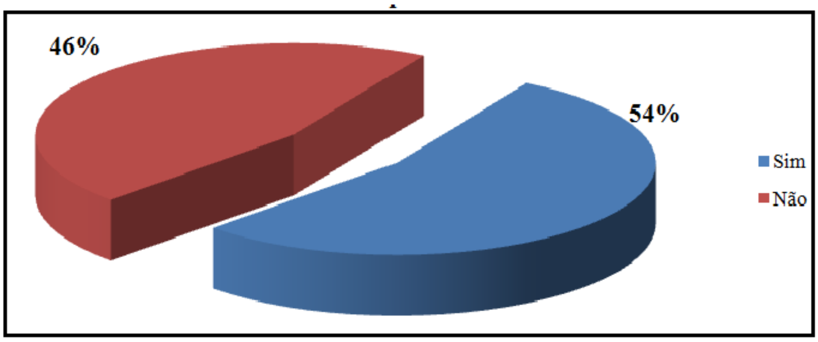
Fonte: Elaborada pelo autor

áreas aproximadas de mapas geográficos.

E por último, o questionário individual (em anexo), que serviria como análise da aceitabilidade do conteúdo (Geometria Sona) por parte dos alunos.

A primeira pergunta do questionário foi a seguinte: você concorda de uma Matemática produzida por povos da Angola, de ser estudada aqui no Brasil?

Figura 55 – Aceitabilidade da Geometria Sona

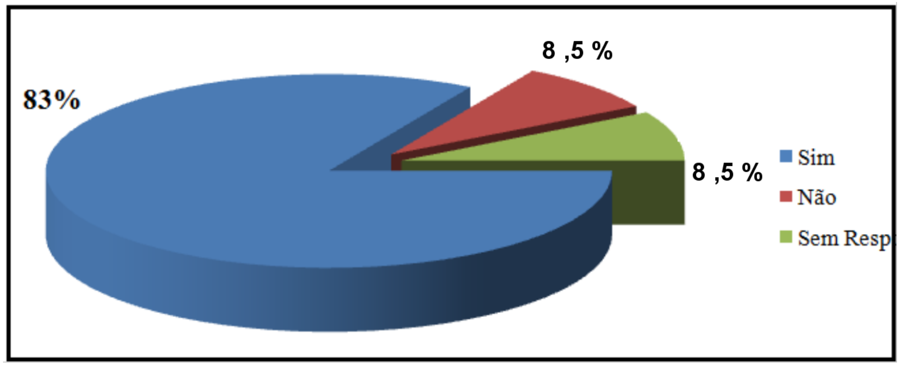


Fonte: Elaborada pelo autor

Dos 24 (vinte e quatro) alunos presentes na turma 13 (treze) responderam que sim, perguntado o porquê, eles responderam : Todas devem ser estudadas . Enquanto outros disseram: “ Pelo que eu sei a Matemática teve contribuição de vários povos e esse é mais um ”. Também disseram: “Eles tem capacidades e que todas as Matemáticas devem ser estudadas”. Enquanto 11 (onze) responderam que a Matemática da Angola não daria para ser estudada aqui no Brasil, perguntado o porquê, disseram que: “ São Matemáticas produzidas por povos diferentes ”, também relataram que “ é um pouco puxado para nós, pois tem muito desenho e forma, etc ”. comentaram ainda “ já tem muito assunto para estudar ”. Aqui os alunos referem-se aos conteúdos de Matemática como de outras disciplinas. Os assuntos do currículo de Matemática já são abordados de forma reduzida na escola, pois já são conteúdos mínimos da Base Nacional Comum (PCN), também sabe-se que possíveis temas podem compor a parte do currículo flexível, a ser organizada em cada Unidade Escolar.

O segundo questionamento era saber se a Geometria Sona, poderia ser abordada em livros didáticos de matemática?

Figura 56 – Possibilidade da Geometria Sona ser inserida em livros didáticos de matemática

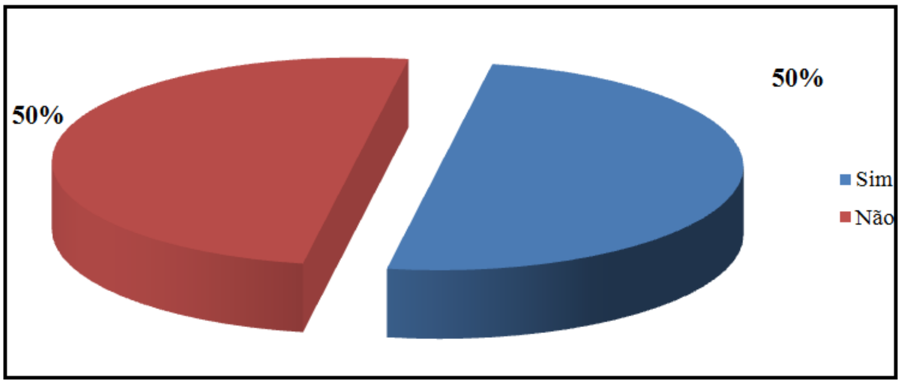


Fonte: Elaborada pelo autor

Tem-se que 20 (vinte) alunos responderam que sim. Dentre os motivos principais escreveram que " é interessante e é uma matemática diferente para nossa cultura ". Também justificaram " por ser um novo método bastante legal ". " Traz muita técnica para aprender uma matemática com desenhos ". " Seria mais fácil ". Enquanto dois alunos disseram que não, os motivos " porque não deveria estar em livros didáticos " e 2 (dois) não optaram. A Etnomatemática, tendo como foco a Geometria Sona, tem caráter instrumental amplo, como de expressão e raciocínio, de elaboração e compreensão de ideias que se desenvolve em estreita relação com o todo social e cultural. Portanto a Geometria Sona é uma ferramenta que favorece o desenvolvimento de atitudes de autonomia, da capacidade de raciocínio e comunicação.

O terceiro questionamento foi: Se entenderam o assunto Teorema de Euler aplicado aos poliedros.

Figura 57 – Nível de aproveitamento da aplicação do Teorema de Euler à poliedros

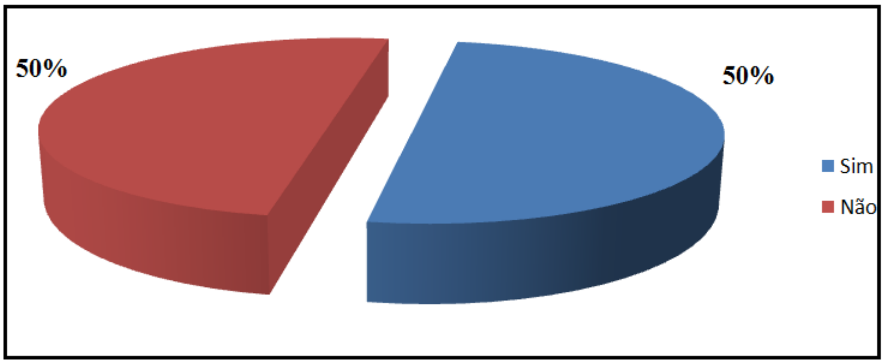


Fonte: Elaborada pelo autor

Temos que 12 (doze) alunos responderam sim, perguntado o porque eles comentaram: " É bastante fácil aprender, só precisa saber as regras " outros responderam que " porque os assunto foi explicado várias vezes e focou em pontos importantes ". Outros comentaram " é um assunto que apesar de precisar de atenção é bem simples de fazer ". E 12 (doze) disseram que não aprenderam o Teorema de Euler aplicado aos poliedros. Os motivos que eles disseram foram: " muito complicado e pouco tempo de estudo ". " falta de interesse " e disseram que " é muito difícil ".

O quarto questionamento foi: você entendeu o assunto Teorema de Euler aplicado à Geometria Sona?

Figura 58 – Nível de aproveitamento do Teorema de Euler aplicado a Geometria Sona

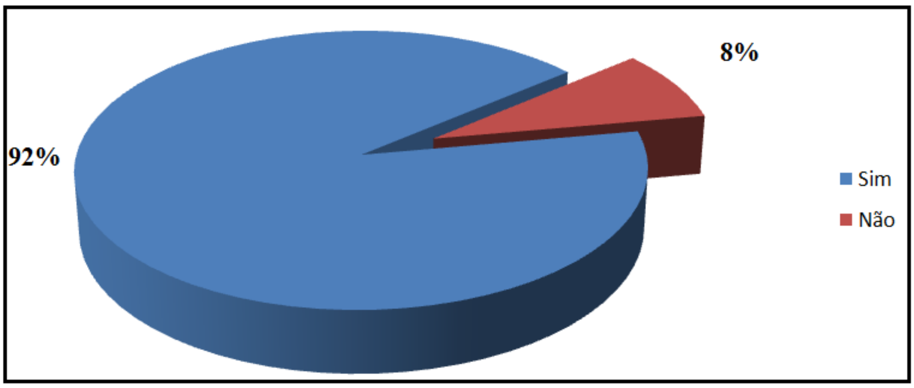


Fonte: Elaborada pelo autor

Também 12 (doze) disseram que sim. Perguntado o porque, disseram que " é um assunto fácil " e outros disseram " algumas partes sim outras não ". Os outros 12 (doze) que disseram não aprenderam o caso plano do Teorema de Euler aplicado à geometria Sona, " não muito bem, porque tem muitas coisas ". " Não me dediquei a aprender " e outros " porque é muito complexo " e também " o tempo de estudo foi curto ". Quanto aos dois questionamento anteriores, a divisão igualitária das respostas passa por vários fatores que refletem na aprendizagem da Matemática, como sociais e econômicos de cada indivíduo.

A quinta pergunta: você achou útil ter estudado a Geometria Sona?

Figura 59 – Representa a relevância da Geometria Sona ser útil no dia-a-dia

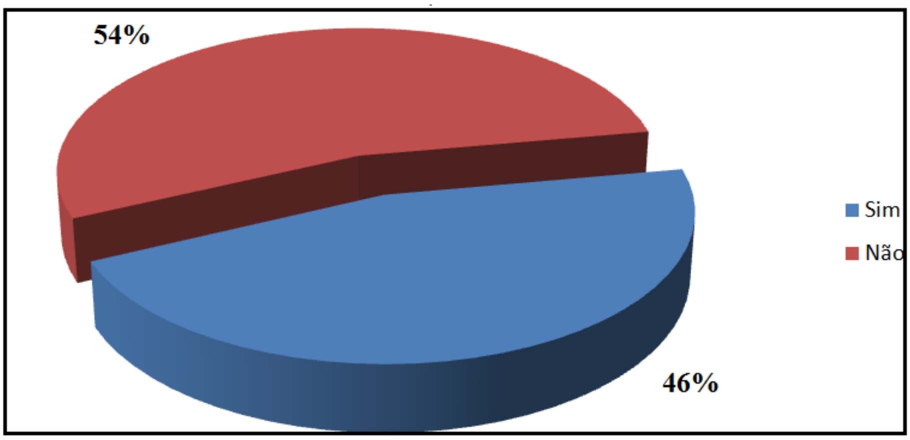


Fonte: Elaborada pelo autor

Logo, 22 (vinte e dois) alunos disseram que sim. O porque : " porque posso levar para minha vida e usar em certas situações ", " porque é bom aprender ". " Porque é interessante " e " porque existem determinadas situações que precisamos da mesma ". Enquanto 2 (dois) disseram não ser útil o estudo da Geometria Sona, disseram: " porque eu acho matemática inútil " ou " pouco interessante ". Aos alunos que tem consciência do valor a ser dado ao conhecimento são ciente do quanto é relevante o saber fazer Matemática. Aqueles que acham que a Matemática não tem utilidade e desinteressante é porque chegaram ao fim do Ensino Médio sem o desenvolvimento de habilidades e competências, sem iniciativa na busca de informação, sem mostrar responsabilidade e confiança em suas formas de pensar, fundamentar ideias e argumentações, não percebendo o valor da Matemática como bem cultural de leitura e interpretação da realidade, podendo estar melhor preparado para sua inserção no mundo do conhecimento e do trabalho.

E por fim , foi perguntado: se fosse escolher os conteúdos de matemática, você escolheria a Geometria Sona?

Figura 60 – Representa a escolha da Geometria Sona



Fonte: Elaborada pelo autor

O resultado foi, 11(onze) disseram que sim. Os motivos: " Porque desejo explorar mais sobre o assunto ", "é legal ser estudada " e " é interessante ". Enquanto : 13 (treze) responderam não, os motivos: " porque apesar de interessante, é muito confuso ". A Geometria Sona, como Etnomatemática, assim como outros conteúdos tem suas complexidades; o aluno deve perceber que as definições, demonstrações e encandeamento conceituais e lógicos tem a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outras e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A abordagem da Etnomatemática aqui descrita se configura como proposta inovadora nas aplicações dos conhecimentos matemáticos nas escolas, exemplificado pela população Quioca que habita o nordeste da Angola na África.

A Etnomatemática na verdade proporciona a articulação dos conhecimentos matemáticos com a realidade do aluno, envolvendo um aprendizado mais significativo e partilhado com o professor, em que se discutem valores, ética, sentimentos, significados e compreensões acerca do homem, ambiente, cultura e futuro. Um programa que se desenvolve dentro de sala de aula e se estende para o lado de fora alargando a compreensão de identidade cultural do meio em que vive. Esta é a proposta de uma matemática "viva"e construtora, uma forma dessa disciplina despir-se da roupagem do incompreensível e do difícil.

Vale ressaltar que essa nova ferramenta metodológica não apenas se limita em si, mas possibilita viabilidades da transdisciplinaridade a ser inserida simultaneamente nas escolas, uma metodologia que não seria meramente a junção de disciplinas, e sim um processo que contribui para a evolução científica, ética, cultural e do conhecimento.

No entanto, para se conseguir realizar o programa da etnomatemática é preciso que as escolas estejam preparadas para mudanças, complementar metodologias em uso, que estão preocupadas somente em focar as disciplinas e caminhar para um programa pedagógico que privilegie o conhecimento construído a partir da dialógica, do contexto e da realidade do educando, sem medo de errar ou do desconhecido.

Foram feitas atividades avaliativas para analisar o comprometimento dos alunos em relação aos conteúdos trabalhados em sala, e observou-se grande interesse por parte dos mesmos e ótimo rendimento em relação aos resultados das avaliações, mostrando que um professor bem empolgado com o tema de estudo e os alunos bem incentivados evoluem em relação à aprendizagem.

Constata-se nesse estudo que a Geometria Sona, como exemplo de uma Etnomatemática, contribuiu para melhorar a explanação do conteúdo estudado (Teorema de Euler, sequências e teorema de Pick), favorecendo novas aplicações dos conteúdos a novas matemáticas, mostrando que a matemática nunca se limita, nem mesmo a culturas.

Desse modo, foi-se uma grande experiência o estudo de uma Etnomatemática, principalmente de um povo da África, denominada de Geometria Sona. Que a partir de pontos e linhas, os Quiocos sabem muito bem transmitir cultura e arte a seus descendentes, pois através dos desenhos contam suas histórias e sabedorias aos mais jovens. E ao Mostrar para os alunos do 3º ano que a matemática pode estar em uma simples malha de pontos.

Para trabalhos posteriores pretende-se aplicar a Geometria Sona com maior abrangência, cobrindo toda a escola e se possível toda a Rede Pública de Ensino de Areia Branca - RN, compartilhando esse pensamento com professores de Matemática e dessa forma garanta a concretização desse projeto. E que a Geometria Sona seja desenvolvida na escola de forma lúdica em horários diferenciados, que não seja mais um conteúdo a ser explorada e cobrado em avaliações, mas sim de forma recreativa, como passa tempo. Favorecendo assim a criatividade e desenvolvimento do raciocínio matemático.

REFERÊNCIAS

CUNHA, H. *A Inclusão da história africana no tempo dos Parâmetros Curriculares Nacionais*. São Paulo: [s.n.], 2007. 1 p.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer*. São paulo: [s.n.], 1990. 88 p.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: Da teoria a prática*. Campina, São Paulo: [s.n.], 1996. 26 p.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática- elo entre as tradições e a modernidade*. 2. ed. Belo Horizonte: [s.n.], 2007.

NASTARI alfredo (Ed.). *scientific american*. 2001.

FERREIRA, A. B. de H. *Dicionário Aurélio Online*. 2014. Disponível em: <www.dicionariodoaurelio.com>.

GERDES, P. *Geometria Sona de Angola: Matemática duma Tradição Africana*. Maputo, Moçambique: [s.n.], 1993.

GERDES, P. *Vivendo a Matemática*. São Paulo: [s.n.], 1993. (2).

HALMENSCHLAGER, V. L. da S. *Etnomatemática: Uma experiência educacional*. São Paulo: [s.n.], 2001. 15 p.

KNIJNIK, G. *Etnomatemática em Movimento*. Belo Horizonte: [s.n.], 2012.

MUNIZ, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2012. 189 p.

ROCHA, T. M. Áreas: das noções intuitivas ao teorema de pick. p. 27, 2008.

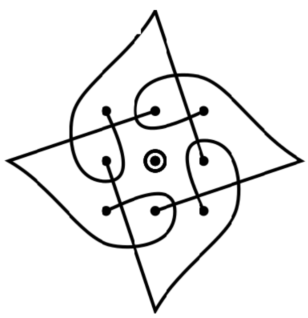
WWW.GOOGLE.COM.BR. *leonardo euler*. www.google.com.br: [s.n.], 2014. Disponível em: <www.google.com.br>.

Anexos

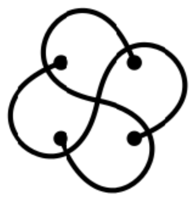
ANEXO A

ATIVIDADE 1

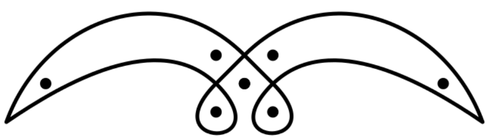
1. Verifique se o caso plano do Teorema de Euler é válido para os desenhos da Geometria Sona, sendo que cada nó representa um vértice, cada linha um aresta e as regiões de face.



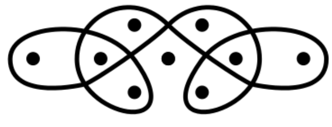
(a) Uma espécie de adivinha, Gerdes, p. 39



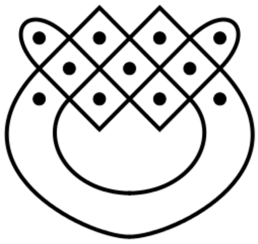
(b) tshintu tsha mwata, Gerdes, p. 39



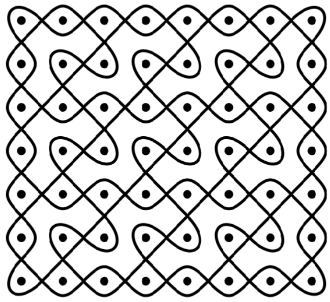
(a) Um morcego, Gerdes, p. 35



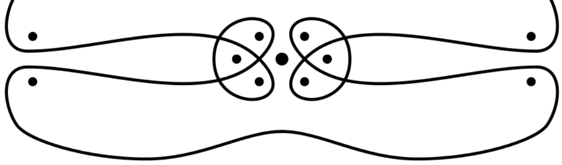
(b) Uma pele de hiena, Gerdes, p. 39



(a) arco-íris, Gerdes, p. 36



(b) galinha em fuga, Gerdes, p. 100



(a) pormenor de parte da figura humana, Gerdes, p. 37

Figura 61 – Técnica da realização dos desenhos na areia

ANEXO B

ATIVIDADE 2

1. Fazer uma pesquisa sobre o que é etnomatemática.

2. O Teorema de Euler é válido tanto para os poliedros quanto para as figuras planas, por que?

3. Calcule rapidamente:

   a) a soma dos números naturais de 1 à 70; 1.0

   b) a soma dos números naturais de 1 até 1000;

   c) a soma dos números naturais de 1 até 90;

   d) a soma dos números de 1 até 60;

   e) a soma dos números naturais de 61 até 90;

   f) a soma dos números naturais de 43 até 120;

4. Invente um método rápido para calcular a soma dos números pares de 2 até 100. Atente para nossa pequena sugestão:

   $2.(1+2+3+4) = 2+4+6+8$ $2.(1+2+3+4+5) = 2+4+6+8+10$ $2.(1+2+3+4+5+6) = 2+4+6+8+10+12$

5. Pesquise o que são grafos. Podemos considerar as figuras da Geometria Sona um grafo? Explique porque?

6. Que outro conceito matemático pode ser descoberto através da Geometria Sona?

ANEXO C

RELATÓRIO DE ESTAGIÁRIO

Este relatório foi escrito pelo estagiário Francisco das Chagas de Freitas, que participou do desenvolvimento deste trabalho como espectador: Observei que o professor foi bastante dinâmico na apresentação do conteúdo, sempre procurando um jeito diferente de fazer com que o aluno assimile o conhecimento. Apresentou domínio de sala, sem fazer muito esforço, pautado sempre no diálogo e no respeito mútuo. O que me chamou atenção em uma das aulas do professor, foi quando fui surpreendido por mais uma de suas dinâmicas; no momento em que ele se pôs frente a turma, em uma aula sobre poliedros e começou a fazer a introdução da Geometria Sona, fazendo comparação com os vertes, faces e arestas com a Geometria Sona. Acredito, que mesmo aquela aula fazendo parte do plano e posso até julgar que não, pelo fato de a escola adotar o livro didático esse assunto não se encontra no sumário, porém nos Parâmetros Curriculares Nacionais, (Etnomatemática). Os alunos, assim como eu (estagiário da turma), também não tinha conhecimento do assunto, então ficamos todos interessados e participativos observando cada detalhe dos desenhos, para se chegar ao resultado final. A repercussão foi tanta, que em outra aula o professor resolveu fazer a aplicabilidade de uma P.A na geometria sona e foram aulas bastante significativas tanto para mim como estagiário como para os alunos. As aulas conduziam ao objetivo de despertar o raciocínio lógico e o cognitivo de todos. A Geometria Sona ou geometria da África, fala da presença da arte, retratando como as formas geométricas, bem como os teoremas de Pitágoras estão presentes nas obras de artes (Etnomatemática). É a Matemática contada através de desenhos no chão. O professor é formado em Matemática, está se especialização em Matemática. Apresenta bom domínio dos conteúdos, sem deixar a desejar no seu desempenho como professor de Matemática.

ANEXO D

QUESTIONÁRIO PARA ALUNO

01. Você concorda que uma matemática produzida por povos da Angola, daria para ser estudada aqui no brasil?

    ( ) sim ( ) não. Por que?

02. A Geometria Sona, poderia ser abordada em livros didáticos de matemática?

    ( ) sim ( ) não. Por que?

03. Você entendeu o assunto abordado (teorema de Euler) aplicado aos poliedros?

    ( ) sim ( ) não. Por que?

04. Você entendeu o assunto abordado (teorema de Euler) aplicado à Geometria Sona?

    ( ) sim ( ) não. Por que?

05. Você achou útil ter estudado a Geometria Sona?

    ( ) sim ( ) não. Por que?

06. Se fosse escolher os conteúdos de matemática, você escolheria a Geometria Sona

    ( ) sim ( ) não. Por que?